Гомоморфные образы абелевых групп

С. Я. ГРИНШПОН
Томский государственный университет
e-mail: grinshpon@ctc.tsu.ru

Т. А. ЕЛЬЦОВА
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
e-mail: yeltsova@yandex.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: гомоморфный образ, группа гомоморфизмов, кольцо эндоморфизмов, сепарабельная группа, жёсткая группа.

Аннотация

В статье для абелевых групп из некоторых классов даётся ответ на вопрос, когда объединение гомоморфных образов группы является подгруппой другой группы. В связи с этим вводится понятие гомоморфно устойчивой группы и исследуются свойства гомоморфно устойчивых групп из различных классов абелевых групп.

Abstract

S. Ya. Grinshpon, T. A. Yeltsova, Homomorphic images of Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 3, pp. 17—24.

For some classes of Abelian groups, we answer the question of when a union of homomorphic images of a group is a subgroup of another group. In connection with this, the concept of a homomorphically stable group is introduced and properties of homomorphically stable groups from different classes of Abelian groups are studied.

Хорошо известно, что пересечение любого множества подгрупп группы также является подгруппой этой группы. Однако объединение (теоретико-множественное) подгрупп группы не обязательно является подгруппой этой группы.

При изучении абелевых групп интерес представляет вопрос, в каких случаях объединение подгрупп со специальными свойствами (вполне характеристических, сервантных, гомоморфных образов фиксированной группы) является подгруппой.

Введём следующее определение.

Определение. Группу A назовём *гомоморфно устойчивой относительно группы* B, если объединение гомоморфных образов группы A в группе B является подгруппой группы B, т. е. если $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$ — подгруппа группы B.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 3, с. 17—24.

Везде далее в этой статье под группой будем понимать аддитивно записанную абелеву группу.

Покажем, что класс гомоморфно устойчивых групп замкнут относительно прямых сумм.

Теорема 1. *Пусть* $\{A_i\}_{i\in I}$ *— семейство групп, каждая из которых гомоморфно устойчива относительно группы* B. *Тогда группа* $\bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ *также гомоморфно устойчива относительно группы* B.

Доказательство. Пусть $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$, где A_i — гомоморфно устойчива относительно группы B для любого $i \in I$. Надо доказать, что $\bigcup\limits_{\alpha\in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$ является подгруппой группы B. Любой гомоморфизм α группы A в группу B представляется в виде $\alpha = (\ldots, \alpha_i, \ldots)$, где α_i — это ограничение гомоморфизма α на подгруппе A_i для всякого $i \in I$ [1, теорема 43.1]. Для любого элемента a из группы A, где $a = a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}$ ($i_j \in I$, $a_{i_j} \in A_{i_j}$, $j = \overline{1,k}$), имеем $\alpha a = \alpha_{i_1} a_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_k} a_{i_k}$. Пусть элементы c, d принадлежат множеству $\bigcup\limits_{\alpha\in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$, тогда существуют такие гомоморфизмы β и γ из $\mathrm{Hom}(A,B)$, что $c = \beta a$, $d = \gamma b$ для некоторых элементов a, b группы A. Представим элементы a и b в виде суммы координат (добавляя, если нужно, нулевые элементы, можно считать, что эти координаты берутся для a и b в одних и тех же группах A_i):

$$a = a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}, \quad b = b_{i_1} + \ldots + b_{i_k}.$$

Имеем

$$c = \beta a = \beta_{i_1} a_{i_1} + \ldots + \beta_{i_k} a_{i_k}, \quad d = \gamma b = \gamma_{i_1} b_{i_1} + \ldots + \gamma_{i_k} b_{i_k},$$

значит,

$$c - d = \beta a - \gamma b = (\beta_{i_1} a_{i_1} - \gamma_{i_1} b_{i_1}) + \ldots + (\beta_{i_k} a_{i_k} - \gamma_{i_k} b_{i_k}).$$

