Факторно делимые группы ранга 1

О. И. ДАВЫДОВА
*Московский педагогический
государственный университет*

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, факторно делимая группа, группа без кручения, ранг.

Аннотация

Абелева группа называется факторно делимой, если она не содержит ненулевых периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу конечного ранга, фактор-группа по которой есть периодическая делимая группа. В работе получено описание факторно делимых групп ранга 1 с помощью кохарактеристик, а также описаны эндоморфизмы этих групп.

Abstract

O. I. Davydova, Rank-1 quotient divisible groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 3, pp. 25—33.

An Abelian group is called quotient divisible if it does not contain nonzero torsion divisible subgroups, but does contain a free finite-rank subgroup such that the quotient group by it is divisible. In this paper, we will describe rank-1 quotient divisible groups with the help of cocharacteristics, and we will describe the endomorphisms of these groups as well.

Факторно делимые группы без кручения были введены в 1961 г. Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом [2]. В 1998 г. в [3] А. А. Фомин и У. Уиклесс определили смешанные факторно делимые группы конечного ранга и доказали, что категории смешанных факторно делимых групп и групп без кручения конечного ранга с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов двойственны.

В группах без кручения конечного ранга важную роль играют группы ранга 1, так как к ним сводятся многие решаемые в этом классе задачи. Группы без кручения ранга 1 — хорошо изученный класс групп, имеющий полное описание с помощью типов. С учётом двойственности изучение факторно делимых групп также во многом должно опираться на сведения о факторно делимых группах ранга 1. Именно этому классу и посвящена данная работа. Основными результатами является теоремы 1, 2 и 4, а также следствия из них. В частности, нами получено описание факторно делимых групп ранга 1 с точностью до изоморфизма, которое аналогично описанию групп без кручения ранга 1, но имеет и существенное отличие.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 3, с. 25—33.

Под группой в данной статье подразумевается абелева группа, записанная аддитивно. Через $t(A)$ и $t_p(A)$ будем обозначать периодическую часть группы A и её p-примарную компоненту соответственно. $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ — множество всех простых чисел, $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел. Через $\mathbb{Z}$ и $\hat{Z}_p$ будем обозначать кольца (аддитивные группы) целых и целых p-адических чисел соответственно, $\mathrm{End}(A)$ и $\mathrm{E}(A)$ — группа и кольцо эндоморфизмов группы A. Остальные понятия и обозначения стандартны и соответствуют [1].

Определение 1. Для элемента a из группы A и простого числа p определим m_p как наименьшее целое неотрицательное число, такое что элемент $p^{m_p}a$ делится на любую степень p в группе A. Если такого числа не существует, полагаем $m_p = \infty$. Характеристика $(m_{p_1}, m_{p_2}, \ldots, m_{p_n}, \ldots)$ называется кохарактеристикой элемента a в группе A и обозначается $\mathrm{cochar}(a)$. Тип, содержащий характеристику (m_p), называется котипом элемента a и обозначается $\mathrm{cotype}(a)$.

Положим две кохарактеристики (m_p) и (k_p) равными тогда и только тогда, когда $m_p = k_p$. Аналогично $(m_p) \geqslant (k_p)$ тогда и только тогда, когда $m_p \geqslant k_p$. Множество всех характеристик превращается в решётку относительно покомпонентных операций:

$$(m_p) \wedge (k_p) = (\min\{m_p, k_p\}), \quad (m_p) \vee (k_p) = (\max\{m_p, k_p\}).$$

Следующие свойства кохарактеристик и котипов элементов следуют очевидным образом из определения.

1. $\mathrm{cochar}(-a) = \mathrm{cochar}(a)$ для всех a из группы A.
2. Пусть $\mathrm{cochar}(a) = (m_p)$. Если $m_{p_i} = 0$, то $\mathrm{cochar}(p_i a) = \mathrm{cochar}(a)$, иначе $\mathrm{cochar}(p_i a) = (m_{p_1}, m_{p_2}, \ldots, m_{p_i} - 1, \ldots)$ (мы полагаем $\infty - 1 = \infty$).
3. $\mathrm{cochar}(b + c) \leqslant \mathrm{cochar}(b) \vee \mathrm{cochar}(c)$ для всех $b, c \in A$.
4. Для всякого гомоморфизма $f\colon A \to B$ и любого $a \in A$ имеет место неравенство $\mathrm{cochar}_A(a) \geqslant \mathrm{cochar}_B\bigl(f(a)\bigr)$.
5. Если $mb = nc$ для ненулевых целых m и n, то $\mathrm{cotype}(b) = \mathrm{cotype}(c)$.

