О регулярности центра кольца эндоморфизмов абелевой группы

А. В. КАРПЕНКО, В. М. МИСЯКОВ
Томский государственный университет
e-mail: mvm@mail.tsu.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, кольцо эндоморфизмов, регулярное кольцо, центр.

Аннотация

Исследуются абелевы группы, имеющие регулярный центр кольца эндоморфизмов.

Abstract

A. V. Karpenko, V. M. Misyakov, On regularity of the center of the endomorphism ring of an Abelian group, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 3, pp. 39—44.

We study Abelian groups with a regular center of the endomorphism ring.

В данной статье рассматривается вопрос, сформулированный как проблема 16 в [7]: центры колец эндоморфизмов каких групп регулярны? Напомним, что кольцо R называется регулярным, если для каждого элемента $x \in R$ существует элемент $y \in R$, такой что $xyx = x$. Поскольку хорошо известно, что центр регулярного кольца является регулярным, класс абелевых групп, имеющих регулярный центр кольца эндоморфизмов, будет содержать класс абелевых групп с регулярным кольцом эндоморфизмов. В то же время, как будет показано ниже, в некоторых случаях эти классы совпадают.

Все группы, встречающиеся в работе, абелевы. Введём следующие обозначения. $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел; прямую сумму и произведение групп (колец) обозначаем символами $\oplus$ и $\times$ или $\prod$ соответственно. Пусть X и Y — группы. Тогда $T(X)$ — периодическая часть группы X, $T_p(X)$ — p-компонента $T(X)$, $\mathrm{E}(X)$ — кольцо эндоморфизмов группы X, $\mathrm{Hom}(X, Y)$ — группа гомоморфизмов из X в Y, $X[p] = \{a \in X \mid pa = 0\}$, $\mathrm{C}(R)$ — центр кольца R. Определения других используемых понятий («редуцированная группа», «высотная матрица элемента» и т. п.) можно найти в [2—4].

Лемма 1. *Центр кольца эндоморфизмов группы G регулярен тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in \mathrm{C}\big(\mathrm{E}(G)\big)$ следует, что $G = \mathrm{im}(\alpha) \oplus \ker(\alpha)$.*

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 3, с. 39—44.

Доказательство. Пусть $\mathrm{C}\big(\mathrm{E}(G)\big)$ — регулярное кольцо. Тогда для любого $\alpha \in \mathrm{C}\big(\mathrm{E}(G)\big)$ существует $\beta \in \mathrm{C}\big(\mathrm{E}(G)\big)$ со свойством $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Справедливы включения

$$\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\alpha\beta\alpha) \subseteq \mathrm{im}(\alpha\beta) \subseteq \mathrm{im}(\alpha)$$

и

$$\ker(\alpha) \subseteq \ker(\beta\alpha) \subseteq \ker(\alpha\beta\alpha) = \ker(\alpha),$$

откуда следует, что $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\alpha\beta)$ и $\ker(\alpha) = \ker(\beta\alpha) = \ker(\alpha\beta)$. Так как $\alpha\beta$ — идемпотент кольца $\mathrm{C}\big(\mathrm{E}(G)\big)$, то

$$G = \mathrm{im}(\alpha\beta) \oplus \ker(\alpha\beta) = \mathrm{im}(\alpha) \oplus \ker(\alpha).$$

Обратно, допустим, что для любого $0 \neq \alpha \in \mathrm{C}\big(\mathrm{E}(G)\big)$ имеем, что $G = \mathrm{im}(\alpha) \oplus \ker(\alpha)$. Тогда $\alpha|_{\mathrm{im}(\alpha)}$ является автоморфизмом на $\mathrm{im}(\alpha)$. Следовательно, существует $\beta \in \mathrm{E}(G)$, аннулирующий $\ker(\alpha)$ и обратный к $\alpha|_{\mathrm{im}(\alpha)}$ на $\mathrm{im}(\alpha)$. Покажем, что $\beta \in \mathrm{C}\big(\mathrm{E}(G)\big)$. Пусть $\varphi \in \mathrm{E}(G)$ и $x \in G$, тогда $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \mathrm{im}(\alpha)$, $x_2 \in \ker(\alpha)$. Следовательно,

$$(\varphi\beta)(x) = \varphi\big(\beta(x_1 + x_2)\big) = \varphi\big(\beta(x_1)\big).$$

