

О K -больших и обобщённо K -больших абелевых группах

О. М. КАТЕРИНЧУК

Томский государственный университет
e-mail: olesya-kate@yandex.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: группа гомоморфизмов, K -большая абелева группа, обобщённо K -большая абелева группа.

Аннотация

Вводятся понятия K -большой и обобщённо K -большой абелевых групп, изучаются их основные свойства, связи между ними, рассматриваются K -большие (обобщённо K -большие) группы относительно класса всех групп и класса всех групп без кручения. Основное внимание уделяется случаю, когда K состоит из ограниченных p -групп для бесконечного множества простых чисел p .

Abstract

O. M. Katerinchuk, On K -large and generalized K -large Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 3, pp. 51–60.

The concepts of K -large and generalized K -large Abelian groups are introduced, and their main properties and interconnections are studied. We consider groups that are K -large (generalized K -large) with respect to the class of all groups and torsion-free groups. Main attention is paid to the case where K consists of bounded p -groups for an infinite set of prime numbers p .

Введение

Понятие прямой суммы в теории абелевых групп исключительно важно. Почти все структурные теоремы об абелевых группах включают в себя, явно или неявно, некоторое прямое разложение.

Хорошо известна важная роль отображений различных алгебраических систем, среди которых особое значение имеют гомоморфизмы. Одной из исключительных особенностей абелевых групп является то, что множество всех гомоморфизмов $\text{Hom}(A, B)$ является группой относительно поточечного сложения гомоморфизмов. Изучение строения этой группы представляет большой интерес для теории абелевых групп.

Имеются важные связи между прямыми суммами, произведениями и группами гомоморфизмов абелевых групп. При изучении гомоморфизмов абелевых групп определённый интерес представляют так называемые K -большие абелевы

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 3, с. 51–60.

© 2007 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

группы. При изучении группы $\text{Hom}(A, B)$ как инъективного модуля над кольцом эндоморфизмов группы A или B важную роль играет свойство, похожее на основное свойство K -больших групп (см. [1; 3, гл. 4]).

В разделе 1 определяются K -большие абелевы группы. Рассматриваются некоторые свойства этих групп. В разделе 2 обобщается понятие K -большой абелевой группы, а именно вводятся обобщённо K -большие группы. Сформулировано и доказано необходимое и достаточное условие для того, чтобы группа была обобщённо большой относительно класса всех групп. Получена характеристика всех K -больших (обобщённо K -больших) абелевых групп относительно класса всех групп без кручения. В разделе 3 в качестве K берётся множество ограниченных p -групп для бесконечного множества простых чисел p и характеризуются периодические группы и группы без кручения относительно данного класса K .

Дадим необходимые определения. Группа A называется ограниченной, если существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $mA = 0$, или, равносильно, $ma = 0$ для любого элемента $a \in A$. Под рангом группы без кручения понимается мощность максимальной линейно независимой системы её элементов. Другие используемые термины и обозначения стандартны и соответствуют [2, 4]. Все рассматриваемые в работе группы абелевы.

1. K -большие абелевы группы и их свойства

Пусть K — некоторый класс абелевых групп. Группу A назовём большой относительно K или K -большой, если для любых групп $B_i \in K$ ($i \in I$, I — некоторое индексное множество) выполняется равенство

$$\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{i \in I} B_i\right) = \text{Hom}\left(A, \prod_{i \in I} B_i\right). \quad (1)$$

Равенство (1) равносильно тому, что для всякого гомоморфизма

$$\omega: A \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$$

выполняется включение

$$\omega A \subseteq \bigoplus_{i \in I} B_i,$$

т. е.

$$\omega: A \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i.$$

Приведём некоторые первичные свойства K -больших групп. Их доказательства несложно получить из определения K -большой группы.

1. Если A — K -большая группа и $A = C \oplus B$, то C тоже будет K -большой группой.

2. Если $A_1, \dots, A_n$ — K -большие группы и $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$, то A — K -большая группа.
3. Если A — K -большая группа, X — подгруппа в A , то фактор-группа A/X — K -большая группа.

