Жорданова плоскость*

Е. Н. ШИРИКОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: evgenii_shirikov@mail.ru

УДК 512.552+512.712

Ключевые слова: жорданова плоскость, первичный идеал, автоморфизм, дифференцирование, тело частных, нормирование.

Аннотация

В работе рассматривается жорданова плоскость над полем произвольной характеристики. Описаны первичный спектр, группа автоморфизмов и дифференцирования жордановой плоскости, рассматриваются некоторые свойства нормирований тела частных жордановой плоскости. В частности, доказывается, что все нормирования тела частных жордановой плоскости являются абелевыми.

Abstract

E. N. Shirikov, Jordanian plane, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 2, pp. 217—230.

In the article, we consider the Jordanian plane over a field of arbitrary characteristic. We describe the prime spectrum, the group of automorphisms, and derivations of the Jordanian plane. We study some properties of valuations of the Jordanian plane. In particular, we prove that all valuations of the division ring of fractions of the Jordanian plane are Abelian.

1. Введение

Определение 1.1. *Жордановой плоскостью* $\Lambda_2(\mathbb{K})$ над полем $\mathbb{K}$ называется $\mathbb{K}$-алгебра, порождённая элементами X и Y с определяющим соотношением $YX = XY + Y^2$.

Интерес к изучению жордановой плоскости объясняется следующими классификационными результатами [15]. Рассмотрим ассоциативные 2-порождённые градуированные алгебры $A = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$, где $A_0 = \mathbb{K}$ — поле, $A_1 = \langle X, Y\rangle$ — линейная оболочка порождающих X и Y. Пусть также A не имеет делителей нуля и $\dim A_2 = 3$. Легко видеть, что алгебра коммутативных многочленов от двух переменных $\mathbb{K}[X, Y]$ удовлетворяет этим условиям, так что рассматриваемые

*Работа выполнена при частичной поддержке гранта 06-01-00037 Российского фонда фундаментальных исследований и гранта НШ-5666.2006.1.

алгебры являются естественным обобщением алгебры $\mathbb{K}[X, Y]$. В [15] показано, что при некоторых дополнительных условиях существуют только два класса таких алгебр: либо $A = \Lambda_1(\lambda, \mathbb{K})$ — алгебра квантовых многочленов от двух переменных (квантовая плоскость) с определяющим соотношением $YX = \lambda XY$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{K}^*$, либо $A = \Lambda_2(\mathbb{K})$ — жорданова плоскость. Таким образом, имеют место следующие классификационные теоремы.

Теорема 1.2 ([15]). *Пусть алгебра A центральна и поле $\mathbb{K}$ не имеет квадратичных расширений. Тогда либо $A = \Lambda_1(\lambda, \mathbb{K})$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{K}^*$, либо $A = \Lambda_2(\mathbb{K})$.*

Теорема 1.3 ([15]). *Пусть $\dim A_n = n + 1$ и поле $\mathbb{K}$ не имеет квадратичных расширений. Тогда либо $A = \Lambda_1(\lambda, \mathbb{K})$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{K}^*$, либо $A = \Lambda_2(\mathbb{K})$.*

Известно [15], что алгебры $\Lambda_1(\lambda, \mathbb{K})$ и $\Lambda_2(\mathbb{K})$ не изоморфны. Отметим также, что квантовая плоскость и жорданова плоскость являются кольцами косых многочленов Оре [12, 13].

Подобные «деформированные» алгебры широко изучаются в настоящее время. Например, в [2] рассматриваются 2-порождённые градуированные алгебры над полем нулевой характеристики, определяемые квадратичным однородным соотношением. Авторы находят необходимые и достаточные условия на коэффициенты этого соотношения, при которых алгебра имеет базис Пуанкаре—Биркгофа—Витта. В [14] рассматриваются 2-порождённые градуированные алгебры, определяемые двумя специальными однородными соотношениями третьей степени. В статье указываются необходимые и достаточные условия на коэффициенты этих соотношений, при которых такая алгебра является нётеровой. В этом случае описываются все примитивные идеалы такой алгебры. В [10] рассматриваются кольцевые свойства жордановой деформации кольца (2×2)-матриц над алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

При изучении квантовых «деформированных» алгебр традиционно рассматриваются первичные идеалы, автоморфизмы, дифференцирования, нормирования, представления, действия алгебр Хопфа. Отметим, что квантовая плоскость является частным случаем алгебры квантовых многочленов от нескольких переменных, а для этих алгебр ответы на перечисленные выше вопросы хорошо известны [1,6—9]; некоторые интересные свойства квантовой плоскости рассматриваются в [11]. Поэтому особый интерес представляет собой решение аналогичных задач для жордановой плоскости. В [5, 15] изучаются кольцевые свойства жордановой плоскости над произвольным полем, а именно описаны первичный спектр и группа автоморфизмов. В [15] также рассматривается алгебра дифференцирований жордановой плоскости. Отметим, что структура квантовой и жордановой плоскостей существенно зависит от того, являются ли эти алгебры центральными или нет. Традиционно при изучении алгебр квантовых многочленов рассматривается только центральный случай. Для жордановой плоскости мы рассматриваем оба случая. Отметим, что, насколько нам известно, жорданова плоскость так подробно ранее не изучалась, хотя и встречается в различных работах в качестве примеров (см. [16]).

В данной работе мы перечисляем основные результаты, полученные в [5,15], и рассматриваем нормирования жордановой плоскости над полем произвольной характеристики. Алгебра $\Lambda_2(\mathbb{K})$ является кольцом косых многочленов Оре [12,13] над нётеровым кольцом $\mathbb{K}[Y]$. Следовательно, жорданова плоскость является нётеровой областью целостности, в частности, алгебра $\Lambda_2(\mathbb{K})$ удовлетворяет условию Оре. Тогда жорданова плоскость $\Lambda_2(\mathbb{K})$ обладает телом частных $\mathbb{F}(\mathbb{K})$. Используя теоремы о строении первичного спектра жордановой плоскости, мы изучаем нормирования тела $\mathbb{F}(\mathbb{K})$. Приведём основной результат настоящей работы.

Теорема 1.4. *Любое нормирование тела частных жордановой плоскости над полем произвольной характеристики является абелевым.*

Отметим, что нормирования алгебр квантовых многочленов, в частности квантовой плоскости, достаточно хорошо изучены. Так, в [6] В. А. Артамонов доказал, что все нормирования центральной алгебры квантовых многочленов являются абелевыми. Позднее А. Ю. Сабитовым был доказан более общий результат (к сожалению, эта работа не опубликована).