Так как $x_1 \in \mathrm{im}(\alpha)$, то существует такой элемент $a_1 \in \mathrm{im}(\alpha)$, что $\alpha|_{\mathrm{im}(\alpha)}(a_1) = x_1$. Поскольку $\mathrm{im}(\alpha)$, $\ker(\alpha)$ — вполне характеристические подгруппы в G, то

$$\begin{aligned}\varphi\big(\beta(x_1)\big) = \varphi\Big(\beta\big(\alpha|_{\mathrm{im}(\alpha)}(a_1)\big)\Big) = \varphi(a_1) = (\beta\alpha)\big(\varphi(a_1)\big) = \\ = \beta\Big(\varphi\big(\alpha(a_1)\big)\Big) = \beta\big(\varphi(x_1)\big) = \beta\big(\varphi(x_1)\big) + \beta\big(\varphi(x_2)\big) = (\beta\varphi)(x).\end{aligned}$$

Пусть $a \in G$, тогда $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in \mathrm{im}(\alpha)$, $a_2 \in \ker(\alpha)$. Следовательно,

$$(\alpha\beta\alpha)(a) = (\alpha\beta\alpha)(a_1) = \alpha(a_1) = \alpha(a_1) + \alpha(a_2) = \alpha(a).$$

Если $\alpha = 0$, то утверждение тривиально. □

Замечание 1. Поскольку, как было показано в [5, 8], кольцо эндоморфизмов элементарной или делимой группы без кручения регулярно, то центр этого кольца также регулярен.

Замечание 2. Будем использовать также следующее легко доказываемое утверждение. Пусть $G = A \oplus B$, где A, B — вполне характеристические подгруппы группы G. Кольцо $\mathrm{C}\big(\mathrm{E}(G)\big)$ регулярно тогда и только тогда, когда $\mathrm{C}\big(\mathrm{E}(A)\big)$, $\mathrm{C}\big(\mathrm{E}(B)\big)$ — регулярные кольца.

Далее существенную роль будут играть идеализации бимодулей. Напомним это понятие.

Пусть R и S — кольца, M — R-S-бимодуль. *Идеализацией бимодуля M* называется кольцо, состоящее из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix},$$

где $r \in R$, $s \in S$, $m \in M$, с обычными для матриц операциями сложения и умножения. Будем обозначать построенное кольцо

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

или одной буквой K. Будем отождествлять естественным образом кольца R и S с кольцами

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

соответственно, произведение $R \times S$ — с

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

и бимодуль M — с

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

записываем в виде вектора (r, s). Имеются два канонических сюръективных гомоморфизма колец:

$$K \to R, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \to r, \qquad K \to S, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \to s.$$

Напомним следующую лемму, доказанную в [1].

Лемма 2. *Центр $\mathrm{C}(K)$ идеализации K R-S-бимодуля M состоит из всех диагональных матриц (r, s), где $r \in \mathrm{C}(R)$, $s \in \mathrm{C}(S)$ и $rm = ms$ для каждого $m \in M$.*

Если A — левый R-модуль, то его аннулятор будем обозначать через $\mathrm{Ann}_R A$. Из данной леммы следует, что $\mathrm{C}(K)$ является подкольцом в $\mathrm{C}(R) \times \mathrm{C}(S)$, и $\mathrm{Ann}_{\mathrm{C}(R)} M, \mathrm{Ann}_{\mathrm{C}(S)} M \subseteq \mathrm{C}(K)$. Учитывая замечание перед леммой 2, мы имеем кольцевые гомоморфизмы $f\colon \mathrm{C}(K) \to \mathrm{C}(R)$, $(r, s) \to r$ и $g\colon \mathrm{C}(K) \to \mathrm{C}(S)$, $(r, s) \to s$. Аннуляторы $\mathrm{Ann}_{\mathrm{C}(R)} M$ и $\mathrm{Ann}_{\mathrm{C}(S)} M$ остаются на месте при действии гомоморфизмов f и g соответственно. В частности, $\mathrm{Ann}_{\mathrm{C}(R)} M \subseteq \mathrm{im}(f)$, $\mathrm{Ann}_{\mathrm{C}(S)} M \subseteq \mathrm{im}(g)$. Приведём ещё один результат из [1], на который будем ссылаться в дальнейшем.

