# csp-кольца как обобщение колец псевдорациональных чисел

**Е. Г. ЗИНОВЬЕВ**
*Томский государственный университет*

УДК 512.553

**Ключевые слова:** идеал, фактор-кольцо, простые модули, csp-кольца.

**Аннотация**

Даётся описание идеалов и фактор-колец так называемых csp-колец. Рассматриваются также модули над такими кольцами.

**Abstract**

*E. G. Zinoviev, csp-rings as a generalization of rings of pseudo-rational numbers*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 3, pp. 35—38.

Ideals and factor rings of the so-called csp-rings are described, and modules over such rings are considered.

В теории абелевых групп в связи с изучением одного важного класса смешанных групп, а именно sp-групп, возникла идея sp-кольца. sp-группа (от слов «сумма» и «произведение») — это смешанная группа, лежащая между суммой и произведением своих $p$-компонент с некоторыми дополнительными свойствами. Всякая sp-группа является модулем над некоторым кольцом псевдорациональных чисел. Кольца псевдорациональных чисел ввели А. А. Фомин и П. А. Крылов [1—3]. Такой подход весьма полезен при изучении sp-групп. Изучение sp-колец интересно само по себе. Эти кольца обладают разнообразными любопытными свойствами. Их строение связано со строением конечномерных рациональных алгебр, в частности полей алгебраических чисел. В данной заметке изучаются csp-кольца, которые являются обобщением колец псевдорациональных чисел.

**Определение 1.** Пусть $P$ — некоторое бесконечное множество простых чисел. Для каждого $p \in P$ пусть $R_p = \mathbb{Z}_{p^k}$, где $k \in \mathbb{N}$, или $R_p = \hat{Z}_p$ (здесь $\mathbb{Z}_{p^k}$ — кольцо вычетов по модулю $p^k$, $\hat{Z}_p$ — кольцо целых $p$-адических чисел). Положим $K = \prod\limits_{p \in P} R_p$, $T = \bigoplus\limits_{p \in P} R_p$. Подкольцо $R$ кольца $K$ назовём csp-кольцом, если $T \subset R$ и $R/T$ — некоторое поле.

Отметим, что случай $R/T \cong \mathbb{Q}$ рассмотрен в [1—3].

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2007, том 13, № 3, с. 35—38.

Нетрудно вывести, что для произвольного идемпотента $e$ введённого кольца либо он сам является суммой единичных элементов некоторых колец $R_p$, либо $1 - e$ имеет подобное строение. Обозначим через $\varepsilon_p$ идемпотент кольца $R$, у которого $p$-я компонента равна 1, а все остальные компоненты равны 0.

Идеалы кольца $R$ допускают полное описание.

**Теорема 1.** *Пусть $I$ — идеал кольца $R$. Если $I \subset T$, то $I = \bigoplus_{p \in P} (I \cap R_p)$. Если $I \not\subset T$, то $I = eR \oplus \bigoplus_{p \in S} (I \cap R_p)$, где $e$ — идемпотент кольца $R$, $S$ — некоторое конечное множество простых чисел.*

**Доказательство.** Пусть $I$ — идеал кольца $R$. Если $I \subset T$, то очевидно, что $I = \bigoplus_{p \in P} (I \cap R_p)$. Пусть теперь $I \not\subset T$. Тогда $(I+T)/T$ — идеал в $R/T$. Учитывая, что $R/T$ — поле, получаем $(I + T)/T = R/T$, откуда $I + T = R$. Существуют такие $a \in I$, $b \in T$, что $a + b = 1$. Заметим, что $b$ имеет лишь конечное число координат, отличных от 0. Значит, координаты $a$ единичные, за исключением конечного их числа. Существует такой идемпотент $e \in R$, что единичные координаты элементов $e$ и $a$ совпадают. Можно записать $R$ в виде $R = eR \oplus (1-e)R$, откуда $I = (I \cap R_p) \oplus (I \cap (1-e)R)$. Учитывая, что $e \in I$, получаем, что $I \cap eR = eR$. Далее, $(1 - e)R$ можно представить в виде $(1 - e)R = \bigoplus_{p \in S} R_p$, где $S$ — некоторое конечное множество простых чисел. Значит, $I \cap (1-e)R = \bigoplus_{p \in S} (I \cap R_p)$. Окончательно получаем $I = eR \oplus \bigoplus_{p \in S} (I \cap R_p)$. Теорема доказана. □

Теорема 1 является обобщением результатов из [2, 3]. Отметим, что $T$ является максимальным идеалом кольца $R$.