Теорема 1.5 (А. Ю. Сабитов). *Любое нормирование тела частных произвольной алгебры квантовых многочленов является абелевым.*

Таким образом, учитывая наши классификационные результаты, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1.6. *Пусть* $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ *— градуированная алгебра, где* $A_0 = \mathbb{K}$ *— поле без квадратичных расширений,* $A_1 = \langle X, Y \rangle$ *— линейная оболочка порождающих* X *и* Y, A *не имеет делителей нуля и* $\dim A_2 = 3$. *Пусть также выполняется одно из двух условий: алгебра* A *центральна или* $\dim A_n = n + 1$. *Тогда алгебра* A *имеет тело частных и все нормирования тела частных алгебры* A *абелевы.*

Автор выражает искреннюю благодарность В. А. Артамонову за постановку задачи и руководство работой. Автор также признателен А. В. Михалёву и В. Т. Маркову за постоянное внимание к работе и ряд ценных замечаний.

2. Кольцевые свойства жордановой плоскости

Кольцевые свойства жордановой плоскости над полем нулевой характеристики рассматриваются в [15], над полем положительной характеристики — в [5]. Перечислим основные результаты этих работ.

Известно [15], что одночлены $X^\bullet Y^\bullet$ образуют базис алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$. Поэтому любой элемент $w \in \Lambda_2(\mathbb{K})$ можно единственным образом записать в каноническом виде $w = \sum \alpha_{ij} X^i Y^j$. В наших рассуждениях мы предполагаем, что все элементы алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$ записаны именно в такой форме. Тогда мы можем корректно определить $\deg_X w$ — степень по X элемента w: мы будем говорить, что

$\deg_X w = n$, если $w = \sum\limits_{i=0}^{n} X^i \varphi_i(Y)$, где $\varphi_n \neq 0$. Умножение в алгебре $\Lambda_2(\mathbb{K})$ устроено следующим образом.

Утверждение 2.1 ([15]).

$$Y^m X^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \frac{(m+n-l-1)!}{(m-1)!} X^l Y^{m+n-l},$$

где $m, n \in \mathbb{N}$. *В частности, если*

$$w = \sum_{i \geqslant 0,\ j \geqslant 0} \alpha_{ij} X^i Y^j \in \Lambda_2(\mathbb{K}),$$

то

$$Yw = \sum_{k \geqslant 0} w_X^{(k)} Y^{k+1},$$

где

$$w_X^{(k)} = \sum_{i \geqslant k,\ j \geqslant 0} \alpha_{ij} \frac{i!}{(i-k)!} X^{i-k} Y^j \text{ —}$$

формальная производная w *по* X,

$$wX = Xw + w'_Y Y^2,$$

где

$$w'_Y = \sum_{i \geqslant 0,\ j \geqslant 1} j \alpha_{ij} X^i Y^{j-1} \text{ —}$$

формальная производная w *по* Y.

Из утверждения 2.1 следует, что $\deg_X w_1 w_2 = \deg_X w_1 + \deg_X w_2$, где $w_1, w_2 \in \Lambda_2(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$. В частности, $\Lambda_2(\mathbb{K})$ не имеет делителей нуля. Очевидно также, что $\Lambda_2(\mathbb{K})$ — градуированная алгебра: $A = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$, где $A_0 = \mathbb{K}$, A_n — линейная оболочка мономов степени n.

Центр жордановой плоскости описывается следующей теоремой.

Теорема 2.2 ([15]). *Если* $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$, *то* $Z\bigl(\Lambda_2(\mathbb{K})\bigr) = \mathbb{K}$; *если* $\operatorname{char} \mathbb{K} = p > 0$, *то* $Z\bigl(\Lambda_2(\mathbb{K})\bigr)$ *— это подалгебра, порождённая элементами* X^p *и* Y^p.

Следующие теоремы описывают первичный спектр и группу автоморфизмов жордановой плоскости. Напомним определение первичного идеала [4,12]. Пусть R — ассоциативное кольцо.

Определение 2.3. Кольцо R называется *первичным*, если выполняется одно из двух равносильных условий:

1) если $aRb = 0$ для некоторых элементов $a, b \in R$, то либо $a = 0$, либо $b = 0$;
2) если A, B — двусторонние идеалы кольца R и $AB = (0)$, то либо $A = (0)$, либо $B = (0)$.

Определение 2.4. Двусторонний идеал I кольца R называется *первичным*, если выполняется одно из следующих равносильных условий:

1) R/I — первичное кольцо;
2) если $aRb \subset I$ для некоторых элементов $a, b \in R$, то либо $a \in I$, либо $b \in I$;
3) если A, B — двусторонние идеалы кольца R и $AB \subset I$, то либо $A \subset I$, либо $B \subset I$.

Множество всех первичных идеалов кольца R называется *первичным спектром* кольца и обозначается $\mathrm{Spec}(R)$.

В коммутативном случае первичное кольцо — это в точности кольцо без делителей нуля, а понятие первичного идеала совпадает с понятием простого идеала. В общем случае это неверно: кольцо без делителей нуля является первичным, однако существуют примеры первичных колец, в которых есть делители нуля. Аналогом простых идеалов в некоммутативном случае являются вполне первичные идеалы.

Определение 2.5. Двусторонний идеал I кольца R называется *вполне первичным*, если R/I — кольцо без делителей нуля.

Теорема 2.6 ([15]). *Пусть* $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 0$, I *— собственный первичный идеал алгебры* $\Lambda_2(\mathbb{K})$. *Тогда либо* $I = (Y)$, *либо* $I = \big(Y, \psi(X)\big)$ *для некоторого неприводимого многочлена* $\psi \in \mathbb{K}[X]$.

Теорема 2.6 позволяет описать группу автоморфизмов жордановой плоскости для случая $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 0$: так как (Y) — единственный ненулевой минимальный первичный идеал, то любой автоморфизм должен оставлять его на месте, т. е. если $\varphi \in \mathrm{Aut}\,\Lambda_2(\mathbb{K})$, то $\varphi\big((Y)\big) = (Y)$. Это соображение позволяет легко доказать следующую теорему.

Теорема 2.7 ([15]). *Пусть* $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 0$, $\varphi \in \mathrm{Aut}\,\Lambda_2(\mathbb{K})$. *Тогда*

$$\varphi(X) = \gamma X + g(Y), \quad \varphi(Y) = \gamma Y$$

для некоторых $\gamma \in \mathbb{K}^*$ *и* $g \in \mathbb{K}[Y]$. *Группа* $\mathrm{Aut}\,\Lambda_2(\mathbb{K})$ *изоморфна группе* $\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}[Y]$ *с операцией* $\circ$, *где*

$$\big(\gamma_1, g_1(Y)\big) \circ \big(\gamma_2, g_2(Y)\big) = \big(\gamma_1\gamma_2, \gamma_2 g_1(Y) + g_2(\gamma_1 Y)\big).$$

Заметим также, что все первичные идеалы $\Lambda_2(\mathbb{K})$ при $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 0$ являются вполне первичными, т. е. соответствующие фактор-алгебры не имеют делителей нуля.