Определение 2 ([3]). Группа A называется факторно делимой, если она не содержит ненулевых периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что A/F — периодическая делимая группа.

Линейно независимую систему элементов $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, порождающую группу F, будем называть базисом факторно делимой группы A, а ранг группы F — рангом факторно делимой группы A.

Лемма 1. *Пусть A — факторно делимая группа ранга 1 с базисом $\{x\}$. Если простое число p делит элемент x, то группа A является p-делимой.*

Доказательство. Пусть $F = \langle x \rangle$ — такая свободная подгруппа группы A, что A/F — периодическая делимая группа. Для любого элемента $a \in A$ существует $b \in A$, для которого $a + F = pb + F$ или $a = pb + mx$ для некоторого целого m.

Так как элемент x делится на p, то из последнего равенства следует, что a делится на p. Тогда в силу произвольности выбора элемента $a \in A$ получаем, что A является p-делимой. $\square$

Лемма 2 ([3]). *Пусть A — факторно делимая группа. Тогда p-примарная компонента $t_p(A)$ периодической части группы A выделяется прямым слагаемым в A, $A = t_p(A) \oplus A'_p$, где группа A'_p не имеет элементов порядка p.*

Пусть A — произвольная факторно делимая группа ранга 1 с базисом $\{x\}$ и $\operatorname{cochar}(x) = (m_p)$. Если $m_p = 0$ для некоторого простого числа p, то по лемме 1 получаем, что A является p-делимой группой и, значит, $t_p(A) = 0$. Если $m_p = \infty$ для некоторого простого p, то также $t_p(A) = 0$, т. е. A — группа без p-кручения. Таким образом, факторно делимая группа A ранга 1 является группой без кручения тогда и только тогда, когда характеристика её базисного элемента состоит только из символов 0 и ∞.

Лемма 3. *Пусть A — факторно делимая группа ранга 1 с базисом $\{x\}$ и $\operatorname{cochar}(x) = (m_p)$. Для любого простого числа p, такого что $0 < m_p < \infty$, p-примарная компонента $t_p(A)$ периодической части группы A является циклической группой порядка p^{m_p}. Более того, в прямом разложении $A = t_p(A) \oplus A'_p$ группа A'_p является p-делимой группой без p-кручения и $A'_p = p^{m_p+s}A$ для любого целого неотрицательного числа s. В частности, подгруппа A'_p определена однозначно.*

Доказательство. Рассмотрим p-базис группы A (см. [1, § 32]). Так как $0 < m_p < \infty$, то он состоит из одного элемента v_p. Покажем, что $t_p(A) = \langle v_p \rangle$. Предположим, что существует такой элемент $z_1 \in t_p(A)$, порядок которого строго больше порядка элемента v_p, $\mathrm{o}(z_1) = p^l$, $\mathrm{o}(v_p) = p^r$. Так как $A/\langle v_p \rangle$ является p-делимой группой, то найдутся такие ненулевые элементы $z_1, z_2, \ldots \in A$, что

