Полупростые кольца на вполне разложимых абелевых группах

Е. И. КОМПАНЦЕВА
Московский педагогический государственный университет
e-mail: kompantseva@yandex.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, вполне разложимая группа, кольцо на группе, полупростое кольцо.

Аннотация

Абелева группа называется полупростой, если она является аддитивной группой некоторого полупростого ассоциативного кольца. Проблема исследования полупростых групп была сформулирована Бьюмонтом и Лоувером и затем сведена к случаю редуцированных групп. В настоящей работе описаны полупростые группы в классе счётных вполне разложимых абелевых групп.

Abstract

E. I. Kompantseva, Semisimple rings on completely decomposable Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 3, pp. 69—80.

An Abelian group is said to be semisimple if it is the additive group of some semisimple associative ring. The problem of description of semisimple groups was formulated by Beaumont and Lawver; later this problem was reduced to the case of reduced groups. In this paper, we describe semisimple groups in the class of countable completely decomposable groups.

Абелева группа называется полупростой, если она является аддитивной группой некоторого полупростого ассоциативного кольца. Проблема исследования полупростых групп была сформулирована Бьюмонтом и Лоувером в [4] и затем в [1] сведена к случаю редуцированных групп. В настоящей работе описаны полупростые группы в классе счётных вполне разложимых абелевых групп.

Все рассматриваемые группы абелевы, и слово «группа» всюду в дальнейшем означает «абелева группа». Умножением на группе G называется гомоморфизм $\mu\colon G\otimes G\to G$. Это умножение будем часто обозначать знаком $\times$, т. е. $\mu(g_1\otimes g_2)=g_1\times g_2$. Группа G с заданным на ней умножением $\times$ называется кольцом на группе G, которое обозначается $(G,\times)$. Радикал этого кольца, если оно ассоциативно, обозначается $R(G,\times)$.

Пусть R_i — группы без кручения ранга 1, $G=\bigoplus\limits_{i\in I}R_i$ — вполне разложимая группа. Введём следующие обозначения:

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 3, с. 69—80.

$t_i = t(R_i)$ — тип группы R_i;
$t(g)$, $\chi(g)$ — соответственно тип и характеристика элемента $g \in G$;
π_i — проекция группы G на подгруппу R_i;
если $G = A \oplus B$, то π_A — проекция группы G на подгруппу A;
$I_{\mathrm{id}} = \{i \in I \mid t(R_i)$ — идемпотентный тип$\}$;
$I_0 = \{i \in I_{\mathrm{id}} \mid t(R_i)$ содержит бесконечное число нулей$\}$;
$I^*(i) = \{k \in I \mid t(R_k) = t(R_i)\}$, $i \in I$;
$I_{\mathrm{id}}^{[4]} = \{i \in I_{\mathrm{id}} \mid |I^*(i)| \geqslant 4\}$; $I_0^{[4]} = \{i \in I_0 \mid |I^*(i)| \geqslant 4\}$;
$I_{\mathrm{id}}^{[4]}(R_k) = \big\{i \in I_{\mathrm{id}}^{[4]} \mid t(R_i) \geqslant t(R_k)\big\}$; $I_0^{[4]}(R_k) = \big\{i \in I_0^{[4]} \mid t(R_i) \geqslant t(R_k)\big\}$;
$G_{\mathrm{id}}^{[4]} = \bigoplus\limits_{i \in I_{\mathrm{id}}^{[4]}} R_i$; $G_0^{[4]} = \bigoplus\limits_{i \in I_0^{[4]}} R_i$; $G_0^{[4]}(R_k) = \bigoplus\limits_{i \in I_0^{[4]}(R_k)} R_i$.

Будем говорить, что группа R_k удовлетворяет условию $(4;\infty)$, если множество $I_0^{[4]}(R_k)$ бесконечно.

Если $J \subset I$, то $T(J) = \{t(R_j) \mid j \in J\}$.

Если t — некоторый тип, пусть $G(t) = \{g \in G \mid t(g) \geqslant t\}$, $G^*(t)$ — подгруппа, порождённая множеством $\{g \in G \mid t(g) > t\}$, $G_t = \{g \in G \mid t(g) = t\}$.

Пусть $i, j \in I$. Будем говорить, что j является продолжением i (или группа R_j является продолжением группы R_i), если $t(R_j) \geqslant t(R_i)t(R_i)$.

Кольцо $(G, \times)$ на группе $G = \bigoplus\limits_{i \in I} R_i$ называется sp-кольцом, если любая подгруппа $\bigoplus\limits_{i \in J} R_i$ конечного ранга вкладывается в подкольцо $\bigoplus\limits_{i \in K} R_i$ кольца $(G, \times)$, которое также имеет конечный ранг.

Будем говорить, что группа R_k удовлетворяет условию (c), если существует последовательность индексов $k = i_1, i_2, \ldots$ из I, в которой первый элемент равен k, а каждый начиная со второго является продолжением предыдущего.

