Группа $\mathrm{Hom}(A, B)$ как артинов $\mathrm{E}(B)$- или $\mathrm{E}(A)$-модуль

П. А. КРЫЛОВ
Томский государственный университет

Е. И. ПОДБЕРЕЗИНА
Томский политехнический университет

УДК 512.541+512.553

Ключевые слова: абелева группа, группа гомоморфизмов, кольцо эндоморфизмов, артинов модуль.

Аннотация

Находятся условия артиновости группы гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(A, B)$ как модуля над кольцом эндоморфизмов абелевой группы B или A.

Abstract

P. A. Krylov, Ye. I. Podberezina, The group $\mathrm{Hom}(A, B)$ *as an Artinian* $\mathrm{E}(B)$*- or* $\mathrm{E}(A)$*-module*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 3, pp. 81—96.

The conditions of Artinianity of the homomorphism group $\mathrm{Hom}(A, B)$ as a module over the endomorphism ring of the Abelian group B or A are found.

Хорошо известна важная роль группы гомоморфизмов в теории абелевых групп и других областях математики. Большое внимание уделялось алгебраическому строению этой группы, исследовались также гомологические, топологические и иные свойства группы Hom. Однако в тени остаётся тот факт, что группа $\mathrm{Hom}(A, B)$ естественным образом является левым $\mathrm{E}(B)$-модулем и правым $\mathrm{E}(A)$-модулем (даже $\mathrm{E}(B)$-$\mathrm{E}(A)$-бимодулем) над кольцами эндоморфизмов групп B и A соответственно. Поэтому возможен модульный подход к изучению группы гомоморфизмов. В разделе 1 данной статьи даётся полное описание абелевых групп A и B, таких что левый $\mathrm{E}(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A, B)$ артинов. В разделе 2 это исследование продолжается, группа гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(A, B)$ изучается как правый артинов $\mathrm{E}(A)$-модуль. Проблема описания групп A и B, для которых $\mathrm{Hom}(A, B)$ — артинов $\mathrm{E}(A)$-модуль, сведена, по существу, к случаю, когда группа A не имеет кручения, а группа B является одной из следующих групп: $\mathbb{Z}(p)$, $\mathbb{Z}(p^\infty)$, $\mathbb{Q}$.

Напомним, что структура левого $\mathrm{E}(B)$-модуля и правого $\mathrm{E}(A)$-модуля на группе $\mathrm{Hom}(A, B)$ задаётся с помощью формул

$$(\alpha\varphi)a = \alpha(\varphi a), \quad (\varphi\beta)a = \varphi(\beta a)$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 3, с. 81—96.

для всех $\varphi \in \operatorname{Hom}(A,B)$, $\alpha \in \mathrm{E}(B)$, $\beta \in \mathrm{E}(A)$ и $a \in A$. Группу A естественным образом считаем левым $\mathrm{E}(A)$-модулем. Понятно, что подмодули этого модуля есть не что иное, как вполне характеристические подгруппы группы A. Группу A, являющуюся артиновым (нётеровым) $\mathrm{E}(A)$-модулем, будем называть эндоартиновой (эндонётеровой).

Указанные модульные структуры на группе Hom представляют собой частные случаи стандартного способа превращения этой группы в модуль. Мы будем также сталкиваться со следующей более общей ситуацией. Пусть M — левый модуль над некоторым кольцом R, A и B — группы. Тогда $\operatorname{Hom}(A,M)$ ($\operatorname{Hom}(M,B)$) — левый (правый) R-модуль. Обычно модуль M будет появляться в связи с вполне характеристическими подгруппами групп A и B. Пусть, например, V — вполне характеристическая подгруппа группы A. Тогда имеем $\mathrm{E}(A)$-модули V и A/V. Особенно важен случай, когда V — вполне характеристическое прямое слагаемое группы A. Для наших целей полезно то, что для такой подгруппы V подмодули V как $\mathrm{E}(A)$- и $\mathrm{E}(V)$-модуля совпадают. Фактор-группа A/V также является $\mathrm{E}(A)$- и $\mathrm{E}(A/V)$-модулем, и подмодули этих модулей суть одно и то же. Можно заключить, что подмодули $\operatorname{Hom}(V,B)$ как $\mathrm{E}(A)$- и $\mathrm{E}(V)$-модуля совпадают, и то же справедливо для подмодулей $\operatorname{Hom}(A/V,B)$ как $\mathrm{E}(A)$- и $\mathrm{E}(A/V)$-модуля. Аналогичным образом, если W — вполне характеристическое прямое слагаемое группы B, то совпадают подмодули $\operatorname{Hom}(A,W)$ как $\mathrm{E}(B)$- и $\mathrm{E}(W)$-модуля и $\operatorname{Hom}(A,B/W)$ как $\mathrm{E}(B)$- и $\mathrm{E}(B/W)$-модуля.