$$z_1 = p^l z_2 + a_1 v_p, \quad z_2 = p^l z_3 + a_2 v_p, \ldots,$$

где $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим элементы

$$w_1 = z_1 - a_1 v_p = p^l z_2, \quad w_2 = z_2 - a_2 v_p = p^l z_3, \ldots.$$

Очевидно, что $p^l w_1 = 0$, $p^l w_2 = w_1$, $p^l w_3 = w_2, \ldots$. Таким образом, A содержит подгруппу типа p^∞, что противоречит определению факторно делимой группы. Следовательно, $l \leqslant r$. Так как $\langle v_p \rangle$ — p-базисная подгруппа группы A, то $A = \langle v_p \rangle + p^k A$ для всех $k \geqslant 0$. Элемент x представим в виде $x = \alpha v_p + p^k x_0$, где α не делится на p. Тогда $p^r x = p^{k+r} x_0$ для всех $k \geqslant 0$. Значит, элемент $p^r x$ делится на любую степень p, т. е. $m_p \leqslant r$. Предположим, что $p^{m_p} x \neq 0$. Из равенства $p^{m_p} x = \alpha p^{m_p} v_p + p^{2m_p} x_0$ имеем, что $\alpha p^{m_p} v_p$ делится на p^{2m_p}. Так как αp^{m_p} не делится на p^{2m_p}, получаем противоречие с определением p-базиса. Следовательно, порядок элемента v_p равен p^{m_p}. Возьмём любой элемент $z \in t_p(A)$. Так как $z = \beta v_p + p^{m_p} z_0$ или $z - \beta v_p = p^{m_p} z_0$, то $z = \beta v_p$. Значит, $t_p(A) = \langle v_p \rangle$.

Из равенства $A = \langle v_p \rangle + p^k A$ для всех $k \geqslant 0$ выводим, что $p^{m_p+s} A = p^{m_p+s+k} A$. Значит, $p^{m_p+s} A$ является p-делимой группой. Взяв $k = m_p + s$, получаем разложение

$$A = \langle v_p \rangle \oplus p^{m_p+s}A.$$

Данная сумма является прямой, так как $p^{m_p+s}A$ — p-делимая группа без p-кручения. □

Пусть A — факторно делимая группа ранга 1 с базисом $\{x\}$, $\mathrm{cochar}(x) = (m_p)$. Для простого p, такого что $0 < m_p < \infty$, p-базис группы A находится следующим образом. В группе A существует элемент x_1, для которого выполняется $p^{m_p}x = p^{2m_p+s}x_1$, где s — целое неотрицательное число. Введём обозначение $x_p = x - p^{m_p+s}x_1$. Отметим, что $\mathrm{o}(x_p) = \mathrm{o}(v_p)$, а значит, группу A можно представить в виде

$$A = \langle x_p \rangle \oplus p^{m_p+s}A.$$

Применяя лемму 3 несколько раз, получаем, что

$$A = t_{p_1}(A) \oplus \ldots \oplus t_{p_n}(A) \oplus A', \tag{1}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — такие простые числа, что $m_{p_i} < \infty$ для базисного элемента x и A' является p_i-делимой группой без p_i-кручения для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$.

Следствие 1. *Если x — базисный элемент факторно делимой группы A ранга 1, то $\mathrm{cochar}(x) \geqslant \mathrm{cochar}(a)$ для любого $a \in A$. В частности, кохарактеристики двух различных базисных элементов в группе A совпадают.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{cochar}(x) = (m_p)$ и $\mathrm{cochar}(a) = (k_p)$. Если $m_p = 0$ для некоторого простого числа p, то, применяя лемму 1, получаем $k_p = 0$. Если $0 < m_p < \infty$, то из разложения (1) следует, что любой элемент $a \in A$ представим в виде $a = \alpha x_p + p^{m_p}a_1$, где $\alpha \in \mathbb{Z}$ и $a_1 \in A$. Элемент $p^{m_p}a$ делится на любую степень p. Тогда, учитывая построение элемента x_p, получаем, что $m_p \geqslant k_p$. Случай $m_p = \infty$ очевиден. □

Определение 3. Для факторно делимой группы A ранга 1 будем называть кохарактеристику любого её базисного элемента кохарактеристикой группы A и обозначать $\mathrm{cochar}(A)$.

Теорема 1. *Пусть A — факторно делимая группа ранга 1 с базисным элементом x, B — произвольная факторно делимая группа и $y \in B$. Если $\mathrm{cochar}_A(x) \geqslant \mathrm{cochar}_B(y)$, то существует единственный гомоморфизм $f\colon A \to B$, такой что $f(x) = y$.*

Доказательство. В [3] показано, что p-примарная компонента $t_p(B)$ периодической части группы B конечна. Выберем $s \geqslant 0$ так, чтобы в $t_p(B)$ не было элементов порядка больше чем p^s.