Над полем ненулевой характеристики спектр жордановой плоскости устроен гораздо сложнее. В этом случае $Z\big(\Lambda_2(\mathbb{K})\big) = \mathbb{K}[X^p, Y^p] \cong \mathbb{K}[U, V]$ и алгебра $\Lambda_2(\mathbb{K})$ является конечно порождённым свободным модулем над своим центром. В [5] показано, что описание первичного спектра алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$ в некотором смысле эквивалентно описанию всех простых идеалов алгебры коммутативных многочленов от двух переменных $\mathbb{K}[U, V]$, а именно имеет место следующая теорема.

Теорема 2.8 ([5]). *Пусть* $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = p > 0$, I *— собственный первичный идеал алгебры* $\Lambda_2(\mathbb{K})$. *Тогда выполнено одно из следующих условий*:

1) $I = (Y)$;

2) $I = \big(Y, \psi(X)\big)$ *для некоторого неприводимого многочлена* $\psi \in \mathbb{K}[X]$;
3) $I = \big(\tilde{f}(X^p, Y^p)\big)$ *для некоторого неприводимого многочлена* $\tilde{f} \in \mathbb{K}[U, V]$, $\tilde{f} \neq V$;
4) $I = \big(\tilde{f}(Y^p), \tilde{g}(X^p, Y^p)\big)$ *для некоторых таких неприводимых многочленов* $\tilde{f} \in \mathbb{K}[V]$ *и* $\tilde{g} \in \mathbb{K}[U, V]$, *что* $\tilde{f} \neq V$, $\tilde{g} = U^s + \sum\limits_{i=0}^{s-1} U^i \tilde{\psi}_i(V)$, *где* $s \in \mathbb{N}$, *и* $\big(\tilde{f}(V), \tilde{g}(U, V)\big)$ — *простой идеал в кольце* $\mathbb{K}[U, V]$.

Традиционно для алгебр с «большим» центром рассматриваются вопросы о связи первичных идеалов всей алгебры и простых идеалов её центра. Нетрудно проверить, что если I — первичный идеал некоторой ассоциативной алгебры A, то $\tilde{I} = I \cap Z(A)$ — простой идеал её центра. В [5] для жордановой плоскости над полем ненулевой характеристики рассматривается обратная задача.

Теорема 2.9 ([5]). *Пусть* $\tilde{I} \lhd \mathbb{K}[X^p, Y^p]$ — *собственный простой идеал. Тогда существует, и притом единственный, такой первичный идеал* $I \lhd \Lambda_2(\mathbb{K})$, *что* $\tilde{I} = I \cap Z\big(\Lambda_2(\mathbb{K})\big)$.

Отметим также, что над полем ненулевой характеристики не все первичные идеалы являются вполне первичными. Так, по теореме 2.8 идеал (X^p) является первичным, но в соответствующей фактор-алгебре, очевидно, есть делители нуля.

Теорема 2.8 также позволяет описать группу автоморфизмов жордановой плоскости над полем ненулевой характеристики. Действительно, так как $I = (Y)$ — минимальный ненулевой первичный идеал, то любой автоморфизм должен переводить его в минимальный ненулевой первичный идеал. Поэтому если $\varphi \in \operatorname{Aut} \Lambda_2(\mathbb{K})$, то либо $\varphi\big((Y)\big) = (Y)$, либо $\varphi\big((Y)\big) = \big(\tilde{f}(X^p, Y^p)\big)$ для некоторого многочлена $\tilde{f}(U, V) \in \mathbb{K}[U, V]$. Однако во втором случае несложно показать, что $\varphi(Y) = \gamma \tilde{f}(X^p, Y^p)$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{K}^*$, что невозможно, так как $\varphi(v) \in Z\big(\Lambda_2(\mathbb{K})\big)$ в том и только в том случае, если $v \in Z\big(\Lambda_2(\mathbb{K})\big)$. Следовательно, $\varphi\big((Y)\big) = (Y)$. Таким образом, общий вид автоморфизмов не зависит от характеристики поля. Однако над полем ненулевой характеристики можно рассмотреть $G \subseteq \operatorname{Aut} \Lambda_2(\mathbb{K})$ — подгруппу автоморфизмов, тождественных на центре алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$.

Теорема 2.10 ([5]). *Пусть* $\operatorname{char} \mathbb{K} = p > 0$, $\varphi \in \operatorname{Aut} \Lambda_2(\mathbb{K})$. *Тогда*

$$\varphi(X) = \gamma X + g(Y), \quad \varphi(Y) = \gamma Y$$

для некоторых $\gamma \in \mathbb{K}^*$ *и* $g \in \mathbb{K}[Y]$. *Группа* $\operatorname{Aut} \Lambda_2(\mathbb{K})$ *изоморфна группе* $\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}[Y]$ *с операцией* $\circ$, *где*

$$\big(\gamma_1, g_1(Y)\big) \circ \big(\gamma_2, g_2(Y)\big) = \big(\gamma_1\gamma_2, \gamma_2 g_1(Y) + g_2(\gamma_1 Y)\big).$$

Если $\varphi \in G$, *то* $\varphi(X) = X + iY$, $\varphi(Y) = Y$ *для некоторого* $i \in \mathbb{Z}_p$, $G \cong \mathbb{Z}_p$.

Приведём также описание дифференцирований жордановой плоскости [15]. Напомним, что дифференцированием ассоциативной алгебры A называется линейное отображение $\partial\colon A \to A$, для которого выполняется «правило Лейбница», т. е. $\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b)$ для всех $a, b \in A$. Для любого элемента $w \in A$ определим внутреннее дифференцирование $\operatorname{ad} w$: $\operatorname{ad} w(a) = wa - aw$ для любого $a \in A$. Множество всех дифференцирований алгебры A является алгеброй Ли относительно операции коммутирования. Обозначим эту алгебру как $\operatorname{Der} A$.

Теорема 2.11 ([15]).