Используемые обозначения и термины стандартны и в основном соответствуют книге [2]. Так, буква p всегда обозначает некоторое простое число. Если G — группа, то $\mathrm{E}(G)$ — её кольцо эндоморфизмов, $\mathrm{r}(G)$ — ранг, $\mathrm{r}_p(G)$ — p-ранг группы G, $\mathrm{r}_p(G) = \mathrm{r}(G/pG)$, $G^{\mathfrak{M}}$ или $\sum\limits_{\mathfrak{M}}^{\oplus} G$ — прямая сумма $\mathfrak{M}$ копий группы G ($\mathfrak{M}$ — некоторый кардинал). Для натурального числа n определим две вполне характеристические подгруппы группы G:

$$nG = \{ng \mid g \in G\}, \quad G[n] = \{g \in G \mid ng = 0\}.$$

p-компонента группы G — это наибольшая p-группа, содержащаяся в G. Группа называется ограниченной, если порядки всех её элементов ограничены в совокупности. Как обычно, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}(n)$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}(p^\infty)$ обозначают соответственно множество всех натуральных чисел, группу целых чисел, циклическую группу порядка n, группу рациональных чисел и квазициклическую p-группу.

1. Когда $\operatorname{Hom}(A,B)$ — артинов $\mathrm{E}(B)$-модуль?

Пусть A и B — абелевы группы. Положим

$$S_A(B) = \sum_{\alpha\colon A \to B} \alpha A, \quad K_B(A) = \bigcap_{\alpha\colon A \to B} \ker \alpha.$$

Будем использовать обозначения $S = S_A(B)$, $K = K_B(A)$, а также $\bar{A} = A/K$. Подгруппа S называется следом группы A в группе B, и она вполне характеристична в группе B. Подгруппа K называется B-радикалом группы A, она является вполне характеристической подгруппой группы A. Фактор-группу $\bar{A}$ можно назвать коследом группы B в группе A. Имеют место очевидные равенства $S = S_A(S)$ и $K_B(\bar{A}) = 0$. Ясно, что $\mathrm{Hom}(A,B) = \mathrm{Hom}(A,S)$. Известно, что $\mathrm{E}(B)$-модули $\mathrm{Hom}(A,B)$ и $\mathrm{Hom}(\bar{A},B)$ канонически изоморфны. Мы отождествляем $\mathrm{Hom}(A,B)$ с $\mathrm{Hom}(\bar{A},B)$ и с $\mathrm{Hom}(\bar{A},S)$.

Перейдём к основной теме раздела. Докажем несколько предложений, раскрывающих строение группы $\mathrm{Hom}(A,B)$ и групп A, B (точнее говоря, групп $\bar{A}$ и S) при условии артиновости $\mathrm{E}(B)$-модуля или $\mathrm{E}(A)$-модуля $\mathrm{Hom}(A,B)$.

Предложение 1.1. *Предположим, что A и B — такие группы, что* $\mathrm{Hom}(A,B)$ *является артиновым* $\mathrm{E}(B)$*-модулем или* $\mathrm{E}(A)$*-модулем. Тогда для некоторого $m \in \mathbb{N}$ имеет место разложение*

$$\mathrm{Hom}(A,B) = m\,\mathrm{Hom}(A,B) \oplus K,$$

где $m\,\mathrm{Hom}(A,B)$ — делимая группа, K — ограниченная группа.

Доказательство. В обоих случаях в силу артиновости модуля $\mathrm{Hom}(A,B)$ обрывается цепь его подмодулей

$$\mathrm{Hom}(A,B) \supseteq 2!\,\mathrm{Hom}(A,B) \supseteq \ldots \supseteq n!\,\mathrm{Hom}(A,B) \supseteq \ldots,$$

т. е. существует $m \in \mathbb{N}$ со свойством

$$n\big(m\,\mathrm{Hom}(A,B)\big) = m\,\mathrm{Hom}(A,B)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Это означает, что $m\,\mathrm{Hom}(A,B)$ — делимая группа. Следовательно, имеем

$$\mathrm{Hom}(A,B) = m\,\mathrm{Hom}(A,B) \oplus K$$

для некоторой группы K. Поскольку

$$K \cong \mathrm{Hom}(A,B)/m\,\mathrm{Hom}(A,B),$$

то $mK = 0$ и K — ограниченная группа. □

Напомним, что буква S обозначает след $S_A(B)$, а $\bar{A} = A/K_B(A)$.