Так как каждая группа A_{i_j} является гомоморфно устойчивой относительно группы B, то для всякого $j = \overline{1,k}$ разность $\beta_{i_j} a_{i_j} - \gamma_{i_j} b_{i_j}$ принадлежит объединению $\bigcup\limits_{\alpha\in \mathrm{Hom}(A_{i_j},B)} \mathrm{Im}\,\alpha$. Следовательно, для каждого $j = \overline{1,k}$ существуют такие элемент $g_{i_j} \in A_{i_j}$ и гомоморфизм $\delta_{i_j} \in \mathrm{Hom}(A_{i_j}, B)$, что $\delta_{i_j} g_{i_j} = \beta_{i_j} a_{i_j} - \gamma_{i_j} b_{i_j}$. Следовательно, имеем

$$c - d = \beta a - \gamma b = \delta_{i_1} g_{i_1} + \ldots + \delta_{i_k} g_{i_k}.$$

Пусть π_i — проекция прямого произведения $\prod\limits_{i\in I} \mathrm{Hom}(A_i,B)$ на группу $\mathrm{Hom}(A_i,B)$. Выберем δ из $\prod\limits_{i\in I} \mathrm{Hom}(A_i,B)$ так, чтобы $\pi_{i_j}\delta = \delta_{i_j}$, если $j = \overline{1,k}$, и $\pi_i\delta = 0$ для всех остальных $i \in I$. По [1, теорема 43.1] элементу δ в силу изоморфизма $\prod\limits_{i\in I} \mathrm{Hom}(A_i,B) \cong \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus\limits_{i\in I} A_i, B\Big)$ соответствует гомоморфизм δ' группы $\bigoplus\limits_{i\in I} A_i$

в группу B, такой что для любого элемента $a \in A$ имеем $\delta' a = \sum\limits_{i \in I} \delta_i \pi'_i a$, где π'_i — проекция A на A_i. Пусть $g = g_{i_1} + \ldots + g_{i_k}$. Имеем $g \in A$ и $c - d = \delta' g$. Значит, $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$ — подгруппа группы B, и следовательно, группа $A = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$ является гомоморфно устойчивой относительно группы B. □

Покажем, что гомоморфная устойчивость группы A относительно группы B наследуется любым прямым слагаемым группы B.

Теорема 2. *Если группа A гомоморфно устойчива относительно группы B, то A гомоморфно устойчива относительно любого прямого слагаемого группы B.*

Доказательство. Пусть $B = B_1 \oplus B_2$. Покажем, что $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{Hom}(A,B_1)} \mathrm{Im}\,\alpha$ — подгруппа группы B_1. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{Hom}(A, B_1)$ и $a_1, a_2 \in A$. Так как B_1 — подгруппа группы B, то гомоморфизмы α_1, α_2 можно рассматривать как гомоморфизмы группы A в группу B. Из гомоморфной устойчивости группы A относительно группы B следует существование таких $\gamma \in \mathrm{Hom}(A, B)$ и $a \in A$, что $\gamma a = \alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2$, причём $\gamma a \in B_1$, так как $\alpha_1 a_1$ и $\alpha_2 a_2$ — элементы группы B_1. Пусть π — проекция B на B_1 и $\gamma_1 = \pi\gamma$. Имеем $\gamma_1 \in \mathrm{Hom}(A, B_1)$ и $\gamma_1 a = \gamma a$. Значит, $\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 = \gamma_1 a$, и поэтому группа A гомоморфно устойчива относительно группы B_1. □

Рассмотрим гомоморфную устойчивость относительно прямых произведений.

Группу A назовём *гомоморфно связанной с семейством групп* $\{B_i\}_{i \in I}$, если для любого семейства гомоморфизмов $\{\alpha_i\}_{i \in I}$, где $\alpha_i \in \mathrm{Hom}(A, B_i)$, и любого семейства $\{g_i\}_{i \in I}$ элементов группы A существуют такие элемент $g \in A$ и семейство гомоморфизмов $\{\delta_i\}_{i \in I}$ ($\delta_i \in \mathrm{Hom}(A, B_i)$), что $\alpha_i g_i = \delta_i g$ для всякого $i \in I$.

Заметим, что всякая циклическая группа гомоморфно связана с любым семейством групп.