1. *Пусть* $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$, $\partial \in \operatorname{Der}\big(\Lambda_2(\mathbb{K})\big)$. *Тогда*

$$\partial(X) = \alpha Y + \psi(X) + \operatorname{ad} w(X),$$
$$\partial(Y) = \psi'(X)Y + \operatorname{ad} w(Y)$$

для некоторых $\alpha \in \mathbb{K}$, $\psi \in \mathbb{K}[X]$, $w \in \Lambda_2(\mathbb{K})$.

2. *Пусть* $\operatorname{char}\mathbb{K} = p > 2$, $\partial \in \operatorname{Der}\big(\Lambda_2(\mathbb{K})\big)$. *Тогда*

$$\partial(X) = \psi(X) + T(X^p, Y^p)Y + \operatorname{ad} w(X),$$
$$\partial(Y) = \psi'(X)Y + S(X^p, Y^p)YX^{p-1}Y + \operatorname{ad} w(Y)$$

для некоторых $\psi \in \mathbb{K}[X]$, $T, S \in Z\big(\Lambda_2(\mathbb{K})\big)$, $w \in \Lambda_2(\mathbb{K})$.

3. *Пусть* $\operatorname{char}\mathbb{K} = 2$, $\partial \in \operatorname{Der}\big(\Lambda_2(\mathbb{K})\big)$. *Тогда*

$$\partial(X) = \psi(X) + T(X^2, Y^2)Y + \operatorname{ad} w(X),$$
$$\partial(Y) = \varphi(X) + \big(\varphi'(X) + \psi'(X)\big)Y + S(X^2, Y^2)YXY + \operatorname{ad} w(Y)$$

для некоторых $\varphi, \psi \in \mathbb{K}[X]$, $T, S \in Z\big(\Lambda_2(\mathbb{K})\big)$, $w \in \Lambda_2(\mathbb{K})$.

3. Нормирования: определение и общие свойства

Напомним определение и основные свойства нормирований [3].

Определение 3.1. Пусть Γ — линейно упорядоченная группа (не обязательно коммутативная), F — тело над полем $\mathbb{K}$. Эпиморфизм $\nu\colon F^* \to \Gamma$ называется нормированием, если для любых $w_1, w_2, w_1 + w_2 \in F^*$ выполняется условие $\nu(w_1 + w_2) \geqslant \min\{\nu(w_1), \nu(w_2)\}$ и $\nu(\mathbb{K}^*) = 0$. Нормирование ν называется абелевым, если группа Γ абелева.

Нам понадобятся следующие свойства нормирований и линейно упорядоченных групп.

Утверждение 3.2 (принцип доминирования). *Пусть* ν — *нормирование,* $w_1, w_2, w_1 + w_2 \in F^*$, $\nu(w_1) > \nu(w_2)$. *Тогда* $\nu(w_1 + w_2) = \nu(w_2)$.

Доказательство. По определению нормирования $\nu(-w_1) = \nu(w_1)$ и $\nu(w_1 + w_2) \geqslant \nu(w_2)$. Тогда

$$\nu(w_2) = \nu\big(w_1 + w_2 + (-w_1)\big) \geqslant \min\{\nu(w_1 + w_2), \nu(w_1)\}.$$

Если $\nu(w_1 + w_2) \geqslant \nu(w_1)$, то $\nu(w_2) \geqslant \nu(w_1)$, что неверно. Следовательно, $\nu(w_1 + w_2) < \nu(w_1)$ и $\nu(w_2) \geqslant \nu(w_1 + w_2)$, что и требовалось доказать. $\square$

Утверждение 3.3. *Пусть Γ — линейно упорядоченная группа, $a \in \Gamma$, $n \in \mathbb{N}$, $na \in Z(\Gamma)$. Тогда $a \in Z(\Gamma)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для некоторого элемента $b \in Z(\Gamma)$ имеет место неравенство $b + a - b < a$. Сложим n таких неравенств. Получим

$$na > (b + a - b) + (b + a - b) + \ldots + (b + a - b) = b + na - b = na,$$

противоречие. □

Утверждение 3.4. *Пусть A — ассоциативная $\mathbb{K}$-алгебра без делителей нуля, конечно порождённая над своим центром $Z(A)$, F — тело частных алгебры A, Γ — линейно упорядоченная группа, $\nu\colon F^* \to \Gamma$ — нормирование. Тогда группа Γ коммутативна, т. е. все нормирования тела F абелевы.*

Доказательство. Пусть Q — поле частных алгебры $Z(A)$. Рассмотрим $A_{[Z(A)\setminus\{0\}]}$ — кольцо частных относительно мультипликативной системы $Z(A)\setminus\{0\}$. Тогда $A_{[Z(A)\setminus\{0\}]}$ является конечномерной алгеброй над полем Q. Рассмотрим произвольный элемент $w \in A$. Тогда существует многочлен $f \in Q[t]\setminus Q$, такой что $f(w) = 0$. Пусть $n = \deg f$. Приведём коэффициенты этого многочлена к общему знаменателю. Тогда $a_n w^n = a_{n-1} w^{n-1} + \ldots + a_1 w + a_0$, где $a_i \in Z(A)$, причём $a_n \neq 0$ и среди коэффициентов $a_{n-1}, \ldots, a_0$ есть по меньшей мере один ненулевой. Очевидно, $\nu\bigl(Z(A)\bigr) \subseteq Z(\Gamma)$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $\nu(a_i w^i) = \nu(a_j w^j)$ для некоторых $0 \leqslant i < j \leqslant n-1$, $a_i a_j \neq 0$. Тогда $\nu(a_i) + i\nu(w) = \nu(a_j) + j\nu(w)$, откуда $(j - i)\nu(w) = \nu(a_i) - \nu(a_j) \in Z(\Gamma)$. Тогда по утверждению 3.3 $\nu(w) \in Z(\Gamma)$.

Случай 2. Пусть все значения $\nu(a_j w^j)$, где $0 \leqslant j \leqslant n - 1$ и $a_j \neq 0$, различны. Выберем среди этих значений наименьшее. Пусть это $\nu(a_i w^i)$, $a_i \neq 0$. Тогда по принципу доминирования $\nu(a_n w^n) = \nu(a_i w^i)$. Далее такими же рассуждениями, как и в случае 1, получаем, что $\nu(w) \in Z(\Gamma)$. □

4. Нормирования жордановой плоскости

В этой части мы получим некоторые результаты о нормированиях тела частных жордановой плоскости. Основным результатом является доказательство абелевости всех нормирований тела частных жордановой плоскости над полем произвольной характеристики. Отметим, что при изучении нормирований мы существенно опираемся на результаты, описывающие первичный спектр жордановой плоскости. Пусть $\mathbb{F}(\mathbb{K})$ — тело частных жордановой плоскости $\Lambda_2(\mathbb{K})$, Γ — линейно упорядоченная группа, $\nu\colon \mathbb{F}(\mathbb{K})^* \to \Gamma$ — нормирование.