Предложение 1.2. *Если $m\,\mathrm{Hom}(A,S)$ — делимая группа для некоторого $m \in \mathbb{N}$, то и mS — делимая группа.*

Доказательство. Для данного элемента $a \in A$ полагая $f_a(\varphi) = \varphi(a)$, $\varphi \in$ $\in m\,\mathrm{Hom}(A,B)$, получаем гомоморфизм

$$f_a\colon m\,\mathrm{Hom}(A,B) \to mS.$$

По определению следа имеем $\sum\limits_{a\in A} \mathrm{im}\, f_a = mS$. Группа $\mathrm{im}\, f_a$ делима как гомоморфный образ делимой группы $m\,\mathrm{Hom}(A,B)$. Следовательно, сумма всех $\mathrm{im}\, f_a$, т. е. mS, тоже делимая группа. □

Из предложений 1.1 и 1.2 вытекает, что если $\mathrm{Hom}(A, B)$ — артинов $\mathrm{E}(B)$-модуль или $\mathrm{E}(A)$-модуль для каких-то групп A и B, то для некоторого $m \in \mathbb{N}$ след S обладает разложением $S = mS \oplus C$, где mS — делимая, а C — ограниченная группы (нужно учесть, что $C \cong S/mS$).

В дальнейшем делимой (редуцированной) p-компонентой некоторой группы будем называть делимую (редуцированную) часть её p-компоненты. Делимую p-компоненту следа S обозначим D_p. Очевидно, что D_p совпадает с делимой p-компонентой самой группы B.

Предложение 1.3. *Если* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *— артинов* $\mathrm{E}(B)$*-модуль или* $\mathrm{E}(A)$*-модуль, то число делимых* p*-компонент следа* S *конечно.*

Доказательство. Пусть $P = \{p_1, p_2, \ldots\}$ — множество всех простых чисел p, для которых группа S имеет делимую p-компоненту. Сумма любого числа делимых p-компонент группы S вполне характеристична в B. Поэтому допущение, что множество P бесконечно, приводит к существованию следующей бесконечной строго убывающей цепи подмодулей $\mathrm{E}(B)$-модуля и $\mathrm{E}(A)$-модуля $\mathrm{Hom}(A, B)$:

$$\mathrm{Hom}\Bigl(A, \sum_{p\in P}^{\oplus} D_p\Bigr) \supset \mathrm{Hom}\Bigl(A, \sum_{p\in P\setminus\{p_1\}}^{\oplus} D_p\Bigr) \supset \ldots.$$

Но это противоречит артиновости этого модуля, что показывает справедливость предложения. $\square$

Получим теперь некоторую информацию о строении коследа $\bar{A}$ при условии артиновости $\mathrm{E}(B)$-модуля $\mathrm{Hom}(A, B)$. В следующей лемме считаем группу $\mathbb{Z}(p^\infty)$ одним из слагаемых группы A.

Лемма 1.4. *Подмодуль* $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(p^\infty), D_p)$ $\mathrm{E}(B)$*-модуля* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *не является артиновым.*

Доказательство. Цепь

$$p\,\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(p^\infty), D_p) \supseteq p^2\,\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(p^\infty), D_p) \supseteq \ldots$$

есть строго убывающая цепь подмодулей $\mathrm{E}(B)$-модуля $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(p^\infty), D_p)$. Действительно, поскольку $D_p \cong \sum_{\mathfrak{M}_p}^{\oplus} \mathbb{Z}(p^\infty)$ для некоторого кардинала $\mathfrak{M}_p$, то группа $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(p^\infty), D_p)$ изоморфна определённой подгруппе группы $\prod_{\mathfrak{M}_p} J_p$, где J_p — группа целых p-адических чисел (точное строение группы $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(p^\infty), D_p)$ указано в [2, предложение 44.3]). Теперь ясно, что группа $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(p^\infty), D_p)$ не является p-делимой и записанная цепь не обрывается. $\square$