Лемма 3. *В принятых обозначениях имеем*

1) $\ker(f) = \mathrm{Ann}_{\mathrm{C}(S)} M$ *и* $\ker(g) = \mathrm{Ann}_{\mathrm{C}(R)} M$;
2) *если M — точный $\mathrm{C}(S)$-модуль, то f — мономорфизм, если же M — точный $\mathrm{C}(R)$-модуль, то g — мономорфизм.*

Рассматривая кольца эндоморфизмов групп, мы можем получить идеализацию бимодуля в следующей ситуации. Пусть G — прямая сумма двух групп, $G = B \oplus A$, причём B — вполне характеристическое слагаемое, т. е. $\mathrm{Hom}(B, A) = 0$. Группа гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(A, B)$ стандартным способом превращается в $\mathrm{E}(B)$-$\mathrm{E}(A)$-бимодуль. Следовательно, можно записать идеализацию этого бимодуля:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}(B) & \mathrm{Hom}(A,B) \\ 0 & \mathrm{E}(A) \end{pmatrix}.$$

Поскольку известно, что кольцо $\mathrm{E}(G)$ естественным образом отождествляется с данным кольцом матриц (см. [4, теорема 106.1]), то кольцо эндоморфизмов $\mathrm{E}(G)$ можно считать идеализацией $\mathrm{E}(B)$-$\mathrm{E}(A)$-бимодуля $\mathrm{Hom}(A, B)$.

Предложение 4. *Пусть $G = B \oplus A$, где A — редуцированная непериодическая группа, B — делимая группа без кручения. Тогда центр кольца эндоморфизмов группы G можно отождествить с подкольцом поля $\mathbb{Q}$, порождённым 1 и всеми числами $1/p$, такими что $pG = G$.*

Доказательство. Пусть $G = B \oplus A$, где A и B удовлетворяют условию предложения, причём $B \neq 0$. Из того, что $\mathrm{Hom}(B, A) = 0$, заключаем, что кольцо $\mathrm{E}(G)$ представляет собой идеализацию $\mathrm{E}(B)$-$\mathrm{E}(A)$-бимодуля $\mathrm{Hom}(A, B)$.

Покажем, что $\mathrm{Hom}(A, B)$ — точный $\mathrm{E}(A)$-модуль. Допустим, напротив, что $\mathrm{Hom}(A, B)\alpha = 0$ для какого-то $0 \neq \alpha \in \mathrm{E}(A)$. Нетрудно показать, что существует элемент $a \in A$, такой что $\mathrm{o}(a) = \infty$ и $\alpha(a) \neq 0$. Пусть $0 \neq b \in B$. Так как высотная матрица элемента $\alpha(a)$ в группе A меньше высотной матрицы элемента b в группе B, то существует такой элемент $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$, что $\varphi\bigl(\alpha(a)\bigr) = b$. Поскольку $b \neq 0$, то $\varphi\alpha \neq 0$, что противоречит допущению. Таким образом, $\mathrm{Hom}(A, B)$ — точный $\mathrm{E}(A)$-модуль.

По лемме 3 кольцо $\mathrm{C}\bigl(\mathrm{E}(G)\bigr)$ вкладывается в кольцо $\mathrm{C}\bigl(\mathrm{E}(B)\bigr)$, изоморфное $\mathbb{Q}$. Покажем, что кольцо $\mathrm{C}\bigl(\mathrm{E}(G)\bigr)$ можно отождествить с подкольцом поля $\mathbb{Q}$. Поскольку все натуральные числа принадлежат $\mathrm{C}\bigl(\mathrm{E}(G)\bigr)$, то для этого отождествления достаточно показать, что если какое-то рациональное число вида $\frac{1}{q}$ принадлежит $\mathrm{im}(\varphi)$, где φ — вложение кольца $\mathrm{C}\bigl(\mathrm{E}(G)\bigr)$ в поле $\mathbb{Q}$, то найдётся эндоморфизм из $\mathrm{C}\bigl(\mathrm{E}(G)\bigr)$, который действует на элементах группы G как умножение на дробь $\frac{1}{q}$. Пусть в $\mathrm{im}(\varphi)$ разрешимо уравнение $qx = 1$ (где q — простое число), т. е. существует элемент $\beta \in \mathrm{im}(\varphi)$, такой что $q\beta = 1$. Поскольку $\varphi(\alpha) = \beta$ для некоторого $\alpha \in \mathrm{C}\bigl(\mathrm{E}(G)\bigr)$, это означает, что α — решение уравнения $qy = 1$ в кольце $\mathrm{C}\bigl(\mathrm{E}(G)\bigr)$. Тогда для любого $g \in G$ имеем

$$\alpha(g) = \left(\frac{1}{q}\,q\right)\bigl(\alpha(g)\bigr) = \frac{1}{q}(q\alpha)(g) = \frac{1}{q}(g).$$

Следовательно, элементы центра представляют умножения на рациональные числа m/n. При этом ясно, что $nG = G$. Наоборот, если $nG = G$, то результат умножения группы G на число m/n лежит в $\mathrm{C}\bigl(\mathrm{E}(G)\bigr)$. Мы получили, что центр $\mathrm{C}\big(\mathrm{E}(G)\big)$ отождествляется с подкольцом поля $\mathbb{Q}$, указанным в предложении. $\square$

Докажем основной результат данной работы.

