Почти вполне разложимые группы без кручения конечного ранга с циклическим фактором

С. Ф. КОЖУХОВ, А. С. ТВЕРЕТИН
Сургутский государственный университет

УДК 512.541.7

Ключевые слова: абелева группа, жёсткая система, квазиразложение, сервантность.

Аннотация

В работе изучаются почти вполне разложимые группы G конечного ранга, у которых типы слагаемых ранга 1 попарно несравнимы. Известно, что любая такая группа обладает единственным с точностью до равенства полным квазиразложением A. Рассматривается вопрос о количестве почти вполне разложимых групп G с заданным полным квазиразложением A, для которых G/A изоморфно $\mathbb{Z}(p^m)$.

Abstract

S. F. Kozhukhov, A. S. Tveretin, Completely torsion-free, finite-rank, almost decomposable groups with torsion factor, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 3, pp. 61—67.

This paper deals with almost completely decomposable finite rank groups G that have rank 1 summands of pairwise noncomparable types. It is well known that every such group has unique complete quasi-decomposition A with respect to equality. We consider the number of almost completely decomposable groups G with a given quasi-decomposition A for which G/A is isomorphic to $\mathbb{Z}(p^m)$.

Абелева группа без кручения конечного ранга называется квазиразложимой, если она содержит разложимую в прямую сумму подгруппу, такую что фактор-группа по ней конечна. В противном случае группа называется сильно неразложимой. Любая квазиразложимая группа G конечного ранга обладает такими подгруппами $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} A_i = A$, что каждая подгруппа A_i сильно неразложима и сервантна в G, а фактор-группа $G/A = T$ — конечная группа. Всякая такая подгруппа A называется полным квазиразложением группы G. Известно [1], что если группы A_i, $i = 1, \ldots, n$, образуют жёсткую систему (в том смысле, что $\operatorname{Hom}(A_i, A_j) = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$), то группа A будет единственным полным квазиразложением группы G. Следовательно, фактор-группа T также определяется однозначно. Естественно поставить вопрос о количестве различных групп G с фиксированным полным квазиразложением A и фиксированной группой T. Следуя [1], всякую такую группу назовём (A, T)-группой. Все обозначения и терминология стандартны и взяты из [2, 3].

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 3, с. 61—67.

В работе рассматривается жёсткая система сильно неразложимых групп A_i ранга 1, а группа T изоморфна циклической группе $\mathbb{Z}(p^m)$. Изучается вопрос о количестве групп G конечного ранга с полным квазиразложением $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$ (такие группы называются почти вполне разложимыми), фактор-группа по которому изоморфна $\mathbb{Z}(p^m)$, т. е. вопрос о количестве $\big(A, \mathbb{Z}(p^m)\big)$-групп. При этом все такие группы G рассматриваются как подгруппы делимой оболочки и изучается вопрос о количестве этих подгрупп. Все группы определены с точностью до равенства.

Согласно [1] для $\big(A, \mathbb{Z}(p^m)\big)$-группы G полное квазиразложение $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ единственно с точностью до равенства, т. е. если $A' = A'_1 \oplus \ldots \oplus A'_n$, то не только $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n = A'_1 \oplus \ldots \oplus A'_n$, но и каждая подгруппа A_i совпадает с какой-то подгруппой A'_j, и наоборот. Кроме того, в [1] показано, что любое сервантное прямое слагаемое группы G является сервантной оболочкой некоторого семейства групп A_i. Поэтому если G — разложимая в прямую сумму $\big(A, \mathbb{Z}(p^m)\big)$-группа, то одно из прямых слагаемых само является прямой суммой некоторых подгрупп A_i. В самом деле, пусть $G = B \oplus C$. Тогда согласно [1] $B = \langle A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k} \rangle_*$, $C = \langle A_{i_{k+1}} \oplus \ldots \oplus A_{i_n} \rangle_*$, где через $\langle\ \rangle_*$ обозначается сервантная оболочка в группе G соответствующего множества, а i_j просто перестановка. В этом случае $A_B = A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}$ — полное квазиразложение группы B, а $A_C = A_{i_{k+1}} \oplus \ldots \oplus A_{i_n}$ — полное квазиразложение группы C, и естественно $A = A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k} \oplus A_{i_{k+1}} \oplus \ldots \oplus A_{i_n}$. Из условия $G/A \cong \mathbb{Z}(p^m)$ следует, что

$$B/A_B \oplus C/A_C \cong \mathbb{Z}(p^m).$$

Так как группа $\mathbb{Z}(p^m)$ неразложима, то одно из слагаемых равно нулю, т. е. B или C есть прямая сумма подгрупп A_{i_j}.