Теорема 3. *Пусть A — группа, гомоморфно связанная с семейством групп $\{B_i\}_{i \in I}$. Группа A гомоморфно устойчива относительно группы $\prod\limits_{i \in I} B_i$ тогда и только тогда, когда A гомоморфно устойчива относительно каждой группы семейства $\{B_i\}_{i \in I}$.*

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы 2. Докажем достаточность. Пусть A — группа, гомоморфно связанная с семейством групп $\{B_i\}_{i \in I}$ и гомоморфно устойчивая относительно каждой группы B_i.

Рассмотрим гомоморфизмы из группы $\mathrm{Hom}\Big(A, \prod\limits_{i \in I} B_i\Big)$.

Пусть $\alpha \in \mathrm{Hom}\Big(A, \prod\limits_{i \in I} B_i\Big)$. Обозначим через π_i i-ю координатную проекцию $\prod\limits_{i \in I} B_i \to B_i$. Тогда в силу изоморфизма

$$\operatorname{Hom}\Big(A, \prod_{i\in I} B_i\Big) \cong \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}(A, B_i)$$

[1, теорема 43.2] гомоморфизм α можно отождествить с элементом $(\ldots, \alpha_i, \ldots)$ группы $\prod\limits_{i\in I} \operatorname{Hom}(A, B_i)$, где $\alpha_i = \pi_i\alpha$ ($\pi_i\alpha \in \operatorname{Hom}(A, B_i)$). Для всякого элемента $a \in A$ имеем $\pi_i(\alpha a) = \alpha_i a$, т. е. $\alpha a = (\ldots, \alpha_i a, \ldots)$.

Пусть элементы a, b принадлежат множеству $\bigcup\limits_{\alpha\in\operatorname{Hom}\left(A, \prod\limits_{i\in I} B_i\right)} \operatorname{Im}\alpha$, тогда существуют такие гомоморфизмы β и γ из $\operatorname{Hom}\Big(A, \prod\limits_{i\in I} B_i\Big)$, что $a = \beta c$, $b = \gamma d$ для некоторых элементов c, d из группы A.

Имеем $\beta c = (\ldots, \beta_i c, \ldots)$, $\gamma d = (\ldots, \gamma_i d, \ldots)$, где $\beta_i = \pi_i\beta$, $\gamma_i = \pi_i\gamma$.

Значит, $a-b = \beta c-\gamma d = (\ldots, \beta_i c-\gamma_i d, \ldots)$. Так как A является гомоморфно устойчивой относительно каждой группы B_i, то $\beta_i c - \gamma_i d \in \bigcup\limits_{\alpha\in\operatorname{Hom}(A,B_i)} \operatorname{Im}\alpha$. Следовательно, для любого индекса $i \in I$ существуют гомоморфизм $\alpha_i \in \operatorname{Hom}(A, B_i)$ и элемент $g_i \in A$, такие что $\beta_i c - \gamma_i d = \alpha_i g_i$.

Учитывая, что группа A гомоморфно связана с семейством групп $\{B_i\}_{i\in I}$, получаем, что существуют такие элемент $g \in A$ и семейство гомоморфизмов $\{\delta_i\}_{i\in I}$ ($\delta_i \in \operatorname{Hom}(A, B_i)$), для которых $\alpha_i g_i = \delta_i g$.

Рассмотрим гомоморфизм δ из группы $\operatorname{Hom}\Big(A, \prod\limits_{i\in I} B_i\Big)$, такой что $\pi_i\delta = \delta_i$. Тогда

$$a - b = (\ldots, \beta_i c - \gamma_i d, \ldots) = (\ldots, \alpha_i g_i, \ldots) = (\ldots, \delta_i g, \ldots) = \delta g.$$

Так как $\delta \in \operatorname{Hom}\Big(A, \prod\limits_{i\in I} B_i\Big)$, $g \in A$, то $\delta g \in \bigcup\limits_{\alpha\in\operatorname{Hom}\left(A, \prod\limits_{i\in I} B_i\right)} \operatorname{Im}\alpha$. Следовательно, $\bigcup\limits_{\alpha\in\operatorname{Hom}\left(A, \prod\limits_{i\in I} B_i\right)} \operatorname{Im}\alpha$ — подгруппа группы $\prod\limits_{i\in I} B_i$. Значит, группа A является гомоморфно устойчивой относительно группы $\prod\limits_{i\in I} B_i$. □

Нетрудно установить, что всякая группа гомоморфно устойчива относительно любой циклической группы. Поэтому из теоремы 3 вытекает следующий результат.