Лемма 1. *Пусть* $G = \bigoplus\limits_{i \in I} R_i$ — *редуцированная вполне разложимая группа и среди групп* R_i $(i \in I)$ *существует группа, имеющая идемпотентный тип с конечным числом нулей и не удовлетворяющая условию* (c). *Тогда группа* G *не является полупростой.*

Доказательство. Пусть группа R_{i_0} имеет идемпотентный тип t_0 с конечным числом нулей и R_{i_0} не удовлетворяет условию (c). Без потери общности можно считать, что t_0 — максимальный тип в $T(I)$. В этом случае $G(t_0)$ — однородная группа типа t_0 и $G(t_0)$ имеет конечный ранг. Запишем $G(t_0)$ в виде

$$G(t_0) = Re_1 \oplus \ldots \oplus Re_n,$$

где R — собственное подкольцо с единицей 1 кольца рациональных чисел, $t(R) = t_0$.

Пусть $(G, \times)$ — кольцо на G. Нетрудно видеть, что

$$A = \bigcap_p p\big(G(t_0)\big) -$$

ненулевой идеал кольца $(G, \times)$. Покажем, что этот идеал квазирегулярен. Пусть

$$g = g_1 e_1 + \ldots + g_n e_n \in A, \quad g_k \in \bigcap_p pR,$$
$$e_i \times e_j = \tau_{ij} = \tau_{ij}^{(1)} e_1 + \ldots + \tau_{ij}^{(n)} e_n.$$

Рассмотрим уравнение $g + x - g \times x = 0$. Запишем x в виде $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$. Тогда

$$(g_1 e_1 + \ldots + g_n e_n) + (x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) - \\ - (g_1 x_1 \tau_{11} + \ldots + g_1 x_n \tau_{1n} + \ldots + g_n x_n \tau_{nn}) = 0.$$

Это уравнение равносильно системе уравнений над кольцом R

$$\begin{cases} g_1 + x_1 - g_1 x_1 \tau_{11}^{(1)} - \ldots - g_n x_n \tau_{nn}^{(1)} = 0, \\ g_2 + x_2 - g_1 x_1 \tau_{11}^{(2)} - \ldots - g_n x_n \tau_{nn}^{2} = 0, \\ \quad \ldots \\ g_n + x_n - g_1 x_1 \tau_{11}^{(n)} - g_n x_n \tau_{nn}^{(n)} = 0, \end{cases}$$

из которой получаем систему

$$\begin{cases} \bigl(1 - g_1 \tau_{11}^{(1)} - \ldots - g_n \tau_{n1}^{(1)}\bigr) x_1 + \bigl(-g_1 \tau_{12}^{(1)} - \ldots - g_n \tau_{n2}^{(1)}\bigr) x_2 + \ldots + \\ \quad + \bigl(-g_1 \tau_{1n}^{(1)} - \ldots - g_n \tau_{nn}^{(1)}\bigr) x_n = -g_1, \\ \bigl(-g_1 \tau_{11}^{(2)} - \ldots - g_n \tau_{n1}^{(2)}\bigr) x_1 + \bigl(1 - g_1 \tau_{12}^{(2)} - \ldots - g_n \tau_{n2}^{(2)}\bigr) x_2 + \ldots + \\ \quad + \bigl(-g_1 \tau_{1n}^{(2)} - \ldots - g_n \tau_{nn}^{(2)}\bigr) x_n = -g_2, \\ \quad \ldots \\ \bigl(-g_1 \tau_{11}^{(n)} - \ldots - g_n \tau_{n1}^{(n)}\bigr) x_1 + \bigl(-g_1 \tau_{12}^{(n)} - \ldots - g_n \tau_{n2}^{(n)}\bigr) x_2 + \ldots + \\ \quad + \bigl(1 - g_1 \tau_{1n}^{(n)} - \ldots - g_n \tau_{nn}^{(n)}\bigr) x_n = -g_n. \end{cases}$$

Так как определитель основной матрицы данной системы обратим в R, то эта система имеет решение $(a_1, \ldots, a_n)$. Следовательно, элемент $a = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$ является квазиобратным к элементу g. Значит, A — ненулевой квазирегулярный идеал кольца $(G, \times)$ и, следовательно, группа G не является полупростой. □

Лемма 2. *Пусть в группе $G = \bigoplus_{i \in I} R_i$ ни одна из групп R_i не удовлетворяет условию* (c) *и для каждой группы R_i любое продолжение имеет идемпотентный тип. Тогда любое кольцо на G является sp-кольцом.*

Доказательство. Пусть $(G, \times)$ — кольцо на G и $A = \bigoplus_{i \in I_1} R_i$ — конечная прямая сумма. Определим следующие подмножества множества I и подгруппы группы G:

$$J_1 = I_1' = I_1; \quad A_1 = A;$$
$$J_{n+1} = \{i \in I \mid \pi_i(A_n \times A_n) \neq 0\};$$
$$I_{n+1} = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_{n+1} = I_n \cup J_{n+1}; \quad I_{n+1}' = I_{n+1} \setminus I_n;$$
$$A_n = \bigoplus_{i \in I_n} R_i.$$

Пусть $I_1 = \{i_1, \ldots, i_l\}$ и $A = R_{i_1} e_1 \oplus \ldots \oplus R_{i_l} e_l$. Заметим, что из определения множеств I_n следует, что

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall k \in I_n)\ (\exists j \in I_1)\ t_k \geqslant t_j. \tag{1}$$

Покажем, что

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall i_{n+1} \in I_{n+1}')\ (\exists i_n \in I_n')\ (\exists j \in I_1)\ t_{i_{n+1}} \geqslant t_{i_n} \cdot t_j. \tag{2}$$

