О евклидовых и пифагоровых почтителах

К. КАРПФИНГЕР
Технический университет Мюнхена, Германия
e-mail: karpfing@ma.tum.de

УДК 512.623.8

Ключевые слова: почтитело, упорядоченное тело.

Аннотация

В работе предлагается метод конструирования упорядоченных почтител, в частности евклидовых и пифагоровых почтител, т. е. формально вещественных почтител, группа квадратов которых является порядком, следовательно аддитивно замкнута.

Abstract

Ch. Karpfinger, On Euclidean and Pythagorean nearfields, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 3, pp. 45—50.

We give a method for the construction of ordered nearfields and especially of Euclidean and Pythagorean nearfields, i.e., of formally real nearfields whose groups of squares are orderings and, respectively, additively closed.

В [2] был представлен способ конструирования упорядоченных почтител с помощью упорядоченных полей формальных рядов $(K((\Gamma)), P_\infty)$. При таком подходе K — поле, $\Gamma = (\Gamma, <)$ — линейная упорядоченная абелева группа, P — порядок на K и P_∞ — порядок на $F := K((\Gamma))$, который продолжает P с минимальным коэффициентом:

$$x = \sum t^\gamma x_\gamma \in P_\infty \iff x_{v(x)} \in P, \quad \text{где} \quad v(x) := \mathrm{Min}\{\gamma \in \Gamma \mid x_\gamma \neq 0\}. \qquad (*)$$

Нас интересует получение нетривиальных примеров евклидовых и пифагоровых почтител. С этой целью мы возьмём евклидово (или пифагорово) поле и построим примеры с помощью модификации метода из [2].

1. Определения

Мы строим почтитело из тела $F = (F, +, \cdot)$ с *сопряжением*, т. е. с отображением $\kappa\colon a \to \kappa_a$ из F^* ($X^* := X \setminus \{0\}$ для каждой аддитивной группы X с нейтральным элементом 0) в $\mathrm{Aut}\, F$, таким что для всех $a, b \in F^*$ справедливо $\kappa_a \kappa_b = \kappa_{a\kappa_a(b)}$. *Производная* $F^k := (F, +, \circ)$ с новым умножением $\circ$, определённым по правилу $a \circ b := a \cdot \kappa_a(b)$ для $a \neq 0$ и $0 \circ b := 0$, является тогда (*левым*)

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 3, с. 45—50.
© 2007 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

почтителом, т. е. $(F^*, \circ)$ — группа и $a\circ(x+y) = a\circ x + a\circ y$ для всех $a, x, y \in F$ (см. также [6, гл. II]).

Если Δ — группа и $(V, \cdot)$ — абелева группа, то через $\mathrm{H}(\Delta, V)$ мы обозначаем группу всех гомоморфизмов из Δ в V с умножением

$$(\sigma, \tau) \to \sigma \bullet \tau \colon \gamma \to \sigma(\gamma) \cdot \tau(\gamma).$$

Под *левым порядком* (левого) почтителя F мы понимаем подмножество P в F^* со свойствами $P \cup (-P) = F^*$, $P + P \subset P$ и $P \cdot P \subset P$. Соответствующий порядок $< = <_P$, определённый путём

$$x < y \iff y - x \in P \quad (x, y \in F),$$

является линейным, причём верны следующие соотношения: из $x < y$ следует, что $a + x < a + y$ для любых $a \in F$ и $ax < ay$ для любых $a \in P$. Если из $x < y$ и $a \in P$ всегда следует $xa < ya$, то P называется *порядком*.