Следствие 4. *Всякая группа гомоморфно устойчива относительно прямого произведения циклических групп.*

Рассмотрим гомоморфную устойчивость *сепарабельных групп* [2, с. 7], т. е. групп, в которых каждое конечное подмножество элементов содержится в прямом слагаемом этой группы, являющемся прямой суммой групп ранга 1 (не обязательно без кручения).

Лемма 5. *Всякая группа ранга 1 гомоморфно устойчива относительно любой группы.*

Доказательство. Всякая группа ранга 1 изоморфна либо ненулевой подгруппе квазициклической группы $\mathbb{Z}(p^\infty)$ для некоторого простого числа p, либо ненулевой подгруппе группы $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел.

Пусть A — циклическая p-группа, B — произвольная группа, $a_1, a_2 \in \bigcup\limits_{\alpha\in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$. Тогда существуют такие гомоморфизмы $\beta, \gamma \in \mathrm{Hom}(A, B)$, что $a_1 = \beta b_1$ и $a_2 = \gamma b_2$ для некоторых элементов $b_1, b_2 \in A$. Так как элементы b_1, b_2 принадлежат группе A, то их можно представить в виде $b_1 = ka$, $b_2 = ma$, где a — образующий элемент группы A, а k и m — целые числа. Рассмотрим разность $a_1 - a_2$. Имеем

$$a_1 - a_2 = \beta b_1 - \gamma b_2 = \beta(ka) - \gamma(ma) = (k\beta - m\gamma)(a).$$

Поскольку $\beta, \gamma \in \mathrm{Hom}(A, B)$, разность $(k\beta - m\gamma)$ также принадлежит группе $\mathrm{Hom}(A, B)$. Обозначим эту разность через η. Тогда $a_1 - a_2 = \eta a$. Значит, $a_1 - a_2 \in \bigcup\limits_{\alpha\in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$, поэтому A является гомоморфно устойчивой относительно любой группы.

Если $A \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$, то, учитывая локальную цикличность группы A и проводя рассуждения, аналогичные приведённым выше, получим, что A — гомоморфно устойчива относительно любой группы.

Пусть A — группа без кручения ранга 1, B — произвольная группа, $a_1, a_2 \in \bigcup\limits_{\alpha\in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$. Тогда существуют такие гомоморфизмы β и γ из $\mathrm{Hom}(A, B)$, что $a_1 = \beta b_1$, $a_2 = \gamma b_2$ для некоторых элементов b_1, b_2 из группы A. Пусть b — некоторый ненулевой элемент группы A. Так как A — группа ранга 1, то существуют такие взаимно простые целые числа m и n, что $mb = nb_1$, и существуют такие взаимно простые целые числа k и l, что $kb = lb_2$. Элемент b делится на числа n и l, т. е. уравнения $nx = b$ и $lx = b$ разрешимы в группе A. Итак, $b_1 = m\frac{b}{n}$, $b_2 = k\frac{b}{l}$. Не умаляя общности, можно считать, что числа n и l натуральные. Пусть наименьшее общее кратное чисел n и l равно r и $\frac{r}{n} = n_1$, $\frac{r}{l} = l_1$ $(n_1, l_1 \in \mathbb{N})$. Так как элемент b делится на n и на l, то элемент b делится на r. Пусть $c = \frac{b}{r}$. Тогда $b_1 = mn_1c$, $b_2 = kl_1c$. Имеем

$$a_1 - a_2 = \beta(b_1) - \gamma(b_2) = \beta(mn_1c) - \gamma(kl_1c) = (mn_1\beta - kl_1\gamma)(c).$$