Пусть $i_{n+1} \in I_{n+1}'$. Тогда $i_{n+1} \in J_{n+1}$, следовательно $\pi_{i_{n+1}}(R_k \times R_s) \neq 0$ для некоторых $k, s \in I_n$. Допустим, что $k, s \notin I_n'$. Тогда $k, s \in I_{n-1}$, так как $I_n' = I_n \setminus I_{n-1}$. Следовательно, $i_{n+1} \in J_n \subset I_n$, что противоречит тому, что $i_{n+1} \in I_{n+1}' = I_{n+1} \setminus I_n$. Значит, $k \in I_n'$ или $s \in I_n'$. Пусть для определённости $s = i_n \in I_n'$. Тогда

$$t(R_{i_{n+1}}) = t\bigl(\pi_{i_{n+1}}(R_k \times R_s)\bigr) \geqslant t_{i_n} \cdot t_k \geqslant t_{i_n} \cdot t_j$$

для некоторого $j \in I_1$ в силу (1).

Индукцией по n покажем, что

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall i_n \in I_n')\ (\exists j_1, \ldots, j_n \in I_1)\ t_{i_n} \geqslant t_{j_1} \cdot \ldots \cdot t_{j_n}. \tag{3}$$

Для $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение (3) выполнено для n, и пусть $i_{n+1} \in I_{n+1}'$. Тогда в силу (2) $t_{i_{n+1}} \geqslant t_{i_n} \cdot t_j$ для некоторого $i_n \in I_n'$ и некоторого $j \in I_1$. По предположению индукции $t_{i_n} \geqslant t_{j_1} \cdot \ldots \cdot t_{j_n}$ для некоторых $j_1, \ldots j_n \in I_1$. Следовательно, $t_{i_{n+1}} \geqslant t_{j_1} \cdot \ldots \cdot t_{j_n} \cdot t_j$. Покажем теперь, что

$$(\forall n > l)\ (\forall i \in I_n')\ t_i \text{ — идемпотентный тип.} \tag{4}$$

Пусть $n > l$ и $i \in I_n'$. Тогда в силу (3) $t_i \geqslant t_{j_1}, \ldots, t_{j_n}$ для некоторых $j_1, \ldots, j_n \in I_1$. Поскольку $j_1, \ldots, j_n$ могут принимать значения $1, \ldots, l$ и $n > l$, то среди индексов $j_1, \ldots, j_n$ найдётся два одинаковых. Следовательно, R_i является продолжением R_j для некоторого $j \in I_1$, а значит, по условию $t(R_i)$ — идемпотентный тип.

Нетрудно видеть, что

$$(\forall n \geqslant l)\ (\forall i_{n+1} \in I_{n+1}')\ (\exists i_n \in I_n')\ i_{n+1} \text{ — продолжение } i_n. \tag{5}$$

Действительно, пусть $n \geqslant l$ и $i_{n+1} \in I_{n+1}'$. Тогда в силу (2) найдётся такой индекс $i_n \in I_n'$, что $t_{i_{n+1}} \geqslant t_{i_n} \cdot t_j$ для некоторого $j \in I_1$. Отсюда получаем, что $t_{i_{n+1}} \geqslant t_{i_n} \cdot t_{i_n}$, так как $t_{i_{n+1}}$ — идемпотентный тип в силу (4). Значит, i_{n+1} является продолжением i_n.

Покажем, наконец, что

$$(\exists \bar{n} \in \mathbb{N})\ I_{\bar{n}}' = \varnothing. \tag{6}$$

Пусть $n > m$, $i_n \in I'_n$, $i_m \in I'_m$. Будем говорить, что i_n является s-продолжением i_m, если существует такая последовательность $i_m, i_{m+1}, \ldots, i_n$, что $i_k \in I'_k$ и i_{k+1} является продолжением i_k для всех $k = \overline{m, n-1}$.

Допустим, что $I'_n \neq \varnothing$ для всех n. Тогда в силу (5) имеем

$$(\forall n > l)\ (\exists \alpha_n \in I'_n)\ \left(\exists i_l^{(n)} \in I'_l\right)\ \alpha_n \text{ является } s\text{-продолжением } i_l^{(n)}.$$

Так как множество I'_l конечно, то существует $i_l \in I'_l$, для которого выполняется следующее условие:

$$(\forall n > l)\ (\exists \alpha_n \in I'_n)\ \alpha_n \text{ является } s\text{-продолжением } i_l. \tag{7}$$

Пусть определена последовательность индексов $i_l, \ldots, i_m$ ($i_k \in I'_k$), в которой каждый член i_k ($k = \overline{l+1, m}$) является продолжением предыдущего и удовлетворяет условию (7) (при замене l на k). Тогда, так как множество I'_{m+1} конечно, существует индекс $i_{m+1} \in I'_{m+1}$, который является продолжением i_m и удовлетворяет условию (7). Таким образом, получим бесконечную последовательность $i_l, \ldots, i_{l+1}, \ldots$, в которой каждый член $i_k \in I'_k$ является продолжением предыдущего. Так как $I'_k \cap I'_s = \varnothing$ при $k \neq s$, то все члены данной последовательности различны, значит, для i_l выполняется условие (c), что противоречит условию. Следовательно, $I'_{\bar{n}} = \varnothing$ при некотором $\bar{n} \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим группу