Предложение 1.5. *Если* $\mathrm{E}(B)$*-модуль* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *артинов, то*

$$\bar{A} = H \oplus \sum_{m}^{\oplus} \mathbb{Q} \oplus G,$$

где H *— конечная группа,* G *— редуцированная группа без кручения и* $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Если группа $\bar{A}$ содержит элементы конечного порядка, то от неё можно отщепить коциклическое прямое слагаемое. Предположим, что от группы $\bar{A}$ можно отщепить бесконечное множество коциклических прямых слагаемых $T_1, T_2, \ldots$ так, что

$$\bar{A} = T_1 \oplus V_1 = T_1 \oplus T_2 \oplus V_2 = T_1 \oplus \ldots \oplus T_n \oplus V_n = \ldots$$

для некоторых подгрупп $V_1, V_2, \ldots$. Тогда получаем бесконечную строго убывающую цепь подмодулей $\mathrm{E}(B)$-модуля $\mathrm{Hom}(A, B)$:

$$\mathrm{Hom}(V_1, B) \supset \mathrm{Hom}(V_2, B) \supset \ldots \supset \mathrm{Hom}(V_n, B) \supset \ldots .$$

Итак, от группы $\bar{A}$ можно отщепить лишь конечное число коциклических групп. По лемме 1.4 группа $\bar{A}$ не может содержать квазициклических групп. Таким образом, группа $\bar{A}$ представляется в виде

$$\bar{A} = H \oplus \sum_{\mathfrak{M}}^{\oplus} \mathbb{Q} \oplus G,$$

где H — конечная группа, G — группа без кручения, а $\mathfrak{M}$ — некоторый кардинал. Поскольку любая сумма групп $\mathbb{Q}$ выделяется прямым слагаемым, то $\bar{A}$ может содержать только конечное число групп $\mathbb{Q}$. В этом легко убедиться путём рассуждений, схожих со случаем коциклических прямых слагаемых. Значит, $\mathfrak{M}$ — конечный кардинал и группа $\bar{A}$ в самом деле имеет указанный вид. □

Суммируем полученные сведения о следе S и кследе $\bar{A}$ в предположении артиновости модуля $\mathrm{Hom}(A, B)$. Если $\mathrm{Hom}(A, B)$ — артинов $\mathrm{E}(B)$-модуль или $\mathrm{E}(A)$-модуль, то в обоих случаях след S имеет вид

$$S = D \oplus \sum_{\mathfrak{M}}^{\oplus} \mathbb{Q} \oplus C,$$

где D — делимая периодическая группа с конечным числом p-компонент, $\mathfrak{M}$ — некоторый кардинал, а C — ограниченная группа. В ситуации артинова $\mathrm{E}(B)$-модуля $\mathrm{Hom}(A, B)$ имеем

$$\bar{A} = H \oplus \sum_{m}^{\oplus} \mathbb{Q} \oplus G,$$

где H — конечная группа, $m \in \mathbb{N}$, а G — редуцированная группа без кручения. Это строение групп S и $\bar{A}$ будем использовать дальше без дополнительных пояснений.

Говорим, что простое число p относится к какой-то группе, если она имеет p-компоненту (т. е. p-компонента этой группы отлична от нуля).

Предложение 1.6. *Пусть $\mathrm{Hom}(A, B)$ является артиновым $\mathrm{E}(B)$-модулем. Тогда для всякого p, относящегося к группе C, редуцированная p-компонента группы B является ограниченной. Группа B равна $\mathrm{d}(B) \oplus E \oplus V$, где $\mathrm{d}(B)$ — делимая часть группы B, E — ограниченная группа и всякое p, относящееся к E, относится и к C, V — некоторая группа, причём $\mathrm{Hom}(A, V) = 0$. След S есть артинов $\mathrm{E}(B)$-модуль.*