Так как гомоморфизмы β и γ принадлежат группе $\mathrm{Hom}(A, B)$, то разность $mn_1\beta - kl_1\gamma$ также принадлежит этой группе. Значит, $a_1 - a_2 \in \bigcup\limits_{\alpha\in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$. Следовательно, группа A является гомоморфно устойчивой относительно любой группы. □

Теорема 6. *Всякая сепарабельная группа гомоморфно устойчива относительно любой группы.*

Доказательство. Пусть A — сепарабельная группа, B — произвольная группа и $c, d \in \bigcup\limits_{\alpha\in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$. Существуют такие гомоморфизмы $\beta, \gamma \in \mathrm{Hom}(A, B)$ и элементы $a_1, a_2 \in A$, что $c = \beta a_1$, $d = \gamma a_2$. Вкладываем элементы a_1 и a_2

в прямое слагаемое A_1 группы A, являющееся прямой суммой групп ранга 1 ($A = A_1 \oplus A_2$). Пусть β' — ограничение гомоморфизма β на A_1, а γ' — ограничение гомоморфизма γ на A_1. Имеем $c = \beta' a_1$, $d = \gamma' a_2$, где $\beta', \gamma' \in \mathrm{Hom}(A_1, B)$, и поэтому $c, d \in \bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{Hom}(A_1,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$. Так как по лемме 5 и теореме 1 группа A_1 гомоморфно устойчива относительно любой группы, то $c - d \in \bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{Hom}(A_1,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$. Следовательно, существуют $\delta' \in \mathrm{Hom}(A_1, B)$ и элемент $a_3 \in A_1$, такие что $c - d = \delta' a_3$. Рассмотрим гомоморфизм $\delta \in \mathrm{Hom}(A, B)$, действующий следующим образом: $\delta a = \delta' \pi a$ для всякого элемента $a \in A$, где π — проекция группы A на прямое слагаемое A_1. Имеем $c - d = \delta a_3$ и, значит, $c - d \in \bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$. Следовательно, группа A гомоморфно устойчива относительно любой группы. $\square$

Одним из важных классов групп без кручения является класс жёстких групп. Напомним определение жёсткой группы. Группа без кручения A называется *жёсткой*, если её группа эндоморфизмов $\mathrm{End}\,A$ изоморфна некоторой подгруппе группы $\mathbb{Q}$ [2, с. 148].

Для жёстких групп справедлив следующий результат.

Теорема 7. *Для жёсткой группы A эквивалентны следующие условия*:

1) *A гомоморфно устойчива относительно некоторой группы, содержащей прямое слагаемое, изоморфное $A \oplus A$*;
2) *A гомоморфно устойчива относительно любой группы без кручения*;
3) *A гомоморфно устойчива относительно любой группы*;
4) *ранг группы A не превосходит единицы.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 4). Доказательство проведём методом от противного. Пусть A — жёсткая группа, гомоморфно устойчивая относительно некоторой группы B, содержащей прямое слагаемое, изоморфное $A \oplus A$. Предположим, что $\mathrm{r}(A) > 1$. Тогда по теореме 2 группа A гомоморфно устойчива относительно группы $B_1 = A \oplus A$. Имеем

$$\mathrm{Hom}(A, B_1) \cong \mathrm{End}\,A \oplus \mathrm{End}\,A. \qquad (*)$$

Пусть a и b — линейно независимые элементы группы A и $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}(A, B_1)$. Тогда αa, βb принадлежат $\bigcup\limits_{\gamma \in \mathrm{Hom}(A,B_1)} \mathrm{Im}\,\gamma$. Учитывая, что A — жёсткая группа, по формуле $(*)$ получаем $\alpha a = \left(\frac{m}{n}a, \frac{k}{l}a\right)$, $\beta b = \left(\frac{r}{t}b, \frac{v}{w}b\right)$, где $m, k, r, v \in \mathbb{Z}$, $n, t, l, w \in \mathbb{N}$. Имеем

$$\alpha a - \beta b = \left(\frac{m}{n}a - \frac{r}{t}b, \frac{k}{l}a - \frac{v}{w}b\right).$$

С другой стороны, разность $\alpha a - \beta b$ принадлежит $\bigcup\limits_{\gamma \in \mathrm{Hom}(A,B_1)} \mathrm{Im}\,\gamma$ (так как группа A является гомоморфно устойчивой относительно группы $B_1 = A \oplus A$).