Перейдём к рассмотрению фактор-колец кольца $R$. Если $I \not\subset T$, то по теореме 1 $I = eR \oplus \bigoplus_{p \in S} (I \cap R_p)$. Таким образом, $I = eR \oplus L$, где $L \subset T$. Кроме того, $R = eR \oplus (1 - e)R$ и $L \subseteq (1 - e)R$. Учитывая данное представление идеала $I$ и разложение кольца $R$, рассмотрим фактор-кольцо $R/I$. Нетрудно видеть, что $R/I \cong (1 - e)R/L$. Таким образом, изучение фактор-колец достаточно провести для случая, когда $I \subset T$.

**Теорема 2.** *Пусть $I$ — такой идеал кольца $R$, что $I \subset T$. Тогда возможны следующие три случая.*

1. *Если $I \subset R_{p_1} \oplus \ldots \oplus R_{p_n}$, где $n \in \mathbb{N}$, то*

$$R/I \cong R_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} R_{p_i}/I \cap R_{p_i},$$

   *где $R_1$ — некоторый идеал в $R$, являющийся прямым слагаемым.*
2. *Если $I \cap R_p \neq 0$ и $I \cap R_p \neq R_p$ для бесконечного множества чисел $p$ из $P$, то $R/I$ является csp-кольцом.*

3. *Если $I \cap R_p = R_p$ для почти всех чисел $p$ из $P$, то*

$$R/I = R/T \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} R_{p_i}/I \cap R_{p_i}.$$

**Доказательство.** Пусть $I$ — идеал кольца $R$ и $I \subset R_{p_1} \oplus \ldots \oplus R_{p_n}$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда $I = \bigoplus_{i=1}^{n}(I \cap R_{p_i})$, где $I \cap R_{p_i}$ — идеал кольца $R_{p_i}$. Кольцо $R$ можно представить в виде суммы $R = R_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^{n}(I \cap R_{p_i})$. Отсюда

$$R/I \cong R_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} R_{p_i} \Big/ \bigoplus_{i=1}^{n}(I \cap R_{p_i}),$$

и окончательно

$$R/I \cong R_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} R_{p_i}/I \cap R_{p_i}.$$

Докажем утверждение 2. Пусть $I$ — такой идеал кольца $R$, как в этом утверждении. Тогда $R/T \cong (R/I)/(T/I)$. Построим такое csp-кольцо $K'$, что $R/I$ — сервантное подкольцо в $K'$. Полагаем $R'_p = R_p/(I \cap R_p)$. Возможны следующие три случая:

1) $I \cap R_p = 0$, тогда $R'_p = R_p$;
2) $I \cap R_p = R_p$, тогда $R'_p = 0$;
3) $I \cap R_p \subset R_p$, тогда $R'_p = R_p/(I \cap R_p)$.

Определим кольцо $K' = \prod_{p \in P} R'_p$ и идеал $T' = \bigoplus_{p \in P} R'_p$. Докажем, что $T'$ вкладывается в $R/I$, а $R/I$ — сервантное подкольцо в $K'$.

Покажем, что $T'$ вкладывается в $R/I$. Построим отображение $\varphi\colon T' \to R/I$. Пусть $\bar{r} \in T'$. Полагаем $\varphi(\bar{r}) = \varphi(r + (I \cap R_p)) = r + I = \bar{r}$. Нетрудно видеть, что $\varphi$ — мономорфизм. Получается, что $T/I$ в $R/I$ играет ту же роль, что и $T$ в $R$.

Покажем, что $R/I$ вкладывается в $K'$. Построим отображение $\psi\colon R/I \to K'$. Пусть $\bar{r} \in R/I$, тогда полагаем $\psi(\bar{r}) = \psi(r + I) = \big(r_p + (I \cap R_p)\big)$, где $r = (r_p)$. Нетрудно видеть, что $\psi$ — мономорфизм. Итак, $R/I$ вкладывается в $K'$.

