Малые абелевы группы

И. В. ГЕРДТ
Томский государственный университет

УДК 512.541

Ключевые слова: малая группа, прямая сумма, прямое произведение, базисная подгруппа.

Аннотация

В работе изучаются свойства малых абелевых групп и даётся полное описание малых и D-малых групп, где D — класс всех делимых групп.

Abstract

I. V. Gerdt, Small Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 3, pp. 3—8.

We study properties of small Abelian groups and present a complete description of small and D-small Abelian groups, where D is the class of all divisible groups.

При исследовании групп гомоморфизмов абелевой группы A в абелеву группу B большой интерес представляют гомоморфизмы в прямые суммы и прямые произведения и гомоморфизмы из прямых сумм и прямых произведений. В [2] доказано, что существует естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}\Big(A, \prod_{i\in I} B_i\Big) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(A, B_i).$$

Если же взять группы гомоморфизмов $\mathrm{Hom}\Big(A, \bigoplus\limits_{i\in I} B_i\Big)$ и $\bigoplus\limits_{i\in I} \mathrm{Hom}(A, B_i)$, то в общем случае изоморфизма нет. Можно лишь утверждать, что

$$\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(A, B_i) \subset \mathrm{Hom}\Big(A, \bigoplus_{i\in I} B_i\Big) \subset \mathrm{Hom}\Big(A, \prod_{i\in I} B_i\Big) = \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(A, B_i).$$

Возникает естественный вопрос: для каких абелевых групп A будет существовать изоморфизм

$$\mathrm{Hom}\Big(A, \bigoplus_{i\in I} B_i\Big) \cong \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(A, B_i)?$$

Пусть K — некоторый класс абелевых групп. Абелеву группу A назовём *малой относительно* K или K*-малой*, если для любого семейства групп $\{B_i\}_{i\in I}$, где каждая группа B_i принадлежит K, выполняется

$$\operatorname{Hom}\Big(A, \bigoplus_{i\in I} B_i\Big) \cong \bigoplus_{i\in I} \operatorname{Hom}(A, B_i).$$

Последнее равносильно тому, что для любого гомоморфизма $\varphi\colon A \to \bigoplus_{i\in I} B_i$ найдутся индексы $i_1, \dots, i_k \in I$, такие что $\varphi A \subset B_{i_1} \oplus \ldots \oplus B_{i_k}$.

Если класс K совпадает с классом всех абелевых групп, то K-малую группу A будем называть *малой*.

Заметим, что введённое определение малой абелевой группы согласуется с определением из [1] малого объекта в категории с копроизведениями.

Теорема 1. *Для группы A эквивалентны следующие условия*:

1) *A — малая группа относительно K*;
2) *если A содержится в прямой сумме групп B_i, $B_i \in K$, то A содержится в прямой сумме конечного числа этих групп*;
3) *если $A \oplus H = \bigoplus_{i\in I} B_i$, $B_i \in K$, то существует такое конечное подмножество $J \subset I$, что $A \subset \bigoplus_{i\in J} B_i$.*

Доказательство. Для доказательства импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) достаточно в качестве φ взять тождественное вложение.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидна.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть φ — гомоморфизм из A в $\bigoplus_{i\in I} B_i$. Определим отображение

$$\psi\colon A \to A \oplus \Big(\bigoplus_{i\in I} B_i\Big)$$

(рассматривается внешняя прямая сумма) формулой $\psi(a) = \big(a, \varphi(a)\big)$. Отображение ψ — мономорфизм. Тогда

$$A \oplus \Big(\bigoplus_{i\in I} B_i\Big) = \psi(A) \oplus \Big(\bigoplus_{i\in I} B_i\Big),$$

а так как $\psi(A) \cong A$, то условие 3) выполняется, следовательно, существует конечное подмножество J, такое что

$$\psi(A) \subset A \oplus \Big(\bigoplus_{i\in J} B_i\Big).$$

Поэтому $\varphi(A) \subset \bigoplus_{i\in J} B_i$. □

Утверждения леммы 2 следуют из определения K-малых групп.

Лемма 2.

1. *Любой эпиморфный образ K-малой группы является K-малой группой. (В частности, прямое слагаемое и фактор-группа K-малой группы являются K-малыми группами.)*
2. *Циклическая группа является малой группой.*

Пусть D — класс всех делимых абелевых групп. В следующей лемме выделяются некоторые классы групп, не являющихся D-малыми.