Предложение 1.1. *Не существует групп, больших относительно класса всех абелевых групп.*

Доказательство. Покажем, что для любой группы A найдутся группы A_i ($i = 1, 2, \dots$), такие что

$$\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i\right) \neq \text{Hom}\left(A, \prod_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

Обозначим $B_1 = B_2 = \dots = A$. Определим отображение

$$\omega: A \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

следующим образом. Для любого $a \in A$ положим

$$\omega: a \rightarrow (a, a, \dots, a, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Тогда ω является гомоморфизмом, для которого $\omega A \not\subseteq \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$. Следовательно, $\omega \notin \text{Hom}\left(A, \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i\right)$, откуда

$$\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i\right) \neq \text{Hom}\left(A, \prod_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

или

$$\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i\right) \neq \text{Hom}\left(A, \prod_{i=1}^{\infty} B_i\right). \quad \square$$

Предложение 1.2. *В определении K -большой группы можно ограничиться счётным множеством групп B_i .*

Доказательство. Предположим, что равенство

$$\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \text{Hom}\left(A, \prod_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$

справедливо для любого счётного множества групп $B_i \in K$.

Допустим, что существуют индексное множество I и группы B_i ($i \in I$), для которых

$$\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{i \in I} B_i\right) \neq \text{Hom}\left(A, \prod_{i \in I} B_i\right)$$

(понятно, что I — бесконечное множество). Тогда $\omega A \not\subset \bigoplus_{i \in I} B_i$ для какого-то $\omega: A \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$. Следовательно, существует $a \in A$, для которого $(\dots, b_i, \dots) = \omega(a) \notin \bigoplus_{i \in I} B_i$. Понятно, что вектор $(\dots, b_i, \dots)$ имеет бесконечно много координат, не равных нулю. Запишем группу $\prod_{i \in I} B_i$ в виде $\prod_{i \in I} B_i = \prod_{i=1}^{\infty} B_i \oplus X$, где X — некоторая группа. Построим гомоморфизм $\omega': A \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} B_i$, такой что $\omega' A \not\subset \bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i$. Возьмём проекцию $\pi: \prod_{i \in I} B_i \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} B_i$ и положим $\omega' = \pi\omega$. Отображение ω' и будет искомым гомоморфизмом. Заключаем, что

$$\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i\right) \neq \text{Hom}\left(A, \prod_{i=1}^{\infty} B_i\right).$$

Но это противоречит условию. Значит, A — K -большая группа. $\square$

Предложение 1.3. Пусть K — некоторый класс групп. Если каждая группа A_j ($j \in J$) большая относительно K , то и прямая сумма $\bigoplus_{j \in J} A_j$ является большой относительно K .

Доказательство. Имеет место равенство

$$\text{Hom}\left(A_j, \bigoplus_{i \in I} B_i\right) = \text{Hom}\left(A_j, \prod_{i \in I} B_i\right)$$

для любых групп $B_i \in K$ и индексного множества I , а также для каждого $j \in J$. Так как

$$\text{Hom}\left(\bigoplus_{j \in J} A_j, \bigoplus_{i \in I} B_i\right) \cong \prod_{j \in J} \text{Hom}\left(A_j, \bigoplus_{i \in I} B_i\right) \quad (2)$$

и по условию

$$\text{Hom}\left(A_j, \bigoplus_{i \in I} B_i\right) = \text{Hom}\left(A_j, \prod_{i \in I} B_i\right),$$

то

$$\prod_{j \in J} \text{Hom}\left(A_j, \bigoplus_{i \in I} B_i\right) = \prod_{j \in J} \text{Hom}\left(A_j, \prod_{i \in I} B_i\right).$$

Используя (2), получаем

$$\prod_{j \in J} \text{Hom}\left(A_j, \prod_{i \in I} B_i\right) \cong \text{Hom}\left(\bigoplus_{j \in J} A_j, \bigoplus_{i \in I} B_i\right).$$

Далее,

$$\text{Hom}\left(\bigoplus_{j \in J} A_j, \bigoplus_{i \in I} B_i\right) = \text{Hom}\left(\bigoplus_{j \in J} A_j, \prod_{i \in I} B_i\right).$$

Это равенство означает, что $\bigoplus_{j \in J} A_j$ — большая относительно K группа. $\square$

2. Обобщённо K -большие группы, их связь с K -большими группами

Можно следующим образом обобщить понятие K -большой группы.

Назовём группу A обобщённо K -большой, если для любых групп $B_i \in K$ ($i \in I$) и любого гомоморфизма $\omega: A \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\omega(nA) \subseteq \bigoplus_{i \in I} B_i$.

Приведём несколько свойств обобщённо K -больших групп, подобных свойствам K -больших групп.