Для подсчёта общего количества $\big(A, \mathbb{Z}(p^m)\big)$-групп достаточно рассмотреть неразложимые группы. В таком случае естественно считать, что ни одна из подгрупп A_i не является p-делимой. В самом деле, пусть, например, группа A_1 p-делима. Тогда из соотношения $p^m G \subset A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$ следует, что $p^m G \subset A_1 \oplus G_1$, где $G_1 = \langle A_2 \oplus \ldots \oplus A_n \rangle_*$. Если g — произвольный элемент группы G, то $p^m g = a_1 + g_1$ для некоторых элементов $a_1 \in A_1$ и $g_1 \in G_1$. В силу p-делимости группы A_1 для подходящего элемента $\bar{a}_1 \in A_1$ имеем равенство $p^m \bar{a}_1 = a_1$. В таком случае $p^m g = p^m \bar{a}_1 + g_1$, или $p^m(g - \bar{a}_1) = g_1 \in G_1$. Ввиду сервантности подгруппы G_1 в группе G имеем $g - \bar{a}_1 = \bar{g}_1 \in G_1$. Следовательно, $g = \bar{a}_1 + \bar{g}_1$, что означает равенство $G = A_1 \oplus G_1$, т. е. G разложима.

Итак, ни одна из подгрупп A_i, $i = 1, \ldots, n$, не является p-делимой. Выберем в каждой из них элемент a_i^0 нулевой p-высоты. Заметим, что тогда смежный класс $a_i^0 + p^m A_i$ будет образующим для циклической группы $A_i / p^m A_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Пусть G — произвольная $\big(A, \mathbb{Z}(p^m)\big)$-группа. Группа G/A изоморфна группе $\mathbb{Z}(p^m)$. Если $g + A$ — образующий этой фактор-группы, то

$$G = \langle A, g \mid p^m g = a_1 + \ldots + a_n,\ a_i \in A_i,\ i = 1, \ldots, n \rangle.$$

Для каждого $i = 1, \ldots, n$ имеем $a_i + p^m A_i = s_i(a_i^0 + p^m A_i)$, где $0 \leqslant s_i < p^m$. Следовательно, $a_i = s_i a_i^0 + p^m a_i'$ для некоторых элементов $a_i' \in A_i$, $i = 1, \ldots, n$. В таком случае из $p^m g = a_1 + \ldots + a_n$ следует, что

$$p^m(g - a_1' - \ldots - a_n') = s_1 a_1^0 + \ldots + s_n a_n^0$$

для любого $g \in G$. Обозначим через g_1 элемент $g - a_1' - \ldots - a_n'$.

Лемма 1. *Для вышеуказанной группы G имеет место равенство*

$$G = \langle A, g \mid p^m g = a_1 + \ldots + a_n,\ a_i \in A_i,\ i = 1, \ldots, n \rangle = \\ = \langle A, g_1 \mid p^m g_1 = s_1 a_1^0 + \ldots + s_n a_n^0 \rangle.$$

Доказательство. По построению $g_1 \in \langle A, g \rangle$, а значит, $\langle A, g_1 \rangle \subseteq \langle A, g \rangle$. Поскольку можно записать $g = g_1 + a_1' + \ldots + a_n'$, то $g \in \langle A, g_1 \rangle$, поэтому $\langle A, g \rangle \subseteq \langle A, g_1 \rangle$. Объединяя включения, получим $\langle A, g \rangle = \langle A, g_1 \rangle$. □

Таким образом, каждой $\big(A, \mathbb{Z}(p^m)\big)$-группе ставится в соответствие некоторый целочисленный вектор $(s_1, \ldots, s_n)$, $0 \leqslant s_i < p^m$, $i = 1, \ldots, n$. Этот вектор зависит от выбора образующего $g+A$ фактор-группы G/A. Здесь и далее предполагаем фиксированными элементы $a_1^0, \ldots, a_n^0$. Выясним, когда два таких вектора определяют одну и ту же группу G.