Докажем сначала единственность такого гомоморфизма. Пусть f и g — гомоморфизмы, обладающие свойством $f(x) = g(x) = y$. Рассмотрим произвольный элемент $a \in A$. Так как ранг группы A равен 1, то для элемента $a \in A$ выполняется равенство $ka = mx$, где $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, k — наименьшее натуральное число, обладающее таким свойством. Положим $k = p_1^{r_1} \ldots p_n^{r_n}$. Рассмотрим кохарактеристику элемента x, $\mathrm{cochar}(x) = (m_p)$. Пусть $m_{p_i} = \infty$ для некоторого

$i = 1, \ldots, n$ и НОД$(k, m) = qp_i^t$, где q и p_i — взаимно простые числа. Если $t_i \neq 0$, то $k = k_1 p_i^{t_i}$ и $m = m_1 p_i^{t_i}$. Так как A — группа без p_i-кручения, то для элемента $a \in A$ выполняется равенство $k_1 a = m_1 x$. Но k — наименьшее число, для которого выполняется равенство $ka = mx$. Если $t_i = 0$, то существуют такие $u, v \in \mathbb{Z}$, что $kux + mvx = qx$. Так как kux и mvx делятся на $p_i^{r_i}$, то qx делится на $p_i^{r_i}$. Тогда x делится на p и по лемме 1 $m_{p_i} = 0$. Значит, $m_{p_i} < \infty$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим разложение (1) относительно простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

$$x = x_{p_1} + \ldots + x_{p_n} + p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_n^{m_{p_n}+s_n} x_1,$$
$$a = \alpha_1 x_{p_1} + \ldots + \alpha_n x_{p_n} + p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_n^{m_{p_n}+s_n} a_1.$$

Так как $ka = mx$, то

$$(k\alpha_i - m)x_{p_i} = 0, \quad kp_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_n^{m_{p_n}+s_n} a_1 = mp_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_n^{m_{p_n}+s_n} x_1$$

для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. По построению $p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_n^{m_{p_n}+s_n} x_1$ делится на любую степень числа p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в группе A', а значит, делится на k,

$$p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_n^{m_{p_n}+s_n} x_1 = k(p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_n^{m_{p_n}+s_n} x_2).$$

При этом элемент $p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_n^{m_{p_n}+s_n} x_2$ определён однозначно в группе A'. Тогда

$$p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_n^{m_{p_n}+s_n} a_1 = m(p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_n^{m_{p_n}+s_n} x_2). \tag{2}$$

Так как $\mathrm{cochar}_A(x) \geqslant \mathrm{cochar}_B(y)$, то $p_1^{m_{p_1}} \ldots p_n^{m_{p_n}} y$ делится на любую степень p_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$p_1^{m_{p_1}} \ldots p_n^{m_{p_n}} y = p_1^{2m_{p_1}+s_1} \ldots p_n^{2m_{p_n}+s_n} y_1,$$

или

$$p_1^{m_{p_1}} \ldots p_n^{m_{p_n}} (y - p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_n^{m_{p_n}+s_n} y_1) = 0.$$

Элемент $p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_n^{m_{p_n}+s_n} y_1$ в группе $p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_n^{m_{p_n}+s_n} B$ определён однозначно. Введём обозначение $y_0 = y - p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_n^{m_{p_n}+s_n} y_1$. Так как $y_0 \in t(B)$ и $p_1^{m_{p_1}} \ldots p_n^{m_{p_n}} y_0 = 0$, то $y_0 \in t_{p_1}(B) \oplus \ldots \oplus t_{p_n}(B)$. Значит,

$$y = y_{p_1} + \ldots + y_{p_n} + p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_n^{m_{p_n}+s_n} y_1,$$

где $y_{p_i} \in t_{p_i}(B)$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Заметим, что для любого гомоморфизма $f\colon A \to B$, такого что $f(x) = y$, выполняется $f(x_{p_i}) = y_{p_i}$ и

$$f(p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_n^{m_{p_n}+s_n} x_1) = p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_n^{m_{p_n}+s_n} y_1,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$. В самом деле,

$$y = f(x) = f(x_{p_1}) + \ldots + f(x_{p_n}) + f(p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_n^{m_{p_n}+s_n} x_1),$$
$$y = y_{p_1} + \ldots + y_{p_n} + p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_n^{m_{p_n}+s_n} y_1.$$