Под *группой квадратов* $Q(G)$ группы $G = (G, \cdot)$ или $G = (G, +)$ мы понимаем подгруппу G, порождённую всеми элементами x^2 или $x + x$ соответственно. Под *группой квадратов* $Q(F)$ почтителя F понимается группа квадратов мультипликативной группы F^*. Пусть $T(F)$ — подполугруппа группы $(F, +)$, порождённая $Q(F)$. Как и в случае полей, можно доказать (см. [1]), что F имеет левый порядок тогда и только тогда, когда $-1 \notin T(F)$. В этом случае мы называем почтитело F *формально левым вещественным*, а $T(F)$ является пересечением всех левых порядков почтителя F. Левый порядок почтителя F является порядком тогда и только тогда, когда он содержит подгруппу $\bar{Q}(F)$ группы $(F^*, \cdot)$, порождённую всеми элементами $(x + y)x - yx$, где $x, y \in F$, $x \neq 0$ (так называемую *расширенную группу квадратов* F), и, следовательно, подполугруппу $\bar{T}(F)$ группы $(F, +)$, порождённую $\bar{Q}(F)$. Подполугруппа $\bar{T}(F)$ является пересечением всех порядков почтителя F. Почтитело F называется *формально вещественным*, если $-1 \notin \bar{T}(F)$, т. е. если F имеет порядок. Почтитело F называется *евклидовым* (*левым евклидовым*), если $\bar{Q}(F)$ — порядок ($Q(F)$ — левый порядок) почтителя F. Назовём F *пифагоровым* (*левым пифагоровым*), если $\bar{T}(F) = \bar{Q}(F) \neq F^*$ ($T(F) = Q(F) \neq F^*$).

Введём следующие обозначения: пусть $K = (K, +, \cdot)$ — тело и $(\Gamma, +, <)$ — нетривиальная (не обязательно абелева) линейно упорядоченная группа с нейтральным элементом 0. Пусть $F = (F, +, \cdot)$ — тело $K((\Gamma))$ формальных рядов $x = \sum\limits_{\gamma\in\Gamma} t^\gamma x_\gamma$ над Γ с коэффициентами x_γ из K с вполне упорядоченным носителем $T(x) := \{\gamma \in \Gamma \mid x_\gamma \neq 0\}$. Факторная система тривиальная (см. [4]), т. е.

$$\sum_{\alpha\in\Gamma} t^\alpha x_\alpha \cdot \sum_{\beta\in\Gamma} t^\beta y_\beta = \sum_{\gamma\in\Gamma} t^\gamma \biggl(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} x_\alpha y_\beta \biggr).$$

Вместо $x \cdot y$ мы пишем более коротко xy. Мы идентифицируем элемент $k \in K$ с $t^0 k$, так что K является подтелом тела F. Отображение $v\colon x \to \operatorname{Min} T(x)$ (*порядок* элемента x) из F^* в Γ является нормированием тела F, т. е. $v(xy) = v(x) + v(y)$ и $v(x + y) \geqslant \operatorname{Min}\{v(x), v(y)\}$ для любых $x, y \in F^*$ (мы определим

$v(0) := \infty > \gamma$ для любых $\gamma \in \Gamma$). Пусть η обозначает гомоморфизм $x \to x_{v(x)}$ (*минимальный коэффициент* x) из $(F^*, \cdot)$ в $(K^* \cdot)$ и $E^{(1)} := \operatorname{Kern} \eta \cap \operatorname{Kern} v$ — группа основных обратимых элементов.

В данной работе группа $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +)$ представлена своим обычном порядком $<$.

Мы повторим хорошо известный результат.

1.1. *F является евклидовым тогда и только тогда, когда K евклидово и $Q(\Gamma) = \Gamma$. F является пифагоровым, когда K пифагорово.*

2. Автоморфизмы и порядки тела F

2.1. Автоморфизмы

Важную роль в конструировании автоморфизмов тела F играет группа $\mathrm{H}\big(\Gamma, Z(K^*)\big)$ всех гомоморфизмов из Γ в центр $Z(K^*)$ группы $(K^*, \cdot)$.

2.1. *Для любого $\tau \in \mathrm{H}\big(\Gamma, Z(K^*)\big)$ отображение*

$$\bar{\tau} \colon \sum_{\gamma \in \Gamma} t^\gamma x_\gamma \to \sum_{\gamma \in \Gamma} t^\gamma x_\gamma \tau(\gamma)$$

является автоморфизмом тела F.

Доказательство этого утверждения достаточно просто.

2.2. Порядки тела F и почтитела F^κ

Следующий результат хорошо известен (см. [1]).