Доказательство. Предположим, что простое число p относится к группе C. Тогда, очевидно, либо p относится к H, либо $pG \neq G$. Пусть p относится к H и H_0 — циклическое слагаемое группы H некоторого порядка p^n. Имеем изоморфизм левых $\mathrm{E}(B)$-модулей $\mathrm{Hom}(H_0, B) \cong B[p^n]$, откуда следует, что $B[p^n]$ — артинов $\mathrm{E}(B)$-модуль. Редуцированная p-компонента группы B должна быть ограниченной, поскольку в противном случае можно указать бесконечную необрывающуюся цепь

$$B[p^n] \cap pB \supseteq B[p^n] \cap p^2B \supseteq \ldots$$

подмодулей $\mathrm{E}(B)$-модуля $B[p^n]$. Теперь допустим, что $pG \neq G$. Так как существует изоморфное вложение $\mathrm{E}(B)$-модулей

$$\mathrm{Hom}(G/pG, B) \to \mathrm{Hom}(G, B),$$

то $\mathrm{Hom}(G/pG, B)$ — артинов модуль. Как и выше, находим, что $B[p]$ — артинов $\mathrm{E}(B)$-модуль и редуцированная p-компонента группы B является ограниченной.

Запишем $B = \mathrm{d}(B) \oplus E \oplus V$, где E — сумма редуцированных p-компонент группы B для всех p, относящихся к C, V — некоторая группа. Из $S \subseteq \mathrm{d}(B) \oplus E$ получаем, что $\mathrm{Hom}(A, V) = 0$. Можно записать

$$S = \mathrm{d}(B) \oplus E[k] \quad \text{при} \quad \sum_m{}^{\oplus} \mathbb{Q} \oplus G \neq 0$$

и

$$S = \mathrm{d}(B)[l] \oplus E[k] \quad \text{при} \quad \sum_m{}^{\oplus} \mathbb{Q} \oplus G = 0$$

для каких-то $k, l \in \mathbb{N}$. Это вытекает из доказательства и очевидных равенств $S_M\big(\mathbb{Z}(p^\infty)\big) = \mathbb{Z}(p^\infty)$ и $S_M(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, где $M = \sum_m^{\oplus} Q \oplus G$. Из теоремы 9.2 из [4] и её доказательства видно, что в обоих случаях S — артинов $\mathrm{E}(B)$-модуль. Предложение доказано. □

Из предложения 1.6 и последнего абзаца его доказательства получается следующий факт.

Следствие 1.7. *Пусть A и B — такие группы, что след S и кослед $\bar{A}$ имеют вид, указанный выше. Если для любого p, относящегося к группе C, редуцированная p-компонента группы B является ограниченной, то S — артинов $\mathrm{E}(B)$-модуль.*

После следующей лёгкой леммы мы сформулируем основной результат раздела.

Лемма 1.8. *Пусть R — некоторое кольцо.*

1. *Артиновость R-модуля A эквивалентна артиновости R-модуля $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, A)$.*
2. *Артиновость R-модуля A влечёт артиновость R-модуля $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(m), A)$ для любого $m \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Достаточно вспомнить о существовании канонических изоморфизмов R-модулей

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, A) \cong A, \quad \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(m), A) \cong A[m]. \qquad \square$$

Теорема 1.9. *Пусть A и B — некоторые группы. Левый $\mathrm{E}(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A, B)$ артинов тогда и только тогда, когда*

$$S = D \oplus \sum_{\mathfrak{M}}^{\oplus} \mathbb{Q} \oplus C,$$

где D — делимая периодическая группа с конечным числом p-компонент, C — ограниченная группа, $\mathfrak{M}$ — некоторый кардинал,

$$\bar{A} = H \oplus \sum_{m}^{\oplus} \mathbb{Q} \oplus G,$$

где H — конечная группа, G — редуцированная группа без кручения, $m \in \mathbb{N}$ и для всякого p, относящегося к группе C, редуцированная p-компонента группы B является ограниченной. Более того,

а) *если $D \neq 0$, то $\bar{A} = H \oplus G$, $\mathrm{r}(G) < \infty$ и $\mathrm{r}(G) = \mathrm{r}_p(G)$ для всех p, относящихся к группе D;*

б) *если $D = 0$, но $\sum_{\mathfrak{M}}^{\oplus} Q \neq 0$, то $\mathrm{r}(G) < \infty$;*

в) *если $S = C$, то $\bar{A} = H \oplus G$ и для любого p, относящегося к S, $\mathrm{r}_p(G) < \infty$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathrm{E}(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A, B)$ артинов. Ранее мы установили, что группы S и $\bar{A}$ имеют указанное строение и для всякого p, относящегося к C, редуцированная p-компонента группы B является ограниченной (предложения 1.2, 1.3, 1.5, 1.6).