Лемма 3.

1. *Квазициклическая группа не является D-малой.*
2. *Ненулевая делимая периодическая группа не является D-малой.*

Доказательство. 1. Пусть C — квазициклическая группа (т. е. $C \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ для некоторого простого числа p), $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ — образующие группы C, где $pc_1 = 0$, $pc_2 = c_1, \ldots$, $pc_n = c_{n-1}, \ldots$. Пусть $B = \bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i$, где $B_i \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ для всякого $i \in I$, и пусть $a_{1i}, a_{2i}, \ldots$, $a_{ni}, \ldots$ — образующие группы B_i, $i \in I$, где $pa_{1i} = 0$, $pa_{2i} = a_{1i}, \ldots$, $pa_{ni} = a_{n-1,i}, \ldots$. Рассмотрим подгруппу L группы B, порождённую элементами $a_{11}, a_{21} + a_{12}, \ldots, a_{n1} + a_{n-1,2} + \ldots + a_{1n}, \ldots$. Имеем

$$\begin{aligned}
&p(a_{11}) = 0,\\
&p(a_{21} + a_{12}) = a_{11}, \ldots,\\
&p(a_{n1} + a_{n-1,2} + \ldots + a_{1n}) = a_{n-1,1} + \ldots + a_{1,n-1}, \ldots.
\end{aligned}$$

Значит, $L \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$, т. е. $L \cong B_i$ для любого $i \in I$. Гомоморфизм зададим следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\varphi(c_1) = a_{11},\\
&\varphi(c_2) = a_{21} + a_{12}, \ldots,\\
&\varphi(c_n) = a_{n1} + a_{n-1,2} + \ldots + a_{1n}, \ldots.
\end{aligned}$$

Получим, что $\varphi(C) = L$. Из строения L следует, что C не может содержаться в прямой сумме конечного числа групп B_i. Значит, C не является D-малой группой.

2. Предположим, что ненулевая делимая периодическая группа A является D-малой. Существует такое простое число p, что $A = \mathbb{Z}(p^\infty) \oplus \tilde{A}$. Тогда по лемме 2 $\mathbb{Z}(p^\infty)$ является D-малой группой, что противоречит пункту 1 данной леммы. $\square$

Теорема 4. *Пусть K — некоторый класс абелевых групп и $A = \bigoplus_{i \in I} C_i$, где для каждой группы C_i существует такая группа B_i из класса K, что* $\mathrm{Hom}(C_i, B_i) \neq 0$. *Группа A является K-малой тогда и только тогда, когда I — конечное множество и каждая группа C_i является K-малой.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} C_i$ — K-малая группа. Докажем, что I — конечное множество.

Для любого $i \in I$ выберем гомоморфизм $\varphi_i \in \mathrm{Hom}(C_i, B_i)$, такой что $\varphi_i \neq 0$. Гомоморфизм

$$\varphi \in \mathrm{Hom}\Big(A, \bigoplus_{i \in I} B_i\Big)$$

определим формулой $\varphi(a) = \varphi_{i_1} c_{i_1} + \ldots + \varphi_{i_k} c_{i_k}$, где $a = c_{i_1} + \ldots + c_{i_k}$, $i_m \in I$. Если I — бесконечное множество, то $\varphi(A)$ не будет содержаться в прямой сумме конечного числа прямых слагаемых B_i. Получили, что A не является K-малой группой. Следовательно, I — конечное множество.

Из леммы 2 вытекает, что каждая группа C_i K-малая.

Достаточность. Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — K-малые группы и $A = C_1 \oplus \ldots \oplus C_n$. Докажем, что A — K-малая группа.

Пусть дан гомоморфизм $\varphi\colon A \to \bigoplus\limits_{i\in I} B_i$, где $B_i \in K$ $(i \in I)$. Докажем, что образ φA содержится в некоторой сумме конечного числа слагаемых B_i.