Значит, существует такой элемент c группы A, что $\alpha a - \beta b = \delta(c) = \left(\frac{x}{y}c, \frac{z}{u}c\right)$, где $x, z \in \mathbb{Z}$, $y, u \in \mathbb{N}$. Отсюда имеем

$$\frac{m}{n}a - \frac{r}{t}b = \frac{x}{y}c, \tag{1}$$

$$\frac{k}{l}a - \frac{v}{w}b = \frac{z}{u}c. \tag{2}$$

Приводя каждое из этих равенств к общему знаменателю и вычитая одно из другого, получаем

$$(m'z' - k'x')a + (v'x' - r'z')b = 0, \tag{3}$$

где $m' = mty$, $r' = rny$, $x' = xnt$, $k' = kwu$, $v' = vlu$, $z' = zlw$.

Какова бы ни была подгруппа Q' группы $\mathbb{Q}$, которой изоморфна группа $\mathrm{End}(A)$, числа $\frac{m}{n}$, $\frac{k}{l}$, $\frac{r}{t}$, $\frac{v}{w}$, принадлежащие Q', можно выбрать так, что $\frac{m}{n} \cdot \frac{v}{w} \neq \frac{k}{l} \cdot \frac{r}{t}$. Это гарантирует нам выполнение неравенств $m'z' - k'x' \neq 0$ и $v'x' - r'z' \neq 0$. Из равенства (3) вытекает, что элементы a и b линейно зависимы. Противоречие. Следовательно, ранг группы A не превосходит 1.

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 3). Если $\mathrm{r}(A) = 0$, т. е. A — нулевая группа, то утверждение тривиально. Пусть A — жёсткая группа ранга 1. Применяя лемму 5, получаем, что группа A гомоморфно устойчива относительно любой группы.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 2) очевидна.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть группа A гомоморфно устойчива относительно любой группы без кручения. Так как группа A жёсткая, то группа $A \oplus A$ является группой без кручения. Следовательно, группа A гомоморфно устойчива относительно группы $A \oplus A$. □

С помощью теоремы 7 удаётся строить примеры групп без кручения, которые не являются гомоморфно устойчивыми, но имеют гомоморфно устойчивые подгруппы.

Теорема 8. *Для всякого натурального числа n, отличного от единицы, существует группа без кручения ранга n, не являющаяся гомоморфно устойчивой относительно некоторой группы, но всякая её подгруппа меньшего ранга является гомоморфно устойчивой относительно любой группы.*

Доказательство. Возьмём произвольное натуральное число $n \geqslant 2$. Для этого числа существует группа без кручения A ранга n со следующими свойствами: 1) все подгруппы группы A, имеющие ранг $n-1$, свободны; 2) кольцо эндоморфизмов группы A изоморфно группе $\mathbb{Z}$ [2, с. 153].

Пусть A' — произвольная подгруппа ранга k группы A, где $k < n$ и

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \text{ —} \tag{I}$$

линейно независимая система элементов группы A'. Вложим систему элементов (I) в максимальную линейно независимую систему элементов

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n \tag{II}$$

группы A. Рассмотрим систему элементов

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}. \tag{III}$$

Система (III) линейно независима, и поэтому подгруппа $A'' = \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle_*$ имеет ранг $n-1$. Имеем, что A'' — свободная подгруппа и $A' \subset A''$. Так как всякая подгруппа свободной группы свободна [1, теорема 14.5, с. 91], то A' — свободная группа. По теореме 6 A' гомоморфно устойчива относительно любой группы.

Рассмотрим группу A. Так как $\operatorname{End} A \cong \mathbb{Z}$, то группа A жёсткая. Ранг группы A больше 1, поэтому по теореме 7 группа A не является гомоморфно устойчивой относительно группы $A \oplus A$. $\square$

Литература

[1] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974. — Т. 1.

[2] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1977. — Т. 2.

Статья поступила в редакцию в мае 2006 г.