1. Если A — обобщённо K -большая группа и $A = C \oplus B$, то C также обобщённо K -большая группа.
2. Если $A_1, \dots, A_n$ — обобщённо K -большие группы и $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$, то A также является обобщённо K -большой группой.
3. Если A — обобщённо K -большая группа, X — подгруппа в A , то фактор-группа A/X также обобщённо K -большая группа.

Теорема 2.1. *Группа является обобщённо большой относительно класса всех групп тогда и только тогда, когда она ограниченная.*

Доказательство. Необходимость. Пусть группа A обобщённо большая относительно класса всех групп. Допустим, что A не является ограниченной.

Для любого $i \in \mathbb{N}$ возьмём в качестве B_i копию группы A . Образует произведение

$$\prod_{i=1}^{\infty} B_i = \prod_{\aleph_0} A,$$

где $\prod_{\aleph_0} A$ — произведение счётного числа копий A .

Построим отображение $\omega: A \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} B_i$, полагая $\omega: a \rightarrow (\dots, a, \dots)$ для любого $a \in A$. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\omega(ka) = (\dots, ka, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} B_i$. Так как по предположению группа A обобщённо большая, то существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\omega(na) \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i$ для любого $a \in A$. Это значит, что $\omega(na) = (\dots, 0, \dots)$, т. е. $na = 0$ для любого $a \in A$.

Таким образом, порядки элементов группы A ограничены числом $n \in \mathbb{N}$. Мы пришли к противоречию, значит, A — ограниченная группа.

Достаточность. По определению обобщённо большой группы для любых групп B_i и любого гомоморфизма $\omega: A \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$ должно существовать $n \in \mathbb{N}$, такое что $\omega(nA) \subseteq \bigoplus_{i \in I} B_i$. В качестве n можно взять m , где $mA = 0$. Теорема доказана. $\square$

Предложение 2.2. *Любая периодическая группа будет обобщённо K -большой (K -большой), если K — класс всех групп без кручения.*

Доказательство этого предложения получается непосредственно из определений. $\square$

Предложение 2.3. *Никакая группа без кручения не является K -большой (обобщённо K -большой) группой, если K — класс всех групп без кручения.*

Доказательство. Пусть A — произвольная группа без кручения. Построим нужный гомоморфизм $\omega: A \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} B_i$, где B_i — некоторые группы без кручения ($i \geq 1$). Для всех i в качестве группы B_i возьмём группу $Q_i = Q$. Нужно построить такой гомоморфизм $\omega: A \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} Q_i$, что для некоторого $a \in A$ выполняется $\omega(a) \notin \bigoplus_{i=1}^{\infty} Q_i$. Так как Q — делимая группа, то прямое произведение $\prod_{i=1}^{\infty} Q_i$ также является делимой группой.

Строим гомоморфизм $\omega: \langle a \rangle \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} B_i$, полагая $\omega: a \rightarrow (\dots, a, \dots)$ для любого $a \in A$. Продолжим, используя свойство инъективности группы $\prod_{i=1}^{\infty} Q_i$, гомоморфизм ω до гомоморфизма $\bar{\omega}: A \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} Q_i$. Получили, что существует гомоморфизм $\bar{\omega}: A \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} B_i$, для которого $\bar{\omega}(a) \notin \bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i$. Таким образом, группа без кручения A не является K -большой. $\square$

Предложение 2.4. *Смешанная группа не является обобщённо K -большой (K -большой), если K — класс всех групп без кручения.*

Доказательство. Пусть A — смешанная группа. Обозначим через $t(A)$ периодическую часть группы A , тогда $A/t(A)$ — группа без кручения.

Допустим, что A — обобщённо K -большая группа, где K — класс всех групп без кручения. Тогда по свойству 3) для обобщённо больших групп фактор-группа $A/t(A)$ также обобщённо большая группа. Мы пришли к противоречию с предложением 2.3. $\square$

3. K -большие группы для $K = \{C_p \mid p \in T\}$, где T — некоторое бесконечное множество простых чисел

Пусть T — некоторое бесконечное множество простых чисел. Возьмём в качестве K множество групп C_p , где C_p есть ограниченная p -группа для любого $p \in T$ (в частности, может быть $C_p = \mathbb{Z}(p)$).

Для группы X положим $\pi(X) = \{p \mid p \text{ — простое число и } pX \neq X\}$.