$$\tilde{A} = A_{\bar{n}} = \bigoplus_{i \in I_{\bar{n}}} R_i.$$

Так как $I_{\bar{n}} = I_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_n$, то

$$A = \bigoplus_{i \in I_1} R_i \subset \tilde{A}.$$

Покажем, что $\tilde{A}$ — подкольцо кольца $(G, \times)$. Пусть $k, s \in I_{\bar{n}}$ и $\pi_i(R_k \times R_s) \neq 0$. Тогда

$$i \in J_{\bar{n}+1} \subset I_{\bar{n}+1} = I_{\bar{n}} \cup I'_{\bar{n}+1}.$$

В силу (5) и (6) $I'_{\bar{n}+1} = \varnothing$, откуда $i \in I_{\bar{n}}$. Следовательно,

$$R_k \times R_s \subset \bigoplus_{i \subset I_{\bar{n}}} = \tilde{A},$$

а значит, $\tilde{A} \times \tilde{A} \subset A$, т. е. $\tilde{A}$ — подкольцо кольца $(G, \times)$. Таким образом, $(G, \times)$ является sp-кольцом. □

Пусть $(A, \times)$ — кольцо без кручения конечного ранга. Тогда A является подкольцом кольца $(\bar{A}, \times)$, определённого на делимой оболочке $\bar{A}$ группы A. По основной теореме Веддербёрна о сепарабельных конечномерных алгебрах существует разложение $\bar{A} = \bar{L} \oplus \bar{M} \oplus \bar{F}$ векторного пространства $\bar{A}$ в прямую сумму векторных пространств; здесь $\bar{L}$ — нильпотентный идеал алгебры $\bar{A}$, $\bar{M}$ — подалгебра $\bar{A}$, являющаяся прямой суммой полных матричных колец, $\bar{F}$ — подалгебра $\bar{A}$, являющаяся прямой суммой полей. Если $L = \bar{L} \cap A$, $M = \bar{M} \cap A$,

$F = \bar{F} \cap A$, то $L \oplus M \oplus F$ — подгруппа конечного индекса группы A и, кроме того, $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{F}$ — делимые оболочки групп L, M, F соответственно (см. [5]).

Лемма 3. *Пусть $A = \bigoplus_{i\in I} R_i$ — вполне разложимая группа конечного ранга, $(A, \times)$ — кольцо на A. Пусть кольцо $\bar{A}$ на делимой оболочке группы A представимо в виде $\bar{A} = \bar{M} \oplus \bar{B}$, где $\bar{M}$ — полное матричное кольцо, $\bar{B}$ — сумма нильпотентного идеала и полупростого кольца. Тогда найдётся тип $t \in T\big(I_{\mathrm{id}}^{[4]}\big)$, такой что*

1) *$M = \bar{M} \cap A$ — однородная группа типа t;*
2) *$\pi_{\bar{M}}\big(A^*(t)\big) = 0$.*

Доказательство. Так как для аддитивной группы $M = \bar{M} \cap A$ группа $\bar{M}$ является делимой оболочкой, то кольцо M — это кольцо типа полупростой алгебры (см. [5]). По [3, лемма 121.6] группа M является однородной группой идемпотентного типа t.

Покажем, что $\pi_{\bar{M}}\big(A^*(t)\big) = 0$. Пусть $a \in \bar{A}^*(t)$, тогда a можно представить в виде $a = r_1 + \ldots + r_n$, где $r_k \in R_{i_k}$ и $t(R_{i_k}) > t$. Пусть $k = \overline{1, n}$, запишем r_k в виде $r_k = m_k + b_k$, где $m_k \in \bar{M}$, $b_k \in \bar{B}$. Так как $\bar{A}$ — делимая оболочка группы A, найдётся натуральное число s, для которого $sm_k \in M = \bar{M} \cap A$ и $sb_k \in B = \bar{B} \cap A$. Допустим, $m_k \neq 0$. Тогда $t(r_k) = t(sr_k) = t(sm_k + sb_k) \leqslant \leqslant t(sm_k) = t$, что противоречит тому, что $t(r_k) > t$. Следовательно, $\pi_{\bar{M}}(r_k) = 0$ для всех $k = \overline{1, n}$, откуда $\pi_{\bar{M}}\big(A^*(t)\big) = 0$.

Покажем, что $t \in T\big(I_{\mathrm{id}}^{[4]}\big)$. Пусть $a \in M$. Тогда $t_M(a) = t$ и, значит, $t_{M\oplus B}(a) = t$. Так как подгруппа $M \oplus B$ имеет в A конечный индекс [5], то $t(A) = t_{M\oplus B}(a) = t$, значит, $M \subset A(t)$. Учитывая, что $M \cap A^*(t) = 0$, получаем

$$M \cong M/\big(M \cap A^*(t)\big) \cong [M + A^*(t)]/A^*(t) \subset A(t)/A^*(t) \cong A_t,$$

следовательно, $A_t \neq 0$ и, значит, $t \in T(I_{\mathrm{id}})$. Кроме того, $\mathrm{r}(A_t) \geqslant \mathrm{r}(M) \geqslant 4$, откуда $t \in T\big(I_{\mathrm{id}}^{[4]}\big)$. □

Лемма 4. *Пусть $G = \bigoplus_{i\in I} R_i$ и $(G, \times)$ — sp-кольцо на G. Пусть среди групп R_i есть группа неидемпотентного типа, не удовлетворяющая ни условию* (c)*, ни условию* $(4; \infty)$*. Тогда кольцо $(G, \times)$ не является полупростым.*

Доказательство. Если среди групп R_i $(i \in I)$ есть группа идемпотентного типа с конечным числом нулей, не удовлетворяющая условию (c), то по лемме 1 кольцо $(G, \times)$ не является полупростым. Пусть любая группа R_i $(i \in I)$, имеющая идемпотентный тип с конечным числом нулей, удовлетворяет условию (c).