Тогда

$$y_{p_1}-f(x_{p_1})+\ldots+y_{p_n}-f(x_{p_n})=f(p_1^{m_{p_1}+s_1}\ldots p_n^{m_{p_n}+s_n}x_1)-p_1^{m_{p_1}+s_1}\ldots p_n^{m_{p_n}+s_n}y_1.$$

Отсюда следуют нужные соотношения. Таким образом, для любого элемента $a\in A$ справедливы равенства

$$f(a)=g(a)=\alpha_1 y_{p_1}+\ldots+\alpha_n y_{p_n}+m(p_1^{m_{p_1}+s_1}\ldots p_n^{m_{p_n}+s_n}y_2),$$

где

$$p_1^{m_{p_1}+s_1}\ldots p_n^{m_{p_n}+s_n}y_1=k(p_1^{m_{p_1}+s_1}\ldots p_n^{m_{p_n}+s_n}y_2).$$

Следовательно, если существует гомоморфизм $f\colon A\to B$, такой что $f(x)=y$, то он единственный.

Докажем существование такого гомоморфизма. Для произвольного элемента $a\in A$, удовлетворяющему равенству $ka=mx$, определим

$$f(a)=\alpha_1 y_{p_1}+\ldots+\alpha_n y_{p_n}+m(p_1^{m_{p_1}+s_1}\ldots p_n^{m_{p_n}+s_n}y_2), \tag{3}$$

где

$$p_1^{m_{p_1}+s_1}\ldots p_n^{m_{p_n}+s_n}y_1=k(p_1^{m_{p_1}+s_1}\ldots p_n^{m_{p_n}+s_n}y_2).$$

В силу сказанного выше построенное соответствие является отображением. Проверим, что данное отображение — гомоморфизм. Пусть для элементов $b,c\in\in A$ выполняются равенства $k_1b=m_1x$ и $k_2c=m_2x$, где $k_1,k_2\in\mathbb{N}$, $m_1,m_2\in\mathbb{Z}$, k_1,k_2 — наименьшие натуральные числа, обладающее такими свойствами, и $k_1k_2=p_1^{q_1}\ldots p_h^{q_h}$, $\text{НОК}(k_1,k_2)=k_1d_1$, $\text{НОК}(k_1,k_2)=k_2d_2$. Рассмотрим разложение (1) относительно простых чисел $p_1,p_2,\ldots,p_h$ (для элемента $y\in B$ существование такого разложения показано при доказательстве единственности):

$$x=x_{p_1}+\ldots+x_{p_h}+p_1^{m_{p_1}+s_1}\ldots p_h^{m_{p_h}+s_h}x_0,$$
$$y=y_{p_1}+\ldots+y_{p_h}+p_1^{m_{p_1}+s_1}\ldots p_h^{m_{p_h}+s_h}y_0.$$

Для элемента $b+c$ выполняется равенство $\text{НОК}(k_1,k_2)(b+c)=(m_1d_1+m_2d_2)x$. Имеем $p_1^{m_{p_1}+s_1}\ldots p_h^{m_{p_h}+s_h}x_0=\text{НОК}(k_1,k_2)(p_1^{m_{p_1}+s_1}\ldots p_h^{m_{p_h}+s_h}x_3)$,

$$p_1^{m_{p_1}+s_1}\ldots p_h^{m_{p_h}+s_h}x_0= \\ =k_1(d_1p_1^{m_{p_1}+s_1}\ldots p_h^{m_{p_h}+s_h}x_3)=k_2(d_2p_1^{m_{p_1}+s_1}\ldots p_h^{m_{p_h}+s_h}x_3).$$