Рассмотрим сужение гомоморфизма φ на C_j, полагая $\varphi_j = \varphi|_{C_j}\colon C_j \to \bigoplus\limits_{i\in I} B_i$ для любого $j = \overline{1,n}$. Так как $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — K-малые группы, их образы $\varphi_j(C_j)$ содержатся в прямой сумме конечного числа групп B_i, т. е. существуют такие конечные подмножества $I_1, I_2, \ldots, I_n$ множества I, что

$$\varphi_1(C_1) \subset \bigoplus_{i\in I_1} B_{i_1}, \ldots,\ \varphi_n(C_n) \subset \bigoplus_{i\in I_n} B_{i_n}.$$

Пусть $I^* = \bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j$. Рассмотрим образ φA группы A:

$$\varphi(A) = \varphi(C_1 \oplus \ldots \oplus C_n) = \varphi_1(C_1) + \ldots + \varphi_n(C_n) \subset \bigoplus_{i\in I^*} B_i.$$

Получили, что φA содержится в прямой сумме конечного числа групп B_i. Следовательно, A — K-малая группа. □

Так как для каждой ненулевой группы C_i имеем, что $\mathrm{Hom}(C_i, C_i) \neq 0$, из теоремы 4 вытекает следующий результат.

Теорема 5. *Пусть K — некоторый класс абелевых групп и $A = \bigoplus\limits_{i\in I} C_i$, где каждая группа C_i — ненулевая группа из класса K. Группа A является K-малой тогда и только тогда, когда I — конечное множество и каждая группа C_i является K-малой.*

Заметим, что в доказательстве достаточности теоремы 4 мы не использовали то, что каждая группа C_i связана с классом K, поэтому с учётом леммы 2 получаем следствие 6.

Следствие 6. *Пусть $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} C_i$ и K — некоторый класс абелевых групп. Группа A является K-малой тогда и только тогда, когда каждая группа C_i является K-малой.*

Непосредственно из теоремы 5 получаем следующие два следствия.

Следствие 7. *Пусть K — некоторый класс абелевых групп, замкнутый относительно прямых слагаемых, $A \in K$ и $A = \bigoplus\limits_{i\in I} C_i$, где каждая группа C_i*

ненулевая. Группа A является K-малой тогда и только тогда, когда I — конечное множество и каждая группа C_i является K-малой.

Следствие 8. *Пусть $A = \bigoplus_{i\in I} C_i$ — прямая сумма ненулевых групп C_i. Группа A является малой тогда и только тогда, когда I — конечное множество и каждая группа C_i является малой.*

Для получения полного описания D-малых и малых абелевых групп нам понадобится следующая лемма.

Лемма 9. *Пусть $\{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$ — максимальная независимая система элементов группы без кручения A ранга n и $F = \bigoplus_{i\in I}\langle a_i\rangle$. Тогда A/F — периодическая группа и $A/F = \bigoplus_p T_p$,* где $T_p = \mathbb{Z}(p^{i_{p,1}})\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}(p^{i_{p,n}})$, $0 \leqslant i_{p,1} \leqslant \ldots \leqslant i_{p,n} \leqslant \infty$.

Доказательство. Пусть $a + F \in A/F$. Так как $\{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$ — максимальная независимая система элементов группы без кручения A, то существуют целые числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$ и натуральное число k, такие что $ka = k_1a_1+\ldots+k_na_n$. Тогда $k(a + F) = F$. Значит, A/F — периодическая группа и её можно представить в виде прямой суммы p-компонент T_p: $A/F = \bigoplus_p T_p$.

Покажем, что ранг T_p не превосходит n. Пусть $b_1 + F, \ldots, b_s + F$ — независимая система элементов в группе T_p. Покажем, что система элементов $b_1, \ldots, b_s$ независима в группе A.

Предположим противное. Пусть существуют такие целые числа $k_1, \ldots, k_s$, не все равные нулю, что $k_1b_1 + \ldots + k_sb_s = 0$. Можно считать, что $(k_1, \ldots, k_s) = 1$. Имеем $k_1(b_1 + F) + \ldots + k_s(b_s + F) = F$ и, значит, $k_1(b_1 + F) = F, \ldots, k_s(b_s + F) = F$. Так как T_p — p-группа, получаем, что $k_i \,\vdots\, p$ для всякого $i = \overline{1,s}$. Это противоречит тому, что $(k_1, \ldots, k_s) = 1$. Значит, система элементов $b_1, \ldots, b_s$ независима в группе A. Следовательно, ранг группы T_p не превосходит n.