2.2. *Пусть P — порядок тела $F = K((\Gamma))$ и $\kappa \colon x \mapsto \kappa_x$ — сопряжение тела F. Тогда P является левым порядком почтитела F^κ тогда и только тогда, когда $\kappa_x(P) \subset P$ для всех $x \in F^*$.*

3. Евклидовы и пифагоровы почтитела

Мы подошли к доказательству следующей теоремы, которая позволит нам конструировать упорядоченные евклидовы и пифагоровы почтитела.

Теорема 3.1. *Пусть $\tau \colon \alpha \to \tau_\alpha$ — гомоморфизм из Γ в $\mathrm{H}\big(\Gamma, Z(K^*)\big)$. Тогда*

$$\kappa \colon a \to \kappa_a \colon \sum t^\gamma x_\gamma \to \sum t^\gamma x_\gamma \tau_{v(a)}(\gamma)$$

является сопряжением тела F со следующими свойствами:

а) *если P — порядок тела K и $\tau_\gamma(\Gamma) \subset P$ для всех $\gamma \in \Gamma$, то F^κ — формально вещественное почтитело;*

б) *если K — формально вещественное тело и $\tau_\gamma(\Gamma) \subset Q(K)$ для всех $\gamma \in \Gamma$, то*

$$Q(F^\kappa) = \{x \in F \mid v(x) \in Q(\Gamma),\ \eta(x) \in Q(K)\}$$

и

$$T(F^\kappa) = \{x \in F \mid v(x) \in Q(\Gamma),\ \eta(x) \in T(K)\};$$

в) $\bar{Q}(F^\kappa) = Q(F^\kappa) = Q(F)$ *и* $\bar{T}(F^\kappa) = T(F^\kappa) = T(F)$.

Доказательство. Пусть $a, b, x = \sum t^\gamma x_\gamma \in F$. Вычисление

$$\kappa_{a\kappa_a(b)}(x) = \sum t^\gamma x_\gamma \tau_{v(a\kappa_a(b))}(\gamma) = \sum t^\gamma x_\gamma \tau_{v(a)+v(b)}(\gamma) = \\ = \sum t^\gamma x_\gamma \tau_{v(b)}(\gamma)\tau_{v(a)}(\gamma) = \kappa_a\bigl(\kappa_b(x)\bigr)$$

и утверждение 2.1 показывают, что κ действительно является сопряжением.

Пусть $F^\kappa = (F, +, \circ)$. С учётом предпосылок мы получаем

$$\eta(a \circ b) = \eta(a)\eta(b)\tau_{v(a)}\bigl(v(b)\bigr) \quad \text{для всех} \quad a, b \in F^*. \qquad (**)$$

Докажем утверждение а). Из утверждения 2.2 и $(*)$ следует, что почтитело F^κ является формально левым вещественным. Множество P_∞, определённое в $(*)$ — левый порядок. Докажем, что оно является порядком. Пусть $a \in P_\infty$, $x, y \in F$ и $x < y$. Тогда при $v(y) < v(x)$ и $v(y) > v(x)$ получаем, что $x \circ a < y \circ a$. Обратим внимание на случай $v(y) = v(x)$, в котором мы получаем минимальный коэффициент

$$\eta(y \circ a - z \circ a) = y_{v(y)}a_{v(a)}\tau_{v(y)}\bigl(v(a)\bigr) - x_{v(x)}a_{v(a)}\tau_{v(x)}\bigl(v(a)\bigr),$$

а значит, $x \circ a < y \circ a$. Это доказывает утверждение.

Докажем утверждение б). Так как $v(a \circ b) = v(a) + v(b)$ для всех $a, b \in F^\kappa$, на основании $(**)$

$$V := \{x \in F \mid v(x) \in Q(\Gamma),\ \eta(x) \in Q(K)\}$$

является подполугруппой группы $(F^*, \circ)$, содержащей все квадраты $(F^*, \circ)$. Итак, V содержит $Q(F^\kappa)$. С учётом предпосылки

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \tau_\gamma(\Gamma) \subset Q(F^\kappa)$$

и равенств $t^\alpha \circ t^\beta = t^{\alpha+\beta}\tau_\alpha(\beta)$ $(\alpha, \beta \in \Gamma)$ получаем, что $t^\gamma \in Q(F^\kappa)$ для любого $\gamma \in Q(\Gamma)$. Так как каждый основной обратимый элемент по [3, (3.1)] является квадратом в F и $E^{(1)}$ содержится в ядре отображения κ, группа всех основных обратимых элементов $E^{(1)}$ содержится в $Q(F^\kappa)$. Поскольку $Q(K) \subset Q(F^\kappa)$, для $x = e(x)t^{v(x)}\eta(x) \in F^\kappa$, где $e(x) \in E^{(1)}$, мы получаем включение $V \subset Q(F^\kappa)$.