Пусть R_0 — группа неидемпотентного типа t_0, не удовлетворяющая ни условию (c), ни условию $(4; \infty)$. Достаточно показать, что $G(t_0)$ — идеал кольца G, не являющийся полупростым. Поэтому без потери общности можно считать, что $G = G(t_0)$. Покажем, что в кольце $(G, \times)$ есть ненулевой ниль-идеал. Легко убедиться, что среди групп R_i $(i \in I)$ нет групп идемпотентного типа с конечным числом нулей, так как в противном случае группа R_0 удовлетворяет условию (c). Так как R_0 не удовлетворяет условию $(4;\infty)$, то $I_{\mathrm{id}}^{[4]} = I_{\mathrm{id}}^{[4]}(R_0)$ — конечное множество. По условию $(G, \times)$ — sp-кольцо, поэтому существует подкольцо A' кольца G, имеющее конечный ранг и содержащее R_0 и $G_{\mathrm{id}}^{[4]}$.

Кольцо A' вложено в кольцо $\bar{A}'$ на делимой оболочке группы A', которое можно представить в виде $\bar{A}' = \bar{L}' \oplus \bar{M}' \oplus \bar{F}'$, где $\bar{L}'$ — ниль-идеал, $\bar{M}'$ — прямая сумма полных матричных колец, $\bar{F}'$ — прямая сумма полей. Если $\bar{L}' = 0$, то $\bar{A}' = \bar{M}' \oplus \bar{F}'$. В этом случае в A' есть подкольцо конечного индекса, являющееся прямой суммой колец типа простой алгебры (см. [5]). По [3, лемма 121.3] аддитивная группа каждого из этих колец является однородной группой идемпотентного типа. Так как в группе A' есть прямое слагаемое неидемпотентного типа, то $\bar{L}' \neq 0$. Пусть c — ненулевой элемент из $L' = \bar{L}' \cap G$. Покажем, что $c \times G$ — ниль-идеал кольца G.

Пусть $g \in G$ и A — подкольцо конечного ранга кольца G, содержащее A' и g. Кольцо A вложено в качестве подкольца в кольцо $\bar{A}$, которое можно представить в виде

$$\bar{A} = \bar{L} \oplus \bar{M}_1 \oplus \ldots \oplus \bar{M}_s \oplus \bar{F},$$

где $\bar{L}$ — нильпотентный идеал кольца $\bar{A}$, $\bar{M}_k$ $(k = \overline{1,s})$ — полные матричные кольца, $\bar{F}$ — прямая сумма полей. Так как в $\bar{F}$ нет ненулевых нильпотентных элементов, то элемент c можно представить в виде $c = x + y_1 + \ldots + y_s$, где $0 \neq x \in \bar{L}$, $y_s \in \bar{M}_s$. Допустим, $y_k \neq 0$ при некотором $k = \overline{1,s}$. Тогда найдётся такой элемент $a \in \bar{M}_k$, что элемент $y_k \times a$ кольца $\bar{M}_k$ не является нильпотентным. Кроме того, существует натуральное n, для которого $a_1 = na \in$ $\in M_k = \bar{M}_k \cap A$ и $a_2 = n(y_k \times a) = y_k \times a_1 \in M_k$, при этом, очевидно, элемент a_2 не является нильпотентным.

По лемме 3 аддитивная группа M_k является однородной группой типа $t \in$ $\in T\big(I_{\mathrm{id}}^{[4]}\big)$. Следовательно, $a_1 \in G(t)$ и, значит, a_1 можно представить в виде $a_1 = u + v$, где $u \in A_t$, $v \in A^*(t)$. Умножая равенство $c = x + y_1 + \ldots + y_s$ на равенство $u + v = a_1$, получим

$$c \times u + c \times v = x \times a_1 + y_k \times a_1. \tag{8}$$

Рассмотрим каждое слагаемое в левой и правой частях равенства (8). Так как $t \in T\big(I_0^{[4]}\big)$, то

$$u \in G_t \subset G_0^{[4]}(R_0) \subset A' \subset \bar{A}'.$$

Из того что $c \in \bar{L}'$ и $\bar{L}'$ — идеал кольца $\bar{A}'$, получаем, что $c_1 = c \times u \in \bar{L}'$. Так как $v \in A^*(t)$ и $A^*(t)$ — идеал кольца $(A, \times)$, то $v_1 = c \times v \in A^*(t)$. Так как $x \in \bar{L}$, $a_1 \in \bar{A}$ и $\bar{L}$ — идеал кольца $\bar{A}$, имеем $x_1 = x \times a_1 \in \bar{L}$.