Предложение 3.1. *Всякая периодическая группа A является K -большой, если $K = \{C_p \mid p \in T\}$.*

Доказательство. Пусть A — периодическая группа. Так как

$$t\left(\prod_{p \in T} C_p\right) = \bigoplus_{p \in T} C_p,$$

то, очевидно, $\omega A \subseteq \bigoplus_{p \in T} C_p$ для любого гомоморфизма $\omega: A \rightarrow \prod_{p \in T} C_p$. $\square$

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 3.2. *Группа A без кручения является K -большой тогда и только тогда, когда для любой сервантной подгруппы X ранга 1 группы A множество $\pi(X) \cap T$ является конечным.*

Доказательство. Пусть A — группа без кручения. Можно считать, что A — редуцированная группа. Действительно, если A не является редуцированной, то запишем $A = D \oplus B$, где D — ненулевая делимая, B — редуцированная группы. Тогда

$$\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{p \in T} C_p\right) = \text{Hom}\left(D, \bigoplus_{p \in T} C_p\right) \oplus \text{Hom}\left(B, \bigoplus_{p \in T} C_p\right) = \text{Hom}\left(B, \bigoplus_{p \in T} C_p\right),$$

так как

$$\text{Hom}\left(D, \bigoplus_{p \in T} C_p\right) = 0,$$

в силу того что $\bigoplus_{p \in T} C_p$ — редуцированная группа.

Аналогично

$$\text{Hom}\left(A, \prod_{p \in T} C_p\right) = \text{Hom}\left(D, \prod_{p \in T} C_p\right) \oplus \text{Hom}\left(B, \prod_{p \in T} C_p\right) = \text{Hom}\left(B, \prod_{p \in T} C_p\right).$$

Докажем необходимость условия. Допустим, что группа A без кручения является K -большой и X — сервантная подгруппа ранга 1 группы A , такая что $\pi(X) \cap T$ — бесконечное множество.

Для любого $p \in \pi(X) \cap T$ имеем $pX \neq X$ и $X/pX \cong \mathbb{Z}(p)$. Существует ненулевой гомоморфизм $\bar{\varphi}_p: X/pX \rightarrow C_p$. Для $p \in \pi(X) \cap T$ определим гомоморфизм $\varphi_p: X \rightarrow C_p$ по формуле $\varphi_p(x) = \bar{\varphi}_p(x + pX)$ для любого $x \in X$. Если $p \in T$ и $p \notin \pi(X) \cap T$, то полагаем $\varphi_p = 0$. Таким образом, для каждого $p \in T$ имеем гомоморфизм $\varphi_p: X \rightarrow C_p$. Определим теперь гомоморфизм $\varphi: X \rightarrow \prod_{p \in T} C_p$, положив $\varphi(x) = (\varphi_p(x))_{p \in T}$ для любого $x \in X$.

По построению $\varphi(X) \not\subseteq \bigoplus_{p \in T} C_p$. Группа $\prod_{p \in T} C_p$ сервантно инъективна как прямое произведение ограниченных групп [2, § 30]. Значит, φ продолжается до гомоморфизма $\bar{\varphi}: A \rightarrow \prod_{p \in T} C_p$. Так как $\varphi(X) \not\subseteq \bigoplus_{p \in T} C_p$, то $\bar{\varphi} \notin \text{Hom}\left(A, \bigoplus_{p \in T} C_p\right)$, что противоречит предположению. Значит, $\pi(X) \cap T$ — конечное множество.

Теперь докажем достаточность условия. Пусть $\pi(X) \cap T$ — конечное множество для любой сервантной подгруппы X ранга 1 группы A . Допустим, что нашёлся гомоморфизм $\psi: A \rightarrow \prod_{p \in T} C_p$, такой что $\psi(A) \not\subseteq \bigoplus_{p \in T} C_p$. Существует элемент $x \in A$, такой что $\psi(x) \notin \bigoplus_{p \in T} C_p$. Пусть $\psi(x) = (c_p) \in \prod_{p \in T} C_p$, где $c_p \in C_p$ для любого $p \in T$. Тогда $c_p \neq 0$ для некоторого бесконечного подмножества $T' \subseteq T$ и p -высота элемента x равна нулю.

Пусть X — сервантная подгруппа группы A , порождённая элементом x . Тогда $pX \neq X$ для любого $p \in T'$. Значит, $T' \subseteq \pi(X) \cap T$, а так как T' — бесконечное подмножество, то и $\pi(X) \cap T$ — бесконечное множество, что противоречит условию.