Утверждение 4.1. $\nu(X) \leqslant \nu(Y)$, $\nu(X) + \nu(Y) = \nu(Y) + \nu(X)$.

Доказательство. Поскольку $YX = XY + Y^2$, то

$$\nu(Y) + \nu(X) = \nu(X + Y) + \nu(Y).$$

Предположим, что $\nu(X) > \nu(Y)$. Тогда по принципу доминирования $\nu(X+Y) = \nu(Y)$, $\nu(Y)+\nu(X) = \nu(Y)+\nu(Y)$, откуда $\nu(X) = \nu(Y)$, противоречие. Следовательно, $\nu(X) \leqslant \nu(Y)$. Пусть $\nu(X) < \nu(Y)$. Тогда по принципу доминирования $\nu(X+Y) = \nu(X)$, так что $\nu(Y)+\nu(X) = \nu(X+Y)+\nu(Y) = \nu(X)+\nu(Y)$, что и требовалось доказать. $\square$

Таким образом, если заданы элементы a и b линейно упорядоченной группы, причём $a \leqslant b$ и $a+b = b+a$, то всегда можно построить такое нормирование ν, что $\nu(X) = a$, $\nu(Y) = b$. Если a и b независимы как элементы абелевой группы, то такое нормирование ν единственно. Так ли это в общем случае, в настоящий момент неизвестно, однако в некоторых случаях теоремы о строении первичного спектра жордановой плоскости позволяют однозначно восстановить нормирование по значениям $\nu(X)$ и $\nu(Y)$. Следующее утверждение показывает, как связаны нормирования и первичный спектр жордановой плоскости.

Пусть $\nu(X) = \nu(Y) = 0$. Тогда $\nu(\alpha X^i Y^j) = 0$ для любого монома $\alpha X^i Y^j \in \Lambda_2(\mathbb{K})$. Следовательно, для любого элемента $w = \sum\limits_{i,j\geqslant 0} \alpha_{ij} X^i Y^j \in \Lambda_2(\mathbb{K})$ получаем, что $\nu(w) \geqslant \min\limits_{i,j\geqslant 0}\{\nu(\alpha_{ij}X^iY^j)\} = 0$. Рассмотрим так называемый идеал нормирования — множество

$$I_\nu = \{w \in \Lambda_2(\mathbb{K}) \setminus \{0\} \mid \nu(w) > 0\} \cup \{0\}.$$

Утверждение 4.2. *I_ν — вполне первичный идеал жордановой плоскости.*

Доказательство. Пусть $w_1, w_2 \in I_\nu \setminus \{0\}$ и $w_1 + w_2 \neq 0$. Тогда $\nu(w_1), w(\nu_2) > 0$, так что $\nu(w_1+w_2) \geqslant \min\{\nu(w_1), \nu(w_2)\} > 0$, т. е. $w_1+w_2 \in I_\nu$. Далее, пусть $w \in I_\nu \setminus \{0\}$, $u_1, u_2 \in \Lambda_2(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$. Так как в алгебре $\Lambda_2(\mathbb{K})$ нет делителей нуля, то $u_1 w u_2 \neq 0$. Так как $\nu(u_1), \nu(u_2) \geqslant 0$, то $\nu(u_1 w u_2) = \nu(u_1) + \nu(w) + \nu(u_2) \geqslant \nu(w) > 0$. Итак, $I_\nu \lhd \Lambda_2(\mathbb{K})$. Проверим, что I_ν — вполне первичный идеал жордановой плоскости. Пусть $u_1, u_2 \notin I_\nu$, т. е. $\nu(u_1) = \nu(u_2) = 0$. Тогда $u_1 u_2 \neq 0$ и $\nu(u_1 u_2) = \nu(u_1) + \nu(u_2) = 0$, т. е. $u_1 u_2 \notin I_\nu$, что и требовалось доказать. $\square$

Следующие утверждения показывают, что в некоторых случаях нормирование однозначно восстанавливается по значениям $\nu(X)$ и $\nu(Y)$. Напомним, что алгебра $\Lambda_2(\mathbb{K})$ имеет естественную градуировку:

$$\Lambda_2(\mathbb{K}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n,$$

где $A_0 = \mathbb{K}$, $A_1 = \langle X, Y \rangle$ — линейная оболочка порождающих X и Y.

Утверждение 4.3. *Пусть $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$, $\nu(X) = \nu(Y) = \gamma \in \Gamma$, $w \in A_n \setminus \{0\}$, где $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $\nu(w) = n\gamma$.*

Доказательство. Проведём индукцию по n. Для $n = 0$ утверждение очевидно. Предположим, что если $w \in A_m \setminus \{0\}$, где $0 \leqslant m < n$, то $\nu(w) = m\gamma$. Пусть теперь $w = \sum\limits_{i+j=n} \alpha_{i,j} X^i Y^j \in A_n \setminus \{0\}$. Если $\alpha_{0,n} = 0$, то $w = Xw_1$, где

$w_1 = \sum\limits_{i+j=n,\ i\geqslant 1} \alpha_{i,j} X^{i-1} Y^j \in A_{n-1} \setminus \{0\}$. Тогда по предположению индукции $\nu(w_1) = (n-1)\gamma$, так что $\nu(w) = \nu(Xw_1) = n\gamma$. Предположим, что $\alpha_{0,n} \neq 0$. По утверждению 2.1 $wX = Xw + w'_Y Y^2$, где $w'_Y = \sum\limits_{i+j=n,\ j\geqslant 1} j\alpha_{i,j} X^i Y^{j-1} \in A_{n-1}$. Так как $\alpha_{0,n} \neq 0$ и $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$, то $w'_Y \neq 0$. По предположению индукции $\nu(w'_Y) = (n-1)\gamma$, откуда $\nu(w'_Y Y^2) = (n+1)\gamma$. По определению нормирования $\nu(w) \geqslant n\gamma$. Предположим, что $\nu(w) > n\gamma$. Тогда $\nu(Xw) = \gamma + \nu(w) > (n+1)\gamma$. Отсюда по принципу доминирования $\nu(wX) = (n+1)\gamma$, поэтому $\nu(w) = n\gamma$, противоречие. Значит, $\nu(w) = n\gamma$, что и требовалось доказать. □

Утверждение 4.4. *Пусть* $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$, $\nu(X) = \nu(Y) = \gamma \in \Gamma$. *Тогда* $\Gamma = \langle\gamma\rangle$, *т. е. если* $\gamma = 0$, *то* $\Gamma = 0$, *если* $\gamma \neq 0$, *то* $\Gamma = \mathbb{Z}$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\gamma = 0$. Тогда по утверждению 4.2 множество I_ν является вполне первичным идеалом жордановой плоскости. Так как $\nu(Y) = 0$, то $Y \notin I_\nu$. Однако по теореме 2.6 любой ненулевой первичный идеал жордановой плоскости над полем нулевой характеристики содержит элемент Y. Значит, $I_\nu = 0$, откуда $\Gamma = 0$.