Теорема 5.

1. *Если G — нередуцированная группа, то $\mathrm{C}\big(\mathrm{E}(G)\big)$ — регулярное кольцо тогда и только тогда, когда группа G удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий*:
   а) *G — делимая группа без кручения*;
   б) *$G = A \oplus D$, где A — элементарная группа, а D — делимая группа без кручения.*
2. *Если G — редуцированная группа и $\mathrm{C}\big(\mathrm{E}(G)\big)$ — регулярное кольцо, то $T(G)$ — элементарная группа, $G/T(G)$ — делимая группа и*

$$\bigoplus_{p\in P} T_p(G) \subseteq G \subseteq \prod_{p\in P} T_p(G).$$

Доказательство. Заметим, что большая часть доказательства этой теоремы повторяет идею соответствующих доказательств из [5, 8]. Так, например, доказательство утверждения 2 полностью переносится из этих работ, если заменить $\mathrm{E}(G)$ на его центр.

Для полноты картины докажем утверждение 1. Пусть $G = A \oplus D$, где A — редуцированная, $0 \neq D$ — делимая группы. Допустим, что $T(G) = 0$. Пусть n — произвольное натуральное число. Поскольку $n \in \mathrm{C}\big(\mathrm{E}(G)\big)$, из регулярности $\mathrm{C}\big(\mathrm{E}(G)\big)$ следует, что $G = \mathrm{im}(n) \oplus \ker(n)$. По предположению G — группа без кручения, поэтому $\ker(n) = 0$ и $G = \mathrm{im}(n) = nG$, т. е. G — делимая группа без кручения. Пусть $T(G) \neq 0$. Тогда умножение на фиксированное простое число p является эндоморфизмом из $\mathrm{C}\big(\mathrm{E}(G)\big)$, ядро которого равно $T_p(G)[p]$. Из регулярности кольца $\mathrm{C}\big(\mathrm{E}(G)\big)$ следует, что $T_p(G)[p]$ выделяется прямым слагаемым, но это возможно, только если $T_p(G)$ совпадает с $T_p(G)[p]$. Следовательно, $T(G)$ — элементарная группа. Поскольку элементарная группа не является делимой, то D — делимая группа без кручения, причём $T(G) = T(A)$ и $A \neq 0$. Допустим, что $A \neq T(A)$. Тогда по предложению 4 кольцо $\mathrm{C}\big(\mathrm{E}(G)\big)$ изоморфно подкольцу L поля $\mathbb{Q}$, которое порождается 1 и всеми числами $1/p$, такими что $pG = G$. Если предположить, что $L \neq \mathbb{Q}$, то найдётся такое простое число q, что $1/q \notin L$. Из регулярности кольца L следует существование элемента $x \in L$ со свойством $qxq = q$. Поэтому $x = 1/q \in L$, что противоречит допущению. Таким образом, $\mathrm{C}\big(\mathrm{E}(G)\big) \cong \mathbb{Q}$ и $pG = G$ для любого простого числа p, но это невозможно ввиду редуцированности прямого слагаемого A в G. Следовательно, $A = T(A)$ — элементарная группа. Обратное утверждение вытекает из замечаний 1 и 2. $\square$

Литература

[1] Крылов П. А., Классен Е. Д. Центр кольца эндоморфизмов расщепляющейся смешанной абелевой группы // Сиб. мат. журн. — 1999. — Т. 40, № 2. — С. 1074—1085.

[2] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. — М.: Мир, 1977. — Т. 1.

[3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974. — Т. 1.

[4] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1977. — Т. 2.

[5] Fuchs L., Rangaswamy K. M. On generalized regular rings // Math. Z. — 1968. — Vol. 107. — P. 71—81.

[6] Glaz S., Wickless W. Regular and principal projective endomorphism rings of mixed Abelian groups // Comm. Algebra. — 1994. — Vol. 22, no. 4. — P. 1161—1176.

[7] Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. Endomorphism Rings of Abelian Groups. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2003.

[8] Rangaswamy K. M. Abelian groups with endomorphic images of special types // J. Algebra. — 1967. — Vol. 6. — P. 271—280.

Статья поступила в редакцию в мае 2006 г.