Следовательно,

$$\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{p \in T} C_p\right) = \text{Hom}\left(A, \prod_{p \in T} C_p\right),$$

и группа A без кручения является K -большой. $\square$

В частности, в качестве K можно взять множество групп $\{\mathbb{Z}(p) \mid p \in T\}$, где T — множество всех простых чисел. Тогда в теореме 3.2 $\pi(X) \cap T = \pi(X)$ и $\pi(X)$ — конечное множество.

Группа X называется почти делимой, если $pX = X$ для почти всех $p \in T$ или, что равносильно, $\pi(X)$ — конечное множество. Теорему 3.2 для такого множества T можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3.3. *Группа A без кручения является K -большой, где $K = \{\mathbb{Z}(p) \mid p \in T\}$, тогда и только тогда, когда для любой сервантной подгруппы X ранга 1 группы A множество $\pi(X)$ является конечным.*

Применим теорему 3.2 к некоторым известным группам без кручения.

Следствие 3.4. *Сепарабельная группа A без кручения является K -большой тогда и только тогда, когда для любого прямого слагаемого Y ранга 1 группы A множество $\pi(Y) \cap T$ является конечным.*

Доказательство. Необходимость. Пусть A — K -большая группа. Тогда по теореме 3.2 $\pi(X) \cap T$ — конечное множество для любой сервантной подгруппы X ранга 1 группы A . В частности, $\pi(Y) \cap T$ — конечное множество для любого прямого слагаемого Y группы A .

Достаточность. Пусть $\pi(Y) \cap T$ — конечное множество для любого прямого слагаемого Y ранга 1 группы A . Нужно доказать, что A является K -большой группой, где $K = \{C_p \mid p \in T\}$.

Пусть X — произвольная сервантная подгруппа ранга 1 группы A . Покажем, что $\pi(X) \cap T$ — конечное множество. Напомним основное свойство сепарабельных групп: любое конечное множество элементов сепарабельной группы можно вложить в прямое слагаемое, являющееся прямой суммой групп ранга 1. Возьмём произвольный ненулевой элемент $x \in X$. Группу A можно представить

в виде $A = Y_1 \oplus \dots \oplus Y_n \oplus B$, где $x \in Y_1 \oplus \dots \oplus Y_n$ и все Y_i имеют ранг 1. Пусть $x = y_1 + \dots + y_n$, где $y_1 \in Y_1, \dots, y_n \in Y_n$.

Возьмём некоторое $p \in \pi(X) \cap T$. p -высота элемента x конечна. По свойству p -высот

$$h_p(y_1 + \dots + y_n) = \min(h_p(y_1), \dots, h_p(y_n)).$$

Существует такой индекс k , что $h_p(y_k) \neq \infty$. Тогда $p \in \pi(Y_k) \cap T$. Получили, что

$$\pi(X) \cap T \subset \bigcup_{k=1}^n (\pi(Y_k) \cap T).$$

Так как $\pi(Y_k) \cap T$ — конечное множество, то и $\pi(X) \cap T$ — конечное множество. Применяя теорему 3.2, заключаем, что A — K -большая группа. Следствие доказано. $\square$

Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ ($r(A_i) = 1$) — вполне разложимая группа без кручения.

Понятно, что вполне разложимая группа является сепарабельной, поэтому для неё справедливо следствие 3.4, однако условие можно упростить. Именно, группа A является K -большой тогда и только тогда, когда для любого слагаемого A_i множество $\pi(A_i) \cap T$ является конечным.

Следствие 3.5. Векторная группа $A = \prod_{i \in I} A_i$ ($r(A_i) = 1$) является K -большой тогда и только тогда, когда $\bigcup_{i \in I} (\pi(A_i) \cap T)$ — конечное множество.