Теперь равенство (8) можно переписать в виде $c_1 + v_1 = x_1 + a_2$, откуда

$$c_1 = x_1 - v_1 + a_2. \tag{9}$$

Так как c_1 — нильпотентный элемент кольца $(G, \times)$, то $c_1^m = 0$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Из равенства (9) получаем

$$0 = c_1^m = (x_1 - v_1 + a_2)^m = x_2 + v_2 + a_2^m,$$

где $x_2 \in \bar{L}$, $v_2 \in A^*(t)$. Следовательно,

$$0 = \pi_{\bar{M}_k}(0) = \pi_{M_k}(x_2 + v_2 + a_2^m) = \pi_{\bar{M}_k}(x_2) + \pi_{\bar{M}_k}(v_2) + \pi_{\bar{M}_k}(a_2^m) = a_2^m,$$

так как $x_2 \in \bar{L}$ и $\pi_{\bar{M}_k}(v_2) = 0$ по лемме 3. Таким образом, $a_2^m = 0$, что противоречит тому, что a_2 не является нильпотентным элементом. Следовательно, $y_k = 0$ для всех $k = \overline{1, s}$, т. е. $c = x \in \bar{L}$. Так как $\bar{L}$ — идеал кольца $\bar{A}$, то $c \times g \in \bar{L}$ и $c \times g$ — нильпотентный элемент кольца G. Таким образом, $c \times G$ — правый ниль-идеал кольца $(G, \times)$.

Если $c \times G \neq 0$, то $c \times G$ — ненулевой правый нильидеал кольца $(G, \times)$. Если $c \times G = 0$, то $\operatorname{Ann}_G G$ — ненулевой нильпотентный идеал кольца G. Следовательно, $(G, \times)$ не является полупростым кольцом. □

Лемма 5. *Пусть группа* $G = \bigoplus\limits_{i \in I} R_i$ *полупроста. Тогда при любом* $i \in I \setminus I_0$ *группа* R_i *удовлетворяет условию* (c) *или условию* $(4; \infty)$.

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно рассмотреть случай, когда существует группа R_1 неидемпотентного типа, не удовлетворяющая ни условию (c), ни условию $(4; \infty)$.

Пусть $I_1 = \{i \in I \mid t(R_i) \geqslant t(R_1)\}$. Отметим, что для любой группы R_i каждое её продолжение неидемпотентного типа отлично от самой группы R_i. Поэтому в множестве $\{R_i \mid i \in I_1\}$ существует группа R_2 неидемпотентного типа t_2, любое продолжение которой имеет идемпотентный тип, так как в противном случае группа R_1 удовлетворяет условию (c).

Пусть $(G, \times)$ — кольцо на G и $I_2 = \{i \in I \mid t(R_i) \geqslant t_2\}$. Тогда $G(t_2) = \bigoplus\limits_{i \in I_2} R_i$ — идеал кольца $(G, \times)$. Ясно, что у любой группы из множества $\{R_i \mid i \in I_2\}$ любое её продолжение является продолжением каждой из групп R_1 и R_2. Поэтому в множестве $\{R_i \mid i \in I_2\}$ ни одна из групп не удовлетворяет ни условию (c), ни условию $(4; \infty)$, и у любой группы все её продолжения имеют идемпотентный тип. Следовательно, по лемме 2 кольцо $(G_2, \times)$ является sp-кольцом. Так как в этом множестве есть группа R_2, которая имеет неидемпотентный тип и не удовлетворяет ни условию (c), ни условию $(4; \infty)$, то по лемме 4 идеал $(G_2, \times)$ не является полупростым кольцом. Из того что $R(G, \times) \cap G_2 = R(G_2, \times) \neq 0$, следует, что кольцо $(G, \times)$ не является полупростым, что противоречит условию. Следовательно, любая группа R_i при $i \in I \setminus I_0$ удовлетворяет хотя бы одному из условий (c) или $(4; \infty)$. □

Лемма 6. *Пусть* $G = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{N}} R_i$ *и* $t(R_{i+1}) \geqslant t(R_i)t(R_i)$ *для всех* $i \in \mathbb{N}$. *Тогда группа* G *полупроста.*

Доказательство. Запишем группу G в виде $G = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{N}} R_i e_i$, где элементы e_i выбраны таким образом, что $\chi(e_{i+1}) \geqslant \chi(e_i)\chi(e_i)$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Определим ассоциативное умножение на G, положив $e_i \times e_j = e_{i+j}$ для всех $i, j \in \mathbb{N}$. Это определение корректно, так как

$$\chi(e_{i+j}) \geqslant \chi(e_{i+j-1})\chi(e_{i+j-1}) \geqslant \chi(e_i)\chi(e_j).$$

Покажем, что кольцо $(G, \times)$ полупросто. Пусть $a = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$ — квазирегулярный элемент кольца $(G, \times)$ и $a_n \neq 0$. Тогда существует элемент $b = b_1e_1 + \ldots + b_me_m \in G$, для которого выполняется равенство $a + b - a \times b = 0$, т. е.

$$(a_1e_1 + \ldots + a_ne_n) + (b_1e_1 + \ldots + b_me_m) - \\ - a_1b_1e_2 - a_1b_2e_3 - \ldots - a_nb_me_{n+m} = 0.$$