Мы получили, что $T' \subset R/I \subset K'$. Поскольку $(R/I)/(T/I)$ — $\mathbb{Q}$-алгебра, то $R/I$ — сервантное подкольцо в $K'$, откуда $R/I$ — csp-кольцо.

Утверждение 3 вытекает из того, что $T = \bigoplus_{p \in P} R_p$ и $I \cap R_p = R_p$ для почти всех чисел $p$ из $P$. Теорема доказана. □

Рассмотрим общее строение $R$-модулей. Обозначим через $F$ поле $R/T$.

**Теорема 3.** *Всякий $R$-модуль $M$ равен $A \oplus D$, где $D$ — наибольший подмодуль в $M$, являющийся $F$-пространством, а $A$ — подмодуль, не содержащий $F$-пространств.*

**Доказательство.** Нетрудно проверить, что

$$D = \{x \in M\colon rx = 0 \text{ для каждого } r \in T\} \text{ —}$$

$F$-пространство. Покажем, что $D$ — инъективный $R$-модуль. Воспользуемся известной леммой Бэра. Пусть $I$ — идеал в $R$, тогда $I = eR \oplus L$. Пусть $\varphi \in \in \mathrm{Hom}_R(I, D)$. Отметим, что $\varphi(t) = 0$ для каждого $t \in T$. Имеем $\varphi(k) = = \varphi(er + s)$, где $k \in I$, $r \in R$, $s \in T$. Далее, $\varphi(er + s) = \varphi(er) + \varphi(s) = = (er + s)\varphi(e) = k\varphi(e)$, где $\varphi(e) \in T$ для каждого $k \in I$. Таким образом, если $I$ — идеал в $R$, то существует идемпотент $e \in R$. Полагая $d = \varphi(e) \in D$, получаем наибольший подмодуль в $M$. Итак, $M = A \oplus D$, где $A$ — подмодуль, не содержащий $F$-пространств. Теорема доказана. $\square$

Для случая $R/T \cong \mathbb{Q}$ теорема 3 доказана в [3].

В заключение приведём несколько фактов, связанных с максимальными идеалами csp-кольца $R$.

**Предложение.** *Идеал $I$ кольца $R$ является максимальным тогда и только тогда, когда $I = T$ или $I = (1 - \varepsilon_p)R \oplus pR_p$ для некоторого $p \in P$.*

**Доказательство.** Пусть $I$ — максимальный идеал кольца $R$. Если $I = T$, то $I$ — максимальный. Если $I \neq T$, то $I \not\subset T$. Отсюда $I = eR \oplus \bigoplus_{p \in S} (I \cap R_p)$ по теореме 1. Поскольку $I$ — максимальный идеал, то $S = \{p\}$, где $p \in P$ и $R_p \neq 0$. Для любого $p \in P$, такого что $R_p \neq 0$, $pR_p$ есть единственный максимальный идеал в $R_p$. Значит, $I = (1 - \varepsilon_p)R \oplus pR_p$. $\square$

**Следствие 1.** *Радикал Джекобсона кольца $R$ равен $\bigoplus_{p \in P} pR_p$.*

**Следствие 2.** *$R$-модуль $M$ прост тогда и только тогда, когда $M \cong \mathbb{Z}_p$ для некоторого $p \in P$ либо $M \cong F$, где $F = R/T$.*

**Доказательство.** Для доказательства достаточно рассмотреть соотношения

$$R/I = R/(1 - \varepsilon_p)R \oplus pR_p \cong R_p/pR_p \cong \mathbb{Z}_p,$$

где $\mathbb{Z}_p$ — поле вычетов по модулю $p$. $\square$

# Литература


[1] Крылов П. А. Наследственные кольца эндоморфизмов смешанных абелевых групп // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43, № 1. — С. 108—119.

[2] Крылов П. А., Пахомова Е. Г., Подберезина Е. И. Об одном классе смешанных абелевых групп // Вестник ТГУ. — 2000. — Т. 269. — С. 29—34.

[3] Fomin A. A. Some mixed Abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Abelian Groups and Modules. Proc. of the Int. Conf. in Dublin, Ireland, August 10—14, 1998 / P. C. Eklof (ed.) et al. — Basel: Birkhäuser, 1999. — (Trends in Mathematics.) — P. 87—100.


*Статья поступила в редакцию в мае 2006 г.*