Рассмотрим случай $\gamma > 0$. Пусть $w \in \Lambda_2(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, $w = w_{m_1} + \ldots + w_{m_k}$, где $m_1 < \ldots < m_k$, $w_{m_i} \in A_{m_i} \setminus \{0\}$. Тогда по лемме 4.3 $\nu(w_{m_i}) = \gamma m_i$. Так как $\gamma > 0$, то $m_1\gamma < \ldots < m_k\gamma$ и по принципу доминирования $\nu(w) = m_1\gamma$. Следовательно, Γ порождается элементом γ, т. е. $\Gamma \cong \mathbb{Z}$.

Случай $\gamma < 0$ рассматривается аналогично. □

Утверждение 4.5. *Пусть* $\operatorname{char}\mathbb{K} = p > 0$ *и в поле* $\mathbb{K}$ *можно извлекать корни степени* p, $\nu(X) = \nu(Y) = 0$. *Тогда либо* $\Gamma = 0$, *либо* $\Gamma = \mathbb{Z}$.

Доказательство. Предположим, что $\Gamma \neq 0$. По утверждению 4.2 множество I_ν является вполне первичным идеалом жордановой плоскости. Так как $\nu(Y) = 0$, то $Y \notin I_\nu$. Так как $\Gamma \neq 0$, то $I_\nu \neq (0)$. Тогда по теореме 2.8 либо $I_\nu = \big(\tilde f(X^p, Y^p)\big)$ для некоторого многочлена $\tilde f \in \mathbb{K}[U,V]$, либо $I_\nu = \big(\tilde f(Y^p), \tilde g(X^p, Y^p)\big)$ для некоторых многочленов $\tilde f \in \mathbb{K}[V]$ и $\tilde g \in \mathbb{K}[U,V]$. Так как в поле $\mathbb{K}$ можно извлекать корни степени p, то $\tilde f(Y^p) = \big(f(Y)\big)^p$ для некоторого многочлена $f \in \mathbb{K}[t]$, так что в фактор-алгебре $\Lambda_2(\mathbb{K})/\big(\tilde f(Y^p), \tilde g(X^p, Y^p)\big)$ есть делители нуля. Следовательно, идеалы вида $I_\nu = \big(\tilde f(Y^p), \tilde g(X^p, Y^p)\big)$ не могут быть вполне первичными. Итак, $I_\nu = \big(\tilde f(X^p, Y^p)\big)$. Пусть $\nu\big(\tilde f(X^p, Y^p)\big) = \gamma \in \Gamma$. Нетрудно проверить, что любой элемент $w \in \Lambda_2(\mathbb{K})$ единственным образом представляется в виде $w = \big(\tilde f(X^p, Y^p)\big)^n u$, где $u \in \Lambda_2(\mathbb{K}) \setminus I_\nu$. Если $w = \big(\tilde f(X^p, Y^p)\big)^n u$, то $\nu(w) = n\gamma$. Следовательно, $\Gamma = \langle\gamma\rangle \cong \mathbb{Z}$. □

Теперь перейдём к доказательству основного результата этого раздела: мы покажем, что все нормирования тела частных жордановой плоскости абелевы. Для доказательства основной теоремы нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения и замечания.

Определение 4.6. Пусть $\Lambda_2(\mathbb{K}) = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ — естественная градуировка на $\Lambda_2(\mathbb{K})$. Мы будем говорить, что высота элемента $w \in \Lambda_2(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}$ равна $n \in \mathbb{N}$, если $w \in \bigoplus\limits_{i=0}^{n} A_i$, но $w \notin \bigoplus\limits_{i=0}^{n-1} A_i$ (обозначение: $\mathrm{h}(w) = n$).

Утверждение 4.7. $\nu(Y) \in Z(\Gamma)$.

Доказательство. Предположим противное: $\nu(Y) \notin Z(\Gamma)$. Тогда среди элементов $w \in \Lambda_2(\mathbb{K})$, таких что $\nu(Yw) \neq \nu(wY)$, выберем элемент u с наименьшей высотой. По утверждению 2.1 $Yu = uY + tY^2$, где $t = \sum\limits_{k \geqslant 1} u_X^{(k)} Y^{k-1}$, причём либо $t \in \mathbb{K}$, либо $\mathrm{h}(t) < \mathrm{h}(u)$, т. е. $\nu(Yt) = \nu(tY)$ в силу выбора элемента u. Рассмотрим три случая.

Случай 1: $\nu(uY) > \nu(tY^2)$. Тогда по принципу доминирования $\nu(Yu) = \nu(tY^2)$. Так как $\nu(Yt) = \nu(tY)$, получаем

$$\begin{aligned}
&\nu(Y) + \nu(u) = \nu(t) + 2\nu(Y),\\
&\nu(u) = -\nu(Y) + \nu(t) + 2\nu(Y) = \nu(t) + 2\nu(Y) - \nu(Y),\\
&\nu(u) + \nu(Y) = \nu(t) + 2\nu(Y),
\end{aligned}$$

т. е. $\nu(u) + \nu(Y) = \nu(Y) + \nu(u)$, противоречие.

Случай 2: $\nu(uY) = \nu(tY^2)$. Так как $\nu(Yt) = \nu(tY)$, получаем

$$\begin{aligned}
&\nu(u) + \nu(Y) = \nu(t) + 2\nu(Y),\\
&\nu(u) = \nu(t) + 2\nu(Y) - \nu(Y) = -\nu(Y) + \nu(t) + 2\nu(Y),\\
&\nu(Y) + \nu(u) = \nu(t) + 2\nu(Y),
\end{aligned}$$

т. е. $\nu(u) + \nu(Y) = \nu(Y) + \nu(u)$, противоречие.