Лемма 2. *Пусть G и G' — две неразложимые $\big(A, \mathbb{Z}(p^m)\big)$-группы, определяемые векторами $(s_1, \ldots, s_n)$ и $(t_1, \ldots, s_n)$ соответственно. Группы G и G' совпадают тогда и только тогда, когда существует такое целое число λ, что $(\lambda, p) = 1$ и $\lambda s_i \equiv t_i \pmod{p^m}$.*

Доказательство. Пусть

$$G_1 = \langle A, g_1 \mid p^m g_1 = a_1 + \ldots + a_n \rangle, \\ G_2 = \langle A, g_2 \mid p^m g_2 = a_1^* + \ldots + a_n^* \rangle$$

и $G_1 = G_2$. Поскольку $A_i/p^m A_i = \langle a_i^0 + p^m A_i \rangle$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$, то $a_i = s_i a_i^0 + p^m \bar{a}_i$ и $a_i^* = t_i a_i^0 + p^m \bar{a}_i^*$, где $0 < s_i, t_i, p^m$, т. е. группы G_1 и G_2 определяют векторы $(s_1, \ldots, s_n)$ и $(t_1, \ldots, t_n)$ соответственно. Поскольку $G_1 = G_2$, то $g_2 = b_1 + \ldots + b_n + \lambda g_1$, $b_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, n$. Число λ взаимно просто с p. В самом деле, пусть $\lambda = p\lambda'$. Тогда

$$p^{m-1} g_2 = p^{m-1} b_n + p^m \lambda' g_1 = \\ = p^{m-1} b_1 + \ldots + p^{m-1} b_n + \lambda' a_1 + \ldots + \lambda' a_n \in A_1 \oplus \ldots \oplus A_n.$$

Следовательно, порядок элемента $g_2 + A$ в фактор-группе G_2/A не больше p^{m-1}, что противоречит условию $o(g_2 + A) = p^m$. Итак, $(\lambda, p) = 1$. Кроме того, $0 < \lambda < p^m$. Действительно, если $\lambda \geqslant p^m$, то $\lambda = p^m \lambda' + r$, где $0 < r < p^m$. Тогда

$$g_2 = b_1 + \ldots + b_n + (p^m \lambda' + r) g_1 = \\ = b_1 + \ldots + b_n + \lambda' + \ldots + \lambda' a_n + r g_1 = \\ = (b_1 + \lambda' a_1) + \ldots + (b_n + \lambda' a_n) + r g_1.$$

Умножая обе части равенства $g_2 = b_1 + \ldots + b_n + \lambda g_1$ на p^m и подставляя выражения для $p^m g_1$ и $p^m g_2$, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} t_i a_i^0 + p^m \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i{}^* = p^m \sum_{i=1}^{n} b_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} s_i a_i^0 + \lambda p^m \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i.$$

Отсюда для каждого $i = 1, \ldots, n$ получаем

$$t_i a_i^0 + p^m \bar{a}_i{}^* = p^m b_i + \lambda s_i a_i^0 + \lambda p^m \bar{a}_i,$$

что возможно лишь в случае $(\lambda s_i - t_i)a_i^0 \in p^m A_i$, а значит, $\lambda s_i \equiv t_i \pmod{p^m}$.

Обратно, пусть

$$G_1 = \langle A, g_1 \mid p^m g_1 = s_1 a_1^0 + \ldots + s_n a_n^0 \rangle,$$
$$G_2 = \langle A, g_2 \mid P^m g^2 = t_1 a_1^0 + \ldots + t_n a_n^0 \rangle$$