С доказанным утверждением $V = Q(F^\kappa)$ получаем, что

$$T(F^\kappa) = \{x \in F \mid v(x) \in Q(\Gamma),\ \eta(x) \in T(K)\}.$$

Проверим справедливость утверждения в). Для элементов $z = (x+y)\circ x - y \circ x$ из $\bar{Q}(F^\kappa)$ мы рассматриваем следующие четыре возможности:

1) $v(x) < v(y)$,
2) $v(y) < v(x)$,
3) $v(x) = v(y)$, $\eta(x) + \eta(y) \neq 0$,
4) $v(x) = v(y)$, $\eta(x) + \eta(y) = 0$.

В любом случае получаем, что $v(z) = v(x) + v(x) \in Q(\Gamma)$. Имеем соответственно

1) $\eta(z) = \eta(x)\eta(x)\tau_{v(x)}\big(v(x)\big) \in Q(K)$,
2) $\eta(z) = \eta(x)\eta(x)\tau_{v(y)}\big(v(x)\big) \in Q(K)$,
3) $z = x \circ x \in Q(F^\kappa)$,
4) $\eta(z) = \eta(x)\eta(x)\tau_{v(y)}\big(v(x)\big) \in Q(K)$.

Итак, $\bar{Q}(F^\kappa) = Q(F^\kappa)$. Из утверждения б) и результата 1.1 следует, что $Q(F^\kappa) = Q(F)$. Таким же образом доказывается второе утверждение. □

Из теоремы 3.1 выводится следствие 3.2.

Следствие 3.2. *Отображение*

$$\kappa\colon a \to \kappa_a^\tau\colon \sum t^\gamma x_\gamma \to \sum t^\gamma x_\gamma \tau_{v(a)}(\gamma)$$

для любого гомоморфизма $\tau\colon \gamma \to \tau_\gamma$ *из* Γ *в* $\mathrm{H}\big(\Gamma, Z(K^*) \cap Q(K)\big)$ *является сопряжением тела* F. *Справедливы также следующие утверждения*:

а) F^κ *евклидово* (*и левое евклидово*) *тогда и только тогда, когда* $Q(\Gamma) = \Gamma$ *и* K *евклидово*;

б) F^κ *пифагорово* (*и левое пифагорово*) *тогда и только тогда, когда* K *пифагорово.*

Пример 1. Евклидовы почтитела. Пусть K — евклидово поле. Подгруппа

$$\Gamma := \left\{ \frac{z}{2^k} \;\middle|\; k, z \in \mathbb{Z},\ k \geqslant 0 \right\}$$

группы $(\mathbb{Q}, +)$ обладает свойством $Q(\Gamma) = \Gamma$. Для каждого $q \in Q(K)$ существует ровно один гомоморфизм $\bar{q}\colon \Gamma \to Q(K)$, для которого справедливо $\bar{q}(1) = q$, задаваемый правилом $\bar{q}\big(\frac{z}{2^k}\big)^{2^k} = q^z$. Отображение $\alpha \to \tau_\alpha^{(q)}\colon \gamma \to \bar{q}(\alpha\gamma)$ является гомоморфизмом из Γ в $\mathrm{H}\big(\Gamma, Q(K)\big)$. По следствию 3.2 отображение

$$\kappa^{(q)}\colon a \to \kappa_a^{(q)}\colon \sum t^\gamma x_\gamma \to \sum t^\gamma x_\gamma \bar{q}\big(v(a)\gamma\big)$$

определяет сопряжение поля $F = K((\Gamma))$ с евклидовой и левой евклидовой производной.