Случай 3: $\nu(uY) < \nu(tY^2)$. Тогда по принципу доминирования $\nu(Yu) = \nu(uY)$, противоречие. Итак, во всех случаях мы приходим к противоречию. Следовательно, $\nu(Y) \in Z(\Gamma)$. □

Замечание 4.8. Опишем некоторые подалгебры тела частных жордановой плоскости. Во-первых, заметим, что алгебра $\Lambda_2(\mathbb{K})$ естественным образом вкладывается в кольцо $\mathbb{K}(Y)[X, \delta] \subset \mathbb{F}(\mathbb{K})$ косых многочленов Оре [12,13] над полем рациональных функций $\mathbb{K}(Y)$ с дифференцированием $\delta\Big(\frac{f(Y)}{g(Y)}\Big) = \Big(\frac{f(Y)}{g(Y)}\Big)' Y^2$, где $f, g \in \mathbb{K}[t]$, $g \neq 0$. Действительно, пусть $f, g \in \mathbb{K}[t]$, $g \neq 0$. По утверждению 2.1 $g(Y)X = Xg(Y) + g'(Y)Y^2$. В поле $\mathbb{F}(\mathbb{K})$ умножим это равенство на $\big(g(Y)\big)^{-1}$ слева:

$$X = \big(g(Y)\big)^{-1} X g(Y) + \big(g(Y)\big)^{-1} g'(Y) Y^2.$$

Полученное равенство умножим на $\big(g(Y)\big)^{-1}$ справа:

$$X\big(g(Y)\big)^{-1} = \big(g(Y)\big)^{-1} X - \Big(\big(g(Y)\big)^{-1}\Big)' Y^2,$$

откуда

$$\big(g(Y)\big)^{-1} X = X\big(g(Y)\big)^{-1} + \Big(\big(g(Y)\big)^{-1}\Big)' Y^2.$$

Окончательно получаем

$$\frac{f(Y)}{g(Y)}X = f(Y)\big(g(Y)\big)^{-1}X = f(Y)X\big(g(Y)\big)^{-1} + f(Y)\Big(\big(g(Y)\big)^{-1}\Big)'Y^2 =$$
$$= (Xf(Y) + f'(Y)Y^2)\big(g(Y)\big)^{-1} + f(Y)\Big(\big(g(Y)\big)^{-1}\Big)'Y^2 = X\frac{f(Y)}{g(Y)} + \left(\frac{f(Y)}{g(Y)}\right)'Y^2.$$

Для элементов кольца $\mathbb{K}(Y)[X,\delta]$ естественным образом определяется $\deg_X$ — степень многочлена по X. Более того, в кольце $\mathbb{K}(Y)[X,\delta]$ можно (справа, слева) делить с остатком [13], т. е. для любых $w_1, w_2 \in \mathbb{K}(Y)[X,\delta]$, где $w_2 \neq 0$, существуют и единственны такие элементы $q_1, r_1, q_2, r_2 \in \mathbb{K}(Y)[X,\delta]$, что $w_1 = w_2q_1 + r_1 = q_2w_2 + r_2$, $\deg_X r_1, r_2 < \deg_X w_2$. Отметим также, что тело частных кольца $\mathbb{K}(Y)[X,\delta]$ совпадает с телом $\mathbb{F}(\mathbb{K})$.

Во-вторых, в теле частных $\mathbb{F}(\mathbb{K})$ рассмотрим подалгебру B, порождённую элементами 1, $-Y^{-1}$ и X^{-1}. Покажем, что B также является жордановой плоскостью. Для $-Y^{-1}$ и X^{-1} выполняются следующие соотношения:

$$YX = XY + Y^2, \quad X = Y^{-1}XY + Y, \quad XY^{-1} = Y^{-1}X + 1,$$
$$Y^{-1} = X^{-1}Y^{-1}X + X^{-1}, \quad Y^{-1}X^{-1} = X^{-1}Y^{-1} + X^{-2},$$
$$X^{-1}(-Y^{-1}) = (-Y^{-1})X^{-1} + X^{-2}.$$

Мономы $Y^{-m}X^{-n}$, $m, n \geqslant 0$, линейно независимы. Действительно, пусть

$$\alpha_1 Y^{-m_1}X^{-n_1} + \ldots + \alpha_k Y^{-m_k}X^{-n_k} = 0,$$

где $(m_i, n_i) \neq (m_j, n_j)$ при $i \neq j$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$. Пусть $m = \max(m_1, \ldots, m_k)$, $n = \max(n_1, \ldots, n_k)$. Тогда

$$Y^m(\alpha_1 Y^{-m_1}X^{-n_1} + \ldots + \alpha_k Y^{-m_k}X^{-n_k})X^n = 0,$$

откуда

$$\alpha_1 Y^{m-m_1}X^{n-n_1} + \ldots + \alpha_k Y^{m-m_k}X^{n-n_k} = 0,$$

где все мономы $Y^{m-m_i}X^{n-n_i} \in \Lambda_2(\mathbb{K})$ различны. Но в алгебре $\Lambda_2(\mathbb{K})$ эти мономы линейно независимы [15], следовательно, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. Далее, отображение $X \mapsto -Y^{-1}$, $Y \mapsto X^{-1}$, очевидно, продолжается до эпиморфизма $\eta\colon \Lambda_2(\mathbb{K}) \to B$. Пусть $w = \sum\limits_{i,j\geqslant 0} \alpha_{i,j}X^iY^j \in \ker\eta$. Тогда $\eta(w) = \sum\limits_{i,j\geqslant 0} (-1)^i\alpha_{i,j}Y^{-i}X^{-j} = 0$, откуда $\alpha_{i,j} = 0$ для любых i, j. Значит, $\ker\eta = 0$, η — изоморфизм, B — жорданова плоскость. Очевидно, тело частных алгебры B совпадает с телом $\mathbb{F}(\mathbb{K})$.

Утверждение 4.9. *Пусть $\nu\big(f(Y)\big) \in Z(\Gamma)$ для всех $f \in \mathbb{K}[t]$. Тогда группа Γ абелева.*

Доказательство. Предположим противное. Так как тело частных кольца $\mathbb{K}(Y)[X,\delta]$ совпадает с телом $\mathbb{F}(\mathbb{K})$, то существуют такие элементы $w \in \mathbb{K}(Y)[X,\delta]$, что $\nu(w) \notin Z(\Gamma)$. Среди всех таких элементов выберем элемент u, степень которого по X минимальна. Так как $\nu\big(f(Y)\big) \in Z(\Gamma)$ для всех $f \in \mathbb{K}[t]$, то $\deg_X u \geqslant 1$. Существуют такие элементы $s \in \mathbb{K}(Y)[X,\delta]$, что $\nu(us) \neq \nu(su)$. Среди всех таких элементов выберем элемент t, степень которого по X минимальна. Очевидно, $\deg_X t \geqslant \deg_X u$. В кольце $\mathbb{K}(Y)[X,\delta]$ поделим справа t на u с остатком: $t = uq_0 + r_0$. Далее, поделим справа q_0 на u с остатком: $q_0 = uq_1 + r_1$, $t = u^2q_1 + ur_1 + r_0$. Далее делим справа q_1 на u с остатком и т. д. Окончательно получаем, что $t = u^n r_n + u^{n-1}r_{n-1} + \ldots + ur_1 + r_0$, где $r_n \neq 0$ и $\deg_X r_i < \deg_X u$, т. е. либо $r_i = 0$, либо $\nu(r_i) \in Z(\Gamma)$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $\nu(u^i r_i) = \nu(u^j r_j)$ для некоторых $n \geqslant i > j \geqslant 0$, $r_i r_j \neq 0$. Тогда $(i-j)\nu(u) = \nu(r_j) - \nu(r_i) \in Z(\Gamma)$ и по утверждению 3.3 $\nu(u) \in Z(\Gamma)$, противоречие.