и $\lambda s_i \equiv t_i \pmod{p^m}$, где $(\lambda, p) = 1$, $0 < \lambda < p^m$. Согласно условию имеем $t_i = \lambda s_i + \mu_i p^m$ для подходящих чисел μ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. В таком случае

$$\begin{aligned} p^m g_2 &= t_1 a_1^0 + \ldots + t_n a_n^0 = (\lambda s_1 + \mu_1 p^m) a_1^0 + \ldots + (\lambda s_n + \mu_n p^m) a_n^0 = \\ &= p^m(\mu_1 a_1^0 + \ldots + \mu_n a_n^0) + \lambda(s_1 a_1^0 + \ldots + s_n a_n^0) = \\ &= p^m(\mu_1 a_1^0 + \ldots + \mu_n a_n^0) + \lambda p^m g_1. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $g_2 = \mu_1 a_1^0 + \ldots + \mu_n a_n^0 + \lambda g_1$, т. е. $g_2 \in G_1$, что означает включение $G_2 \subseteq G_1$. Аналогично доказывается обратное включение. Итак, $G_1 = G_2$. □

В следующей лемме даётся ответ на вопрос, какой целочисленный вектор $(s_1, \ldots, s_n)$ определяет неразложимую $\bigl(A, \mathbb{Z}(p^m)\bigr)$-группу.

Лемма 3. *Целочисленный вектор* $(s_1, \ldots, s_n)$ $(0 \leqslant s_i < p^m$, $i = 1, \ldots, n)$ *определяет неразложимую* $\bigl(A, \mathbb{Z}(p^m)\bigr)$*-группу тогда и только тогда, когда для каждого* $i = 1, \ldots, n$ *выполнено* $s_i \neq 0$ *и любые* $n - 1$ *чисел* $s_1, \ldots, s_n$ *взаимно просты с* p.

Доказательство. Итак,

$$G = \langle A, g \mid p^m g = s_1 a_1^0 + \ldots + s_n a_n^0 \rangle,$$

где $0 \leqslant s_i < p^m$. Предположим, что $s_1 = 0$. Тогда из равенства $p^m g = = s_2 a_2^0 + \ldots + s_n a_n^0$ следует, что $g \in \langle A_2 \oplus \ldots \oplus A_n \rangle_*$, а значит,

$$G = A_1 \oplus \langle A_2 \oplus \ldots \oplus A_n \rangle_*,$$

т. е. G разложима, что противоречит предположению. Таким образом, $s_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Предположим, к примеру, что $s_1, \ldots, s_{n-1}$ не взаимно просты с p, т. е. $s_i = p s_i'$, $i = 1, \ldots, n-1$. Тогда из равенства

$$p^m g = s_1 a_1^0 + \ldots + s_{n-1} a_{n-1}^0 + s_n a_n^0 = p s_1' a_1^0 + \ldots + p s_{n-1}' a_{n-1}^0 + s_n a_n^0$$

следует, что

$$s_n a_n^0 = p(p^{m-1} g - s_1' a_1^0 - \ldots - s_{n-1}' a_{n-1}^0),$$

т. е. элемент $s_n a_n^0$ делится на p в группе G, а значит, и в группе A_n ввиду её сервантности. Пусть $s_n a_n^0 = pa_n'$, $a_n' \in A_n$. В таком случае

$$p^m g = s_1' a_1^0 + \ldots + ps_{n-1}' a_{n-1}^0 + pa_n',$$

или

$$p^{m-1} g = s_1' a_1^0 + \ldots + s_{n-1}' a_{n-1}^0 + a_n' \in A.$$

Это противоречит тому, что порядок элемента $g + A$ в фактор-группе G/A равен p^m.

Обратно, пусть

$$G = \langle A, g \mid p^m g = s_1 a_1^0 + \ldots + s_n a_n^0 \rangle,$$

где $0 < s_i < p^m$ и любые $n-1$ чисел $s_1, \ldots, s_n$ взаимно просты с p. Надо показать, что G является неразложимой $\big(A, \mathbb{Z}(p^m)\big)$-группой. Для этого необходимо показать, что

1) A — полное квазиразложение группы G;
2) G — неразложимая группа;
3) $G/A \cong \mathbb{Z}(p^m)$.