Пусть B_p — базисная подгруппа группы T_p. Так как $\mathrm{r}(B_p) \leqslant \mathrm{r}(T_p) \leqslant n$, то B_p — ограниченная группа. Учитывая, что B_p — сервантная подгруппа группы T_p, получаем [2, с. 140], что $T_p = B_p \oplus \tilde{B}_p$. Поскольку $\tilde{B}_p \cong T_p/B_p$, $\tilde{B}_p$ — делимая группа. Значит, группа T_p является прямой суммой циклических и квазициклических p-групп, поэтому её можно представить в виде $T_p = \mathbb{Z}(p^{i_{p,1}}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}(p^{i_{p,n}})$, где $0 \leqslant i_{p,1} \leqslant \ldots \leqslant i_{p,n} \leqslant \infty$. □

Теорема 10. *Следующие условия для абелевой группы A эквивалентны*:

1) *A — D-малая группа*;
2) *A — конечно порождённая группа*;
3) *A — малая группа.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть A — D-малая группа. Рассмотрим сначала случай, когда A является D-малой группой без кручения, и докажем, что она является конечно порождённой, т. е. а) A имеет конечный ранг; б) A является свободной группой.

Докажем утверждение а). Пусть $\{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$ — максимальная независимая система элементов группы A и $F = \bigoplus\limits_{i\in I}\langle a_i\rangle$. Рассмотрим делимую группу $L = \bigoplus\limits_{i\in I} Q_i$, где $Q_i \cong \mathbb{Q}$ для всякого $i \in I$ ($\mathbb{Q}$ — аддитивная группа всех рациональных чисел). Пусть гомоморфизм $\varphi\colon F \to L$ такой, что $\langle a_i\rangle$ изоморфно вкладывается в Q_i для всякого $i \in I$. Делимая группа инъективна, и поэтому гомоморфизм $\varphi\colon F \to L$ можно продолжить до гомоморфизма $\theta\colon A \to L$. Так как A — D-малая группа, то I — конечное множество. Следовательно, группа A имеет конечный ранг.

Докажем утверждение б). Рассмотрим фактор-группу A/F. По лемме 9 $A/F = \bigoplus\limits_p \big(\mathbb{Z}(p^{i_{p,1}}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}(p^{i_{p,n}})\big)$, где $0 \leqslant i_{p,1} \leqslant \ldots \leqslant i_{p,n} \leqslant \infty$. Эпиморфный образ A/F D-малой группы A по лемме 2 является также D-малой группой. Используя теорему 5 и лемму 3, получаем, что A/F — конечная группа. Следовательно, существует такое натуральное число m, что $mA \subset F$. Значит, mA является свободной группой. Так как $A \cong mA$, то A — свободная группа.

Рассмотрим теперь произвольную D-малую группу A. Пусть $\mathrm{T}(A)$ — её периодическая часть. Факторгруппа $A/\mathrm{T}(A)$ является D-малой группой без кручения. Выше мы доказали, что D-малая группа без кручения является свободной группой конечного ранга. Значит [2, с. 91], $A = \mathrm{T}(A) \oplus F$, где $F \cong A/\mathrm{T}(A)$ — свободная группа конечного ранга, и нам осталось показать, что $\mathrm{T}(A)$ — конечная группа. Группа $\mathrm{T}(A)$ представима в виде прямой суммы p-компонент T_p: $\mathrm{T}(A) = \bigoplus\limits_p T_p$. Для каждой p-компоненты T_p существует её делимая оболочка C_p. Так как $\mathrm{Hom}(T_p, C_p) \neq 0$, если $T_p \neq 0$, и $\mathrm{T}(A)$ — D-малая группа, то по теореме 4 она имеет конечное число ненулевых слагаемых T_p, являющихся D-малыми группами.

Пусть B_p — базисная подгруппа группы T_p. Группа B_p является прямой суммой циклических p-групп, и T_p/B_p — делимая периодическая группа, являющаяся D-малой группой, как эпиморфный образ D-малой группы T_p. Из леммы 3 следует, что $T_p/B_p = 0$, т. е. $T_p = B_p = \bigoplus\limits_{i\in I}\langle a_i\rangle$, где в силу теоремы 4 множество I конечно. Получили, что $\mathrm{T}(A)$ — конечная группа, а значит, A — конечно порождённая группа.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть A — конечно порождённая группа. Тогда $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{n}\langle a_i\rangle$ по [2, с. 96]. Пусть K — класс всех абелевых групп. Используя лемму 2 и следствие 8, получаем, что A является малой группой.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 1) очевидна. □

Литература

[1] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. — М.: Мир, 1977. — Т. 2.

[2] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974. — Т. 1.

Статья поступила в редакцию в мае 2006 г.