Используя разложение (1) и равенство (2), получаем

$$b=\gamma_1x_{p_1}+\ldots+\gamma_hx_{p_h}+m_1(d_1p_1^{m_{p_1}+s_1}\ldots p_h^{m_{p_h}+s_h}x_3),$$
$$c=\lambda_1x_{p_1}+\ldots+\lambda_hx_{p_h}+m_2(d_2p_1^{m_{p_1}+s_1}\ldots p_h^{m_{p_h}+s_h}x_3),$$
$$b+c=(\gamma_1+\lambda_1)x_{p_1}+\ldots+(\gamma_h+\lambda_h)x_{p_h}+ \\ +(m_1d_1+m_2d_2)p_1^{m_{p_1}+s_1}\ldots p_h^{m_{p_h}+s_h}x_3.$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
&f(b) = \gamma_1 y_{p_1} + \ldots + \gamma_h y_{p_h} + m_1(d_1 p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_h^{m_{p_h}+s_h} y_3),\\
&f(c) = \lambda_1 y_{p_1} + \ldots + \lambda_h y_{p_h} + m_2(d_2 p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_h^{m_{p_h}+s_h} y_3),\\
&f(b+c) = (\gamma_1 + \lambda_1) y_{p_1} + \ldots + (\gamma_h + \lambda_h) y_{p_h} +\\
&\quad + (m_1 d_1 + m_2 d_2) p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_h^{m_{p_h}+s_h} y_3,
\end{aligned}
$$

где $p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_h^{m_{p_h}+s_h} y_0 = \text{НОК}(k_1, k_2)(p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_h^{m_{p_h}+s_h} y_3)$,

$$
\begin{aligned}
&p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_h^{m_{p_h}+s_h} y_0 =\\
&\qquad = k_1(d_1 p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_h^{m_{p_h}+s_n} y_3) = k_2(d_2 p_1^{m_{p_1}+s_1} \ldots p_n^{m_{p_h}+s_h} h_3).
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем, что $f(b+c) = f(b) + f(c)$. Следовательно, отображение f, определённое формулой (3), действительно является гомоморфизмом групп. □

Следствие 2. *Пусть A — факторно делимая группа ранга 1 с базисом $\{x\}$. Для любого элемента $y \in A$ существует единственный эндоморфизм f_y, такой что $f(x) = y$.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из следствия 1 и теоремы 1. □

Следствие 3. *Факторно делимая группа A ранга 1 изоморфна своей группе эндоморфизмов.*

Доказательство. Легко видеть, что отображение, которое ставит в соответствие каждому элементу $y \in A$ гомоморфизм f_y, является изоморфизмом групп A и $\mathrm{End}(A)$. □

Определение 4. Для элементов y, z факторно делимой группы A ранга 1 определим произведение элементов y и z следующим образом: $yz = f_y(z)$.

Из данного определения следует, что в факторно делимой группе A ранга 1 естественным образом возникает структура ассоциативного кольца. Легко видеть, что изоморфизм групп A и $\mathrm{End}(A)$ продолжается до изоморфизма колец A и $\mathrm{E}(A)$.

Теорема 2. *Две факторно делимые группы ранга 1 изоморфны тогда и только тогда, когда их кохарактеристики равны.*

Доказательство. Пусть A и B — факторно делимые группы ранга 1 с базисами $\{x\}$ и $\{y\}$ соответственно и $\mathrm{cochar}(A) = \mathrm{cochar}(B)$. По теореме 1 существуют единственные гомоморфизмы $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to A$, такие что $f(x) = y$ и $g(y) = x$. Рассмотрим гомоморфизм $gf\colon A \to A$ и тождественное отображение $\mathrm{id}_A\colon A \to A$. Так как $gf(x) = g\big(f(x)\big) = g(y) = x$ и $\mathrm{id}_A(x) = x$, то $gf = \mathrm{id}_A$. Аналогично доказывается, что $fg = \mathrm{id}_B$. Следовательно, группы A и B изоморфны. Обратное утверждение очевидно. □

Теорема 3. *Пусть A — факторно делимая группа ранга 1 кохарактеристики χ и B — произвольная факторно делимая группа, такая что выполняется* $\mathrm{cochar}(y) \leqslant \chi$ *для любого $y \in B$. Тогда* $\mathrm{Hom}\,(A, B) \cong B$.

Доказательство. Пусть x — базисный элемент группы A. Так как для любого элемента $y \in B$ выполняется $\mathrm{cochar}(y) \leqslant \chi$, из теоремы 1 следует существование единственного гомоморфизма $f_y\colon A \to B$, такого что $f(x) = y$. Легко видеть, что отображение, которое ставит в соответствие каждому гомоморфизму $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ элемент $y \in B$, такой что $f(x) = y$, является изоморфизмом. □

Пусть S — произвольное подмножество группы M. Группа $\langle S\rangle_*$, состоящая из всех таких элементов $x \in M$, что nx лежит в линейной оболочке $\langle S\rangle$ для некоторого целого ненулевого n, называется сервантной оболочкой S в M. В частности, $\langle S\rangle_*$ содержит все периодические элементы группы M.