Докажем сервантность каждой подгруппы A_i в группе G. Из построения группы G следует, что достаточно показать p-сервантность каждой подгруппы A_i. Итак, пусть $px \in A_1$. Тогда $x = a_1 + \ldots + a_n + \mu g$ для подходящих элементов $a_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, n$, и подходящего целого числа μ. В таком случае

$$p^m x = p^m a_1 + \ldots + p^m a_n + \mu s_1 a_1^0 + \ldots + \mu s_n a_n^0 \in A_1.$$

Отсюда $p^m a_i + \mu s_i a_i^0$ для $i = 2, 3, \ldots, n$. Ввиду выбора элементов a_i^0 имеем $\mu s_i \equiv 0 \pmod{p^m}$ для всех $i = 2, 3, \ldots, n$. Согласно условию хотя бы одно из чисел s_i, $i = 2, 3, \ldots, n$, не делится на p. Следовательно, $\mu = \mu' p^m$. Но в таком случае

$$x = a_1 + \ldots + a_n + \mu' a_1^0 + \mu' a_2^0 + \ldots + \mu' a_n^0$$

и, поскольку $px \in A_1$, $a_i + \mu a_i^0 = 0$ для $i = 2, \ldots, n$, а $x = a_1 + \mu' a_1^0 \in A_1$, что и означает сервантность подгруппы A_1. Поскольку по построению $p^m G \subseteq A$, A является полным квазиразложением группы G.

По построению фактор-группа G/A является циклической группой с образующим $g + A$, порядок которого p^t не превосходит p^m. Предположим, что $t < m$. Это означает, что $p^t g = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ для некоторых элементов $a_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, n$. В таком случае

$$s_1 a_1^0 + \ldots + s_n a_n^0 = p^m g = p^{m-t}(p^t g) = p^{m-t} a_1 + \ldots + p^{m-t} a_n,$$

откуда $p^{m-t} a_i + s_i a_i^0 = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Это возможно лишь в случае, когда $s_i \equiv 0 \pmod{p^{m-t}}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, что противоречит условию. Итак, порядок элемента $g + A$ равен p^m, т. е. $G/A \cong \mathbb{Z}(p^m)$.

Осталось показать, что группа G неразложима. Если группа G разложима, то, как уже отмечалось, одно из прямых слагаемых является прямой суммой некоторых групп A_i. Покажем, что ни одна из групп A_i не выделяется прямым слагаемым в G. Пусть, например, A_1 — прямое слагаемое группы G. Тогда, как отмечалось, $G = A_1 \oplus \langle A_2 \oplus \ldots \oplus A_n \rangle_*$. Так как это прямая сумма, то из условия $p^m g = s_1 a_1^0 + (s_2 a_2^0 + \ldots + s_n a_n^0)$ следует делимость в группе A_1 элемента $s_1 a_1^0$ на p^m. Ввиду выбора элемента a_1^0 имеем $s_1 \equiv 0 \pmod{p^m}$, что невозможно $(0 < s_i < p^m)$. □

По лемме 2 множество удовлетворяющих критерию леммы 3 векторов разбивается на классы эквивалентности по $\varphi(p^m)$ векторов, каждый класс соответствует одному расширению.

Пусть среди групп A_i, $i = 1, \ldots, n$, ровно k групп не p-делимы, $2 \leqslant k \leqslant n$.

Теорема. *Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, где группы A_i образуют жёсткую систему и p-ранг каждой из этих групп равен 1. Общее количество $\bigl(A, \mathbb{Z}(p^m)\bigr)$-групп (с точностью до равенства) равно*

$$\frac{p^{mk} + (k-1)p^{(m-1)k} - kp^{(m-1)k+1}}{\varphi(p^m)},$$

где $\varphi(x)$ — функция Эйлера.

Доказательство. Пусть, к примеру, не p-делимыми являются группы $A_1, \ldots, A_k$. Тогда, как уже отмечалось, $G = G' \oplus (A_{k+1} \oplus \ldots \oplus A_n)$, где $G' = \langle A_1, \ldots, A_k \rangle_*$ и G' является $\bigl(A_1 \oplus \ldots \oplus A_k, \mathbb{Z}(p^m)\bigr)$-группой. Таким образом, надо подсчитать общее количество $\bigl(\bar{A}, \mathbb{Z}(p^m)\bigr)$-групп, где $\bar{A} = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$ и каждая из подгрупп A_i не p-делима, $i = 1, \ldots, k$.

Указанные группы G могут быть как неразложимыми, так и разложимыми в прямую сумму. В последнем случае, как отмечалось, одно из слагаемых является прямой суммой некоторых подгрупп A_i, а другое слагаемое — сервантная оболочка оставшихся подгрупп A_j.