Пусть $D \neq 0$ и D_p — некоторая p-компонента группы D. Допустим, что $\sum_{m}^{\oplus} \mathbb{Q} \neq 0$. Рассмотрим вложение левых $\mathrm{E}(B)$-модулей

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, D_p) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, D_p).$$

Здесь $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, D_p)$ согласно лемме 1.4 не является артиновым подмодулем $\mathrm{E}(B)$-модуля $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, D_p)$, а значит, и модуля $\mathrm{Hom}(A, B)$, что невозможно. Так что группа $\bar{A}$ не может содержать ни одной группы $\mathbb{Q}$.

Обозначим через F свободную подгруппу группы G, порождённую некоторой её максимальной линейно независимой системой элементов. Рассмотрим индуцированную точную последовательность левых $\mathrm{E}(B)$-модулей

$$0 \to \mathrm{Hom}(G/F, D_p) \to \mathrm{Hom}(G, D_p) \to \mathrm{Hom}(F, D_p) \to \mathrm{Ext}(G/F, D_p) = 0.$$

Модуль $\mathrm{Hom}(G, D_p)$ артинов как подмодуль артинова модуля $\mathrm{Hom}(A, B)$. Следовательно, артиновы модули $\mathrm{Hom}(G/F, D_p)$ и $\mathrm{Hom}(F, D_p)$. Из изоморфизмов $\mathrm{E}(B)$-модулей

$$\mathrm{Hom}(F, D_p) = \mathrm{Hom}\Big(\sum_{\mathrm{r}(G)}^{\oplus} \mathbb{Z}, D_p\Big) \cong \prod_{\mathrm{r}(G)} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, D_p)$$

вытекает конечность ранга $\mathrm{r}(G)$. Покажем теперь, что $\mathrm{r}(G) = \mathrm{r}_p(G)$ при любом p, относящемся к группе D. Для этого возьмём $\mathrm{Hom}(G/F, D_p)$. Это артинов $\mathrm{E}(B)$-модуль, как показано выше. По [3, теорема 1.10] p-компонента группы G/F равна прямой сумме конечного числа коциклических групп. По лемме 1.4 эта p-компонента не содержит квазициклических групп. Тогда из [3, теорема 0.2] (нужно применить теорему к последовательности $0 \to F \to G \to G/F \to 0$) следует, что $\mathrm{r}(G) = \mathrm{r}_p(G)$.

Предположим теперь, что $D \neq 0$ и $\bar{A} = H \oplus G$, причём $\mathrm{r}(G) < \infty$ и для простых p, относящихся к D, $\mathrm{r}(G) = \mathrm{r}_p(G)$. Покажем, что $\mathrm{Hom}(A, B)$ — артинов $\mathrm{E}(B)$-модуль. Точная последовательность $\mathrm{E}(B)$-модулей

$$0 \to D \to S \to S/D \to 0$$

индуцирует точную последовательность $\mathrm{E}(B)$-модулей

$$0 \to \mathrm{Hom}(\bar{A}, D) \to \mathrm{Hom}(\bar{A}, S) \to \mathrm{Hom}(\bar{A}, S/D) \to 0.$$

Артиновость модуля $\mathrm{Hom}(A, B)$ (он равен $\mathrm{Hom}(\bar{A}, S)$) будет установлена, если мы убедимся в артиновости модулей $\mathrm{Hom}(\bar{A}, D)$ и $\mathrm{Hom}(\bar{A}, S/D)$.

Модуль $\mathrm{Hom}(\bar{A}, D)$ равен прямой сумме модулей вида $\mathrm{Hom}(\bar{A}, D_p)$, где D_p — некоторая p-компонента группы D. Покажем, что последний модуль артинов, для чего запишем его как сумму двух модулей:

$$\mathrm{Hom}(\bar{A}, D_p) = \mathrm{Hom}(H, D_p) \oplus \mathrm{Hom}(G, D_p).$$

По [4, теорема 9.2] D_p — артинов $\mathrm{E}(D_p)$-модуль и, следовательно, артинов $\mathrm{E}(B)$-модуль. Теперь артиновость модуля $\mathrm{Hom}(H, D_p)$ вытекает из леммы 1.8. Что касается модуля $\mathrm{Hom}(G, D_p)$, то для его артиновости достаточно артиновости модулей $\mathrm{Hom}(G/F, D_p)$ и $\mathrm{Hom}(F, D_p)$. Так как $\mathrm{r}_p(G) = \mathrm{r}(G) < \infty$, то по [3, теоремы 1.10, 0.2] p-компонента группы G/F конечна, и артиновость этих модулей опять устанавливается с помощью леммы 1.8. Итак, модуль $\mathrm{Hom}(\bar{A}, D)$ артинов.