Пусть для определённости $m \geqslant n$. Тогда верна система равенств

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 0, \\ a_2 + b_2 - a_1b_1 = 0, \\ a_3 + b_3 - a_1b_2 - a_2b_1 = 0, \\ \quad \ldots \\ a_n + b_n - a_1b_{n-1} - \ldots - a_{n-1}b_1 = 0, \\ \quad \ldots \\ - a_{n-1}b_m - a_nb_{m-1} = 0, \\ - a_nb_m = 0, \end{cases}$$

из которой получаем, что $b_m = b_{m-1} = \ldots = b_1 = 0$, т. е. $b = 0$. Значит, $a = 0$, что противоречит выбору элемента a. Таким образом, в кольце $(G, \times)$ нет ненулевых квазирегулярных элементов, т. е. это кольцо полупросто. Значит, группа G полупроста. □

Лемма 7. *Пусть $G = R_0 \oplus \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} G_k$, где R_0 — группа без кручения ранга 1, G_k — однородная вполне разложимая группа ранга 4, такая что $t(G_k)$ — идемпотентный тип с бесконечным числом нулей. Пусть $t(G_k) \geqslant t(R_0)$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда группа G полупроста.*

Доказательство. Запишем группу G_k $(k \in \mathbb{N})$ в виде

$$G_k = R_ke_{11}^{(k)} + R_ke_{12}^{(k)} + R_ke_{21}^{(k)} + R_ke_{22}^{(k)},$$

где R_k — группа без кручения ранга 1, тип которой равен $t(G_k)$. На группе R_k существует полупростое подкольцо с единицей кольца рациональных чисел (см. [4]). Пусть $\mathrm{M}_2(R_k)$ — кольцо квадратных матриц порядка два над этим кольцом R_k. Тогда на группе G_k можно определить структуру модуля над кольцом $\mathrm{M}_2(R_k)$, записав её элементы

$$r_{11}e_{11}^{(k)} + r_{12}e_{12}^{(k)} + r_{21}e_{21}^{(k)} + r_{22}e_{22}^{(k)}$$

в виде матриц

$$\begin{pmatrix} r_{11}e_{11}^{(k)} & r_{12}e_{12}^{(k)} \\ r_{21}e_{21}^{(k)} & r_{22}e_{22}^{(k)} \end{pmatrix} = AE_k,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(R_k), \quad E_k = \begin{pmatrix} e_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & e_{22}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$$

и определим умножение $\times$ на G следующим образом:

$$r_1 e_0 \times r_2 e_0 = 0; \quad r e_0 \times A E_k = A E_k \times r e_0 = (rCA) E_k;$$

$$A E_k \times B E_s = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq s, \\ (AB) E_k, & \text{если } k = s. \end{cases}$$

Это умножение определено корректно, так как $t(G_k) = t(G_k) t(R_0) = t(G_k) t(G_k)$. Записав элементы группы R_0 в виде $(rC)e_0$, где $r \in R_0$, легко проверить, что умножение $\times$ ассоциативно.

Покажем, что кольцо $(G, \times)$ полупросто. Очевидно, G_k — идеал этого кольца при всех $k \in \mathbb{N}$. Этот идеал изоморфен кольцу $\mathrm{M}_2(R_k)$ и поэтому полупрост, так как $\big(\mathrm{M}_2(R_k)\big) = \mathrm{M}_2\big(R(R_k)\big) = 0$ (см. [6]). Пусть

$$B = r e_0 + A_1 E_1 + \ldots + A_k E_k \in R(G, \times).$$

Тогда

$$B \times E_{k+1} = (rC) E_{k+1} \in R(G, \times) \cap G_{k+1} = R(G_{k+1}, \times) = 0.$$

Отсюда

$$rC = r \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & r \\ -r & -r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. $r = 0$. Значит,

$$R(G, \times) \subset \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} G_k$$

и, следовательно,

$$R(G, \times) = R(G, \times) \cap \left(\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} G_k \right) = R\left(\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} G_k, \times \right) = 0.$$

Таким образом, кольцо $(G, \times)$ и группа G полупросты. □

Лемма 8. *Пусть для каждого $k \in \mathbb{N}$ дана последовательность I_k, все элементы которой различны. Тогда существуют попарно непересекающиеся подпоследовательности $J_1, J_2, \ldots$ последовательностей $I_1, I_2, \ldots$ соответственно, такие что $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} J_k = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} I_k$.*

Доказательство. Определим конечные последовательности элементов

$$\begin{array}{l}\alpha_{11};\\ \alpha_{21};\ \alpha_{22};\\ \alpha_{31};\ \alpha_{32};\ \alpha_{33};\\ \ldots\end{array}$$

следующим образом:

1) $\alpha_{k,k},\ \alpha_{k+1,k},\ldots$ — подпоследовательность I_k;
2) $\alpha_{ij} \neq \alpha_{sk}$, если (s,k) меньше (i,j) при лексикографическом порядке на множестве упорядоченных пар.