Пусть $q, q' \neq 1$ — два элемента из $Q(K)$. Определим $\kappa := \kappa^{(q)}$, $\kappa' := \kappa^{(q')}$. Пусть π — изоморфизм из F^κ в $F^{\kappa'}$. Поскольку K — подполе всех элементов, остающихся неподвижными при действии $\kappa(F^*)$ и $\kappa'(F^*)$, и так как эти группы абелевы, K является по [6, гл. III, (5.12.b)] ядром почтител F^κ и $F^{\kappa'}$. Итак, справедливо $\pi(K) = K$. Далее, π по [6, гл. III, (4.6)] и [5, (4.1)] является автоморфизмом поля F. Из [6, гл. II, (5.1)] следует, что $\kappa'_{\pi(a)}\pi = \pi\kappa_a$ для любого $a \in F^*$. Для $\pi(t^1) = \sum t^\gamma s_\gamma$ мы получим равенства

$$\Big(\sum t^\gamma s_\gamma\Big) \cdot \pi(q) = \pi\big(t^1 \cdot \bar{q}(1)\big) = \pi\kappa_{t^1}(t^1) = \kappa'_{\pi(t^1)}\pi(t^1) = \sum t^\gamma s_\gamma \bar{q}'\big(\gamma v \pi(t^1)\big).$$

Для каждого $\gamma \in \Gamma$ справедливо $s_\gamma = 0$ или $\bar{q}'\big(\gamma v \pi(t^1)\big) = \pi(q)$. Так как $\bar{q}'$ — инъективное отображение, для некоторого $\delta \in \Gamma$ имеем $\pi(t^1) \in t^\delta K$ и $\pi(q) = \bar{q}'(\delta^2)$, значит, $\pi(q)^{2^k} = (q')^z$ для некоторых $k, z \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$.

Итак, существует $|\mathbb{R}|$ неизоморфных евклидовых и левых евклидовых почтител, получаемых таким образом из $\mathbb{R}((\Gamma))$.

Пример 2. Пифагоровы почтитела. Пусть K — пифагорово поле. Для любого элемента z из $Q(K)$ отображение $k \to \tau_k\colon n \to z^{kn}$ является гомоморфизмом из $\mathbb{Z}$ в $\mathrm{H}\big(\mathbb{Z}, Q(K)\big)$. По следствию 3.2 отображение

$$\kappa^{(z)}\colon a \to \kappa_a^{(z)}\colon \sum t^n x_n \to \sum t^n x_n z^{v(a)n}$$

определяет сопряжение поля $F = K((\mathbb{Z}))$ с пифагоровой и левой пифагоровой производной. Производная не является ни евклидовой, ни левой евклидовой, поскольку $Q\big(F^{\kappa^{(z)}}\big)$ не содержит ни t, ни $-t$. Как и в примере 1, можно доказать, что для двух элементов $z, z' \in Q(K) \setminus \{1\}$ почтитела $F^{\kappa^{(z)}}$ и $F^{\kappa^{(z')}}$ являются изоморфными только тогда, когда существует автоморфизм поля K, который отображает z на z'.

В результате имеется $|\mathbb{R}|$ неизоморфных пифагоровых и левых пифагоровых производных, получаемых таким образом из $\mathbb{R}((\mathbb{Z}))$.

Литература

[1] Gröger D. Über angeordnete Fastkörper. — Beiträge zur Geometrie und Algebra. Techn. Univ. München. Nr. 7. — 1982.

[2] Hartmann P., Prieß-Crampe S. Zur Konstruktion angeordneter planarer Dicksonscher Fastkörper // Geom. Dedicata. — 1990. — Vol. 36. — P. 199—205.

[3] Kalhoff F. Formal power series over Cartesian groups and their spaces of orderings // Geom. Dedicata. — 1990. — Vol. 36. — P. 329—345.

[4] Neumann B. H. On ordered division rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1949. — Vol. 66. — P. 202—252.

[5] Wähling H. Normale Fastkörper mit kommutativer bzw. zweiseitiger Inzidenzgruppe // Math. Z. — 1976. — Vol. 147. — P. 65—78.

[6] Wähling H. Theorie der Fastkörper. — Essen, 1987.

Статья поступила в редакцию в мае 2006 г.