Пусть $\chi = (m_p)$ — произвольная характеристика. Для каждого простого числа p возьмём кольцо K_p, где $K_p = \mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$, если $0 \leqslant m_p < \infty$, или $K_p = \hat{Z}_p$, если $m_p = \infty$. Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}_\chi = \prod\limits_{p \in P} K_p$, которое называется кольцом (целых) χ-адических чисел. Если тип $[\chi]$ отличен от нулевого типа, то определим кольцо $R^\chi = \langle 1\rangle_* \subset \mathbb{Z}\chi$. Если $[\chi] = 0$, то определим кольцо $R^\chi = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}\chi$.

Теорема 4. *Если A — факторно делимая группа ранга 1 кохарактеристики χ, то A изоморфна аддитивной группе кольца R^χ, а её кольцо эндоморфизмов* $\mathrm{E}(A)$ *изоморфно кольцу R^χ.*

Доказательство. Если $[\chi] = 0$, то, очевидно, R^χ является факторно делимой группой ранга 1 кохарактеристики χ. Тогда $R^\chi \cong A$ (по теореме 2).

Рассмотрим аддитивную группу кольца R^χ для $[\chi] \neq 0$. Из определения сервантной оболочки непосредственно следует, что $R^\chi/\langle 1\rangle$ является периодической группой. Покажем, что $R^\chi/\langle 1\rangle$ — делимая группа. Возьмём элемент $a = (\alpha_p) \in R^\chi$. Для каждого простого числа $q \neq p$ элемент α_p делится на q. Если $0 \leqslant m_p < \infty$, то $\alpha_p = a_0 + a_1 p + \ldots + a_{m_p - 1} p^{m_p - 1}$, и тогда $\alpha_p - a_0 1_p$ делится на p, где 1_p — единица кольца $\mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$. Аналогично, если $m_p = \infty$, то $\alpha_p = a_0 + a_1 p + \ldots + a_s p^s + \ldots \in \hat{Z}_p$, и тогда $\alpha_p - a_0 1_p$ делится на p. Получаем, что $a = pb + a_0 1$, где $b \in R^\chi$, следовательно, $a + \langle 1\rangle$ делится на любое простое число p, т. е. $R^\chi/\langle 1\rangle$ — делимая группа.

Так как $R^\chi \subset \prod\limits_{p \in P} K_p$, то R^χ не содержит делимых периодических подгрупп. Следовательно, R^χ является факторно делимой группой ранга 1. Очевидно, что $\mathrm{cochar}(R^\chi) = \chi$. Тогда из теоремы 2 следует, что $A \cong R^\chi$. Так как группы A и R^χ изоморфны, то изоморфны их кольца эндоморфизмов $\mathrm{E}(A)$ и $\mathrm{E}(R^\chi)$. Легко видеть, что $\mathrm{E}(R^\chi) \cong R^\chi$, а значит, $\mathrm{E}(A) \cong R^\chi$. □

Следствие 4. *Факторно делимая группа A ранга 1 является коммутативным кольцом с единицей относительно введённой в определении 4 операции умножения.*

Заметим, что если кохарактеристика любого элемента из факторно делимой группы B меньше или равна χ, то группа B превращается в R^χ-модуль. Действительно, из теоремы 3 следует, что $B \cong \mathrm{Hom}(R^\chi, B)$, а $\mathrm{Hom}(R^\chi, B)$ является модулем над кольцом $\mathrm{E}(R^\chi) \cong R^\chi$, следовательно, B является R^χ-модулем.

Литература

[1] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974, 1977. — Т. 1, 2.

[2] Beaumont R., Pierce R. Torsion-free rings // Illinois J. Math. — 1961. — Vol. 5. — P. 61—98.

[3] Fomin A. A., Wickless W. Quotient divisible Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — Vol. 126. — P. 45—52.

Статья поступила в редакцию в мае 2006 г.