Положим $J_k = \{\alpha_{ik} \mid i \geqslant k\}$. Тогда J_k — подпоследовательность последовательности I_k по свойству 1), $J_1, J_2, \ldots$ попарно не пересекаются по свойству 2). Легко проверить, что подпоследовательности $J_1, J_2, \ldots$ можно выбрать таким образом, что $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} J_k = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} I_k$. □

Лемма 9. *Пусть $G = \bigoplus\limits_{i\in I} R_i$ — счётная редуцированная вполне разложимая группа. Пусть при любом $i \notin I_0$ группа R_i удовлетворяет условию* (c) *или условию* $(4;\infty)$. *Тогда группа G полупроста.*

Доказательство. Пусть

$$U = \{k \in I \mid R_k \text{ удовлетворяет условию (c)}\};$$
$$V = \{k \in I \mid R_k \text{ не удовлетворяет условию (c)}\}.$$

Тогда $G = A \oplus B$, где $A = \bigoplus\limits_{k\in U} R_k$, $B = \bigoplus\limits_{k\in V} R_k$.

Для каждого $k \in U$ существует последовательность U_k элементов из множества U, в которой первый элемент равен k, а каждый начиная со второго является продолжением предыдущего. По лемме 8 существуют попарно непересекающиеся подпоследовательности $\bar{U}_k$ последовательностей U_k $(k \in U)$, такие что $\bigcup\limits_{k\in U} \bar{U}_k = \bigcup\limits_{k\in U} U_k = U$. По лемме 6 группы $A_k = \bigoplus\limits_{i\in \bar{U}_k} R_i$ $(k \in U)$ являются полупростыми. Следовательно, полупростой является и группа $A = \bigoplus\limits_{k\in U} A_k$.

Рассмотрим теперь группу B. Очевидно, среди её слагаемых нет групп идемпотентных типов с конечным числом нулей. Обозначим

$$V_{\mathrm{nid}} = \{k \in V \mid t(R_k) \text{ — неидемпотентный тип}\}.$$

Пусть $n \in V_{\mathrm{nid}}$, тогда группа R_n удовлетворяет условию $(4;\infty)$. Поэтому существуют группы $C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, \ldots$, каждая из которых является однородным прямым слагаемым группы G, имеющим ранг 4 и идемпотентный тип с бесконечным числом нулей, при этом $t(C_k^{(n)}) \geqslant t(R_n)$ при всех $k \in \mathbb{N}$. По лемме 8 можно считать, что множества $\{C_k^{(n)} \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $\{C_k^{(s)} \mid k \in \mathbb{N}\}$ не пересекаются при $n \neq s$. Так как R_n не удовлетворяет условию (c) и $t(C_k^{(n)}) \geqslant t(R_n)$, то $C_k^{(n)} \subset \bigoplus\limits_{t\in V} R_t = B$.

Положим $B_n = R_n \oplus \bigoplus\limits_{k\in\mathbb{N}} C_k^{(n)}$ для всех $n \in V_{\mathrm{nid}}$. Тогда $B = \Big(\bigoplus\limits_{n\in V_{\mathrm{nid}}} B_n\Big) \oplus F$, где F — прямая сумма групп R_i, имеющих идемпотентный тип с бесконечным числом нулей. По лемме 7 каждая из групп B_n является полупростой. Так как R_i полупроста при всех $i \in I_0$ (см. [4]), то такой же является и группа F. Следовательно, полупроста группа B, а значит, и группа $G = A \oplus B$. □

Объединяя лемму 5 и лемму 9, получим следующую теорему.

Теорема 10. *Счётная редуцированная вполне разложимая группа* $G = \bigoplus\limits_{i\in I} R_i$ *полупроста тогда и только тогда, когда любая группа* R_i*, имеющая неидемпотентный тип или идемпотентный тип с конечным числом нулей, удовлетворяет условию* (c) *или условию* $(4;\infty)$.

Следующая теорема вместе с теоремой 10 даёт описание полупростых групп в классе всех счётных вполне разложимых групп.

Теорема 11. *Пусть* $G = \bigoplus\limits_{i\in I} R_i$ — *счётная вполне разложимая группа,* $G = A \oplus D$, *где* A — *редуцированная группа,* D — *делимая группа.*

1. *Если ранг группы* D *конечен, то* G *полупроста тогда и только тогда, когда полупроста группа* A.
2. *Если ранг группы* D *бесконечен, то группа* G *полупроста.*

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы 11, а второе — из [1, следствие 3]. □

Полученное описание можно сформулировать следующим образом.

Следствие 12. *Счётная вполне разложимая группа* $G = \bigoplus\limits_{i\in I} R_i$ *полупроста тогда и только тогда, когда каждая из редуцированных групп* R_i*, имеющих неидемпотентный тип или идемпотентный тип с конечным числом нулей, удовлетворяет условию* (c) *или условию* $(4;\infty)$.

Литература

[1] Компанцева Е. И. Полупростые нередуцированные абелевы группы без кручения // Абелевы группы и модули. Вып. 13—14. — Томск: Изд-во Томского ун-та, 1996. — С. 67—76.

[2] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974. — Т. 1.

[3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1977. — Т. 2.

[4] Beaumont R. A., Lawver D. A. Strongly semisimple Abelian groups // Publ. J. Math. — 1974. — Vol. 53, no. 2. — P. 327—336.

[5] Beaumont R. A., Pierce R. S. Torsion-free rings // Illinois J. Math. — 1961. — Vol. 5. — P. 61—98.

[6] Jacobson N. Structure of Rings. — Providence: Amer. Math. Soc., 1956. — (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.; Vol. 37).

Статья поступила в редакцию в мае 2006 г.