Покажем, что $\mathrm{E}(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(\bar{A}, S/D)$ артинов. Он представляет собой сумму $\mathrm{Hom}(H, S/D) \oplus \mathrm{Hom}(G, S/D)$. По следствию 1.7 S/D — артинов $\mathrm{E}(B)$-модуль. Артиновость модуля $\mathrm{Hom}(H, S/D)$ можно теперь вывести из леммы 1.8. Запишем ещё одну точную последовательность $\mathrm{E}(B)$-модулей:

$$0 \to \mathrm{Hom}(G/F, S/D) \to \mathrm{Hom}(G, S/D) \to \mathrm{Hom}(F, S/D).$$

Поскольку $\mathrm{r}(G) < \infty$, то F — свободная группа конечного ранга и модуль $\mathrm{Hom}(F, S/D)$ артинов в силу леммы 1.8. Группа G/F является прямой суммой коциклических групп. Модуль S/D артинов, а как группа S/D изоморфна $\sum_{\mathfrak{M}}^{\oplus} \mathbb{Q} \oplus C$. Поэтому к модулю $\mathrm{Hom}(G/F, S/D)$ применима лемма 1.8. Таким образом, модуль $\mathrm{Hom}(G/F, S/D)$ артинов и артиновы модули $\mathrm{Hom}(G, S/D)$ и $\mathrm{Hom}(\bar{A}, S/D)$. В итоге артинов модуль $\mathrm{Hom}(A, B)$.

Считаем теперь, что группа S не содержит делимых p-компонент, но содержит хотя бы одну группу $\mathbb{Q}$. Докажем утверждение теоремы в этом случае.

Пусть $\mathrm{Hom}(A, B)$ — артинов $\mathrm{E}(B)$-модуль. Убедимся, что $\mathrm{r}(G) < \infty$. Так как $\mathrm{Hom}(G/F, E) = 0$, где $E = \sum\limits_{\mathfrak{M}}^{\oplus} \mathbb{Q}$ (как и выше, F — свободная подгруппа группы G, порождённая некоторой её максимальной линейно независимой системой элементов), мы имеем изоморфизмы артиновых $\mathrm{E}(B)$-модулей

$$\mathrm{Hom}(G, E) \cong \mathrm{Hom}(F, E),$$
$$\mathrm{Hom}(F, E) = \mathrm{Hom}\Bigl(\sum_{\mathrm{r}(G)}^{\oplus} \mathbb{Z}, E\Bigr) \cong \prod_{\mathrm{r}(G)} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, E) \cong \prod_{\mathrm{r}(G)} E,$$

откуда $\mathrm{r}(G) < \infty$.

Наоборот, пусть $\mathrm{r}(G) < \infty$. Покажем, что $\mathrm{E}(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A, B)$ артинов. Имеют место изоморфизмы $\mathrm{E}(B)$-модулей (по-прежнему $E = \sum\limits_{\mathfrak{M}}^{\oplus} \mathbb{Q}$)

$$\mathrm{Hom}(A, B) \cong \mathrm{Hom}(H, E) \oplus \mathrm{Hom}\Bigl(\sum_{m}^{\oplus} \mathbb{Q}, E\Bigr) \oplus \\ \oplus \mathrm{Hom}(G, E) \oplus \mathrm{Hom}(H, C) \oplus \mathrm{Hom}\Bigl(\sum_{m}^{\oplus} \mathbb{Q}, C\Bigr) \oplus \mathrm{Hom}(G, C).$$

Здесь, очевидно, имеем

$$\mathrm{Hom}(H, E) = 0 = \mathrm{Hom}\Bigl(\sum_{m}^{\oplus} \mathbb{Q}, C\Bigr).$$

Затем

$$\mathrm{Hom}\Bigl(\sum_{m}^{\oplus} \mathbb{Q}, E\Bigr) \cong \sum_{m}^{\oplus} \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, E) \cong \sum_{m}^{\oplus} E,$$