Итак, пусть в $\bigl(A, \mathbb{Z}(p^m)\bigr)$-группе ровно i подгрупп не выделяются прямыми слагаемыми, $2 \leqslant i \leqslant k$. Например, пусть $A_1, \ldots, A_i$ не выделяются прямыми слагаемыми. Тогда $G = \langle A_1 \oplus \ldots \oplus A_i \rangle_* \oplus \ldots \oplus A_k \oplus \ldots \oplus A_n$. Всего таких вариантов может быть C_k^i. Подсчитаем общее количество неразложимых $\bigl(A_1 \oplus \ldots \oplus A_i, \mathbb{Z}(p^m)\bigr)$-групп при фиксированном полном квазиразложении $A_1 \oplus \ldots \oplus A_i$. Каждая такая группа определяется вектором $(s_1, \ldots, s_i)$, где $0 < s_t < p^m$, $t = 1, \ldots, i$, и любые $i-1$ чисел взаимно просты с p. Для определения количества таких векторов надо из общего количества векторов с условием $0 < s_t < p^m$ вычесть векторы, которые не удовлетворяют условию леммы 3. Общее количество векторов с условием $0 < s_t < p^m$ равно $(p^m - 1)^i$. Из этого количества надо, во-первых, вычесть количество тех векторов, в которых все координаты делятся на p. Таких будет $(p^{m-1} - 1)^i$. Во-вторых, надо исключить те векторы, в которых одна из координат не делится на p, а все остальные делятся на p. Координата, не делящаяся на p, может находиться на любом из i мест и принимать любое из $\varphi(p^m)$ значений. Остальные координаты могут принимать $p^{m-1} - 1$ значений. Значит, общее количество таких векторов равно

$i(p^{m-1}-1)^{i-1}\varphi(p^m)$. Таким образом, общее количество векторов, определяющих неразложимые $\big(A_1 \oplus \ldots \oplus A_i, \mathbb{Z}(p^m)\big)$-группы, равно

$$C_k^i[(p^m-1)^i - (p^{m-1}-1)^i - \varphi(p^m)i(p^{m-1}-1^{i-1}].$$

Согласно лемме 2 множество указанных векторов $(s_1, \ldots, s_i)$ разбивается на классы эквивалентности, каждый из которых определяет одну и ту же группу. Так как каждый класс состоит из $\varphi(p^m)$ векторов, то общее количество различных групп равно

$$\frac{1}{\varphi(p^m)}C_k^i[(p^m-1)^i - (p^{m-1}-1)^i] - C_k^i i(p^{m-1}-1)^{i-1}.$$

Чтобы получить общее количество $\big(A, \mathbb{Z}(p^m)\big)$-групп, проведём суммирование по i:

$$\frac{1}{\varphi(p^m)}\sum_{i=2}^{k} C_k^i[(p^m-1)^i - (p^{m-1}-1)^i] - \sum_{i=2}^{k} C_k^i i(p^{m-1}-1)^{i-1}.$$

Просуммируем с помощью бинома Ньютона, добавив недостающие слагаемые (см. также замечание 3). Получим

$$\frac{p^{mk} + (n-1)p^{(m-1)k} - kp^{(m-1)k+1}}{\varphi(p^m)}. \qquad \square$$

Замечание 1. $\varphi(p^m) = p^m - p^{m-1}$.

Замечание 2. Квазиразложение всегда состоит из хотя бы двух групп. Поэтому $i > 1$.

Замечание 3. Вычитаемое имеет вид $\sum\limits_{i=1}^{k} C_k^i\, i\, x^{i-1}$. Оно получается дифференцированием по x выражения $\sum\limits_{i=1}^{k} C_k^i x^i$, равного $(x+1)^k - 1$.

Литература

[1] Кожухов С. Ф. Конечные группы автоморфизмов абелевых групп без кручения конечного ранга // Изв. АН СССР. (Изв. РАН) Сер. мат. — 1988. — Т. 52, № 3. — С. 501—521.

[2] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974. — Т. 1.

[3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1977. — Т. 2.

Статья поступила в редакцию в мае 2006 г.