Случай 2: все значения $\nu(u^j r_j)$, где $n \geqslant j \geqslant 0$, $r_j \neq 0$, различны. Тогда по принципу доминирования $\nu(t) = \nu(u^i r_i)$ для некоторого i, такого что $r_i \neq 0$. Но тогда $\nu(tu) = \nu(ut)$, противоречие.

Итак, в обоих случаях мы приходим к противоречию. Следовательно, группа Γ абелева. □

Утверждение 4.10. *Пусть $\nu(Y) \neq 0$. Тогда группа Γ абелева.*

Доказательство. По утверждению 4.7 $\nu(Y) \in Z(\Gamma)$. Рассмотрим произвольный ненулевой многочлен $f(Y) = a_n Y^n + \ldots + a_m Y^m \in \mathbb{K}[Y]$, где $n \leqslant m$, $a_n a_m \neq 0$. Если $\nu(Y) > 0$, то $\nu(a_n Y^n) < \nu(a_k Y^k)$ для всех $k > n$, $a_k \neq 0$. Тогда по принципу доминирования $\nu\big(f(Y)\big) = n\nu(Y) \in Z(\Gamma)$. Если $\nu(Y) < 0$, то $\nu(a_m Y^m) < \nu(a_k Y^k)$ для всех $k < m$, $a_k \neq 0$, и по принципу доминирования $\nu\big(f(Y)\big) = m\nu(Y) \in Z(\Gamma)$. Итак, $\nu\big(f(Y)\big) \in Z(\Gamma)$ для всех $f \in \mathbb{K}[t]$. Тогда по утверждению 4.9 группа Γ абелева, что и требовалось доказать. □

Теперь мы можем доказать основной результат этой работы.

Теорема 4.11. *Любое нормирование тела частных жордановой плоскости над полем произвольной характеристики является абелевым.*

Доказательство. Сначала рассмотрим жорданову плоскость над полем положительной характеристики. В этом случае алгебра $\Lambda_2(\mathbb{K})$ является конечно порождённой над своим центром и по утверждению 3.4 все нормирования тела частных жордановой плоскости абелевы. Поэтому далее мы будем считать, что $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$. Пусть Γ — линейно упорядоченная группа, $\nu\colon \mathbb{F}(\mathbb{K}) \to \Gamma$ — нормирование. Если $\nu(Y) \neq 0$, то по утверждению 4.10 группа Γ абелева. Пусть теперь $\nu(Y) = 0$. По утверждению 4.1 либо $\nu(Y) = \nu(X) = 0$, либо $\nu(X) < \nu(Y) = 0$. В первом случае по утверждению 4.4 $\Gamma = 0$. Пусть $\nu(X) < \nu(Y) = 0$. По замечанию 4.8 подалгебра $B \subset \mathbb{F}(\mathbb{K})$, порождённая элементами 1, $-Y^{-1}$ и X^{-1}, является жордановой плоскостью, причём тело частных алгебры B совпадает с $\mathbb{F}(\mathbb{K})$ и для порождающих $-Y^{-1}$ и X^{-1} имеет место неравенство $\nu(-Y^{-1}) = 0 < \nu(X^{-1})$. Тогда по утверждению 4.10 группа Γ абелева, что и требовалось доказать. □

Литература

[1] Артамонов В. А. Квантовая проблема Серра // Успехи мат. наук. — 1998. — Т. 53, № 4. — С. 3—76.

[2] Головашкин А. В., Максимов В. М. Алгебры косых полиномов, порождаемые квадратичными однородными соотношениями // Зап. науч. сем. ПОМИ РАН. — 2003. — Т. 301. — С. 144—171.

[3] Пирс Р. Ассоциативные алгебры. — М.: Мир, 1986.

[4] Херстейн И. Некоммутативные кольца. — М.: Мир, 1972.

[5] Шириков Е. Н. Жорданова плоскость над полем положительной характеристики // Мат. заметки. — В печати.

[6] Artamonov V. A. Valuations on quantum fields // Comm. Algebra. — 2001. — Vol. 29, no. 9. — P. 3889—3904.

[7] Artamonov V. A. Automorphisms and derivations of quantum polynomials // Recent Advances in Lie Theory. Vol. 25 / I. Bajo, E. Sanmartin, eds. — Heldermann Verlag, 2002. — P. 109—120.

[8] Artamonov V. A. Actions of Hopf algebras on general quantum Mal'tsev power series and quantum planes // J. Math. Sci. — 2006. — Vol. 134, no. 1. — P. 1773—1798.

[9] Brown K. A., Goodearl K. A. Lectures on Algebraic Quantum Groups. — Basel: Birkhäuser, 2002.

[10] Dumas F., Rigal L. Prime spectrum and automorphisms for 2×2 Jordanian matrices // Comm. Algebra. — 2002. — Vol. 30, no. 6. — P. 2805—2828.

[11] Jategaonkar V. A. A multiplicative analog of the Weyl algebra // Comm. Algebra. — 1984. — Vol. 14, no. 12. — P. 1669—1688.

[12] McConnell J. C., Robson J. C. Noncommutative Noetherian Rings. — New York: John Miley & Sons, 1987.

[13] Ore O. Theory of non-commutative polynomials // Ann. Math. (2). — 1933. — Vol. 34. — P. 480—508.

[14] Praton I. Primitive ideals of Noetherian down-up algebras // Comm. Algebra. — 2004. — Vol. 32, no. 2. — P. 443—471.

[15] Shirikov E. N. Two-generated graded algebras // Algebra Discrete Math. — 2005. — Vol. 3. — P. 64—80.

[16] Stafford J. T., Zhang J. J. Examples in non-commutative projective geometry // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1994. — Vol. 116, no. 3. — P. 415—433.