Доказательство. Необходимость. Пусть векторная группа A является K -большой. Предположим, что $\bigcup_{i \in I} (\pi(A_i) \cap T)$ — бесконечное множество. Ввиду теоремы 3.2 каждое множество $\pi(A_i) \cap T$ конечно. Понятно, что в таком случае существует вектор $x \in A$, $x = \langle a_i \rangle_{i \in I}$ ($a_i \in A_i$), обладающий следующими свойствами. Найдётся бесконечное подмножество J множества I , такое что элемент a_j имеет конечную p -высоту для каждого $j \in J$, где $p_j \in T$, причём различным j соответствуют различные p_j . Запишем $A = \prod_{j \in J} A_j \oplus \prod_{i \in I \setminus J} A_i$. Выберем

некоторый ненулевой гомоморфизм $\varphi_j: A_j \rightarrow C_{p_j}$ для каждого $j \in J$. Пусть φ — гомоморфизм $A \rightarrow \prod_{p \in T} C_p$, совпадающий с φ_j на A_j ($j \in J$) и аннулирующий

$\prod_{i \in I \setminus J} A_i$. Но существование такого φ противоречит тому, что A — K -большая группа. Значит, $\bigcup_{i \in I} (\pi(A_i) \cap T)$ — конечное множество.

Достаточность. Пусть $\bigcup_{i \in I} (\pi(A_i) \cap T)$ — конечное множество. Если слагаемых A_j конечное число, т. е. A — вполне разложимая группа, то A будет K -большой по условию и свойству 2) из раздела 1.

Пусть число слагаемых A_j бесконечно. Возьмём произвольную сервантную подгруппу X ранга 1 группы A . Пусть ненулевой вектор x принадлежит X ,

$x = \langle a_i \rangle_{i \in I}$, где $a_i \in A_i$. Возьмём $p \in \pi(X) \cap T$, тогда p -высота элемента x конечна. Следовательно, p -высота какого-то элемента a_j конечна. Значит, $pA_j \neq A_j$ и $p \in \pi(A_j) \cap T$. Таким образом, $\pi(X) \cap T \subseteq \bigcup_{i \in I} (\pi(A_i) \cap T)$ и $\pi(X) \cap T$ — конечное множество. По теореме 3.2 получаем, что A — K -большая группа. $\square$

Следствие 3.6. *Группа A конечного ранга является K -большой тогда и только тогда, когда множество $\pi(A) \cap T$ является конечным.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $\pi(A) \cap T$ — конечное множество и X — произвольная сервантная подгруппа ранга 1 группы A . Если $pX \neq X$, то $pA \neq A$, следовательно, $\pi(X) \subseteq \pi(A)$ и $\pi(X) \cap T \subseteq \pi(A) \cap T$. А так как $\pi(A) \cap T$ — конечное множество, $\pi(X) \cap T$ также является конечным множеством. Тогда по теореме 3.2 группа A является K -большой.

Необходимость. Пусть A — группа конечного ранга n . Возьмём некоторую максимальную линейно независимую систему элементов $x_1, \dots, x_n$ группы A . Положим $X_1 = \langle x_1 \rangle_*$, $\dots$, $X_n = \langle x_n \rangle_*$. Предположим, что A — K -большая группа. Справедливо равенство $\pi(A) = \bigcup_{i=1}^n \pi(X_i)$. Поскольку $\pi(X) \subseteq \pi(A)$ для любой сервантной подгруппы X ранга 1 группы A , получаем, что $\pi(X_1), \dots, \pi(X_n) \subseteq \pi(A)$. Отсюда $\bigcup_{i=1}^n \pi(X_i) \subseteq \pi(A)$.

Пусть $p \in \pi(A)$. Существует ли такое i , что $p \in \pi(X_i)$? Предположим, что $p \notin \pi(X_i)$ для любого $i \in 1, \dots, n$, т. е. $pX_i = X_i$. Отсюда следует, что и

$$p\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i\right) = \bigoplus_{i=1}^n X_i.$$

Действительно, для элемента $a \in A$ существует такое натуральное число m , что $ma \in \bigoplus_{i=1}^n X_i$, т. е. группа $A / \bigoplus_{i=1}^n X_i$ является периодической. Так как группа $\bigoplus_{i=1}^n X$ делится на p , то и вся группа A делится на p , т. е. $pA = A$, что противоречит предположению. Значит, множество $\pi(A) \cap T$ является конечным. $\square$

Литература

- [1] Крылов П. А., Пахомова Е. Г. Абелевы группы как инъективные модули над кольцами эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. мат. — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1365—1384.
- [2] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974. — Т. 1.
- [3] Grinshpon S. Ya., Krylov P. A. Fully invariant subgroups, full transitivity, and homomorphism groups of Abelian groups // J. Math. Sci. — 2005. — Vol. 128, no. 3. — P. 2894—2997.
- [4] Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. Endomorphism Rings of Abelian Groups. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2003.

Статья поступила в редакцию в мае 2006 г.