где E — артинов модуль, поскольку модуль S артинов (следствие 1.7). Только что мы установили изоморфизм $\mathrm{E}(B)$-модулей

$$\mathrm{Hom}(G, E) \cong \prod_{\mathrm{r}(G)} E.$$

Значит, $\mathrm{Hom}(G, E)$ — артинов модуль в силу $\mathrm{r}(G) < \infty$. Так как H — конечная группа, а C — артинов модуль, то $\mathrm{Hom}(H, C)$ также артинов модуль (нужно учесть лемму 1.8). Точно так же на основании $\mathrm{r}(G) < \infty$ артиновы модули $\mathrm{Hom}(G/F, C)$ и $\mathrm{Hom}(F, C)$ (нужно опять применить лемму 1.8). Следовательно, модуль $\mathrm{Hom}(G, C)$ артинов. Таким образом, модуль $\mathrm{Hom}(A, B)$ является артиновым.

Наконец, рассмотрим случай ограниченной группы S, т. е. $S = C$. Допустим, что $\mathrm{Hom}(A, B)$ — артинов $\mathrm{E}(B)$-модуль. Равенство $\bar{A} = H \oplus G$ немедленно вытекает из определения коследа. Покажем, что для любого p, относящегося к C, $\mathrm{r}_p(G) < \infty$. Обозначим через C_p какую-нибудь из p-компонент группы C. Тогда $p^s C_p = 0$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$ и справедливы канонические изоморфизмы $\mathrm{E}(B)$-модулей

$$\mathrm{Hom}(G, C_p) \cong \mathrm{Hom}(G/p^s G, C_p) \cong$$
$$\cong \mathrm{Hom}\Big(\sum_{\mathrm{r}_p(G)}^{\oplus} \mathbb{Z}(p^s), C_p\Big) \cong \prod_{\mathrm{r}_p(G)} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(p^s), C_p) \cong \prod_{\mathrm{r}_p(G)} C_p,$$

откуда $\mathrm{r}_p(G) < \infty$ ввиду артиновости модуля $\mathrm{Hom}(G, C_p)$.

Пусть $\bar{A} = H \oplus G$ и $\mathrm{r}_p(G) < \infty$ для каждого p, относящегося к S. Покажем, что модуль $\mathrm{Hom}(A, B)$ артинов. Имеем

$$\mathrm{Hom}(A, B) = \mathrm{Hom}(H, C) \oplus \mathrm{Hom}(G, C).$$

Артиновость модуля $\mathrm{Hom}(H, C)$ уже показывалась. Для модуля $\mathrm{Hom}(G, C)$ имеем

$$\mathrm{Hom}(G, C) = \mathrm{Hom}\Big(G, \sum_p^{\oplus} C_p\Big) \cong \sum_p^{\oplus} \mathrm{Hom}(G, C_p) \cong \sum_p^{\oplus} \sum_{\mathrm{r}_p(G)}^{\oplus} C_p.$$

Принимая во внимание артиновость модуля C_p (следствие 1.7), выводим артиновость модуля $\mathrm{Hom}(G, C)$. Следовательно, $\mathrm{Hom}(A, B)$ — артинов модуль. Теорема доказана. □

Запишем несколько следствий доказанных предложений и теоремы.

Следствие 1.10. *Пусть A и B — группы, причём B — редуцированная группа. $\mathrm{E}(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A, B)$ артинов тогда и только тогда, когда S — ограниченная группа и для всякого p, относящегося к S, p-компонента группы B является ограниченной, $\bar{A} = H \oplus G$, где H — конечная группа, G — редуцированная группа без кручения и для каждого p, относящегося к S, $\mathrm{r}_p(G) < \infty$.*

Следствие 1.11. *Пусть A и B — периодические группы. $\mathrm{E}(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A, B)$ артинов в том и только в том случае, если S — ограниченная группа, причём для любого p, относящегося к S, редуцированная p-компонента группы B является ограниченной, а $\bar{A}$ — конечная группа.*

Следствие 1.12. *Если A и B — группы без кручения, то $\mathrm{E}(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A, B)$ артинов, если и только если S — делимая группа, а A — группа конечного ранга.*

Можно рассмотреть и другие интересные случаи. Например, A — группа без кручения, а B — периодическая группа или A — произвольная, а B — делимая группы.

Укажем более точные соотношения между следом S, коследом $\bar{A}$ и группами A, B в ситуации, когда $\mathrm{E}(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A, B)$ артинов. По предложению 1.6 $B = \mathrm{d}(B) \oplus E \oplus V$, где $\mathrm{d}(B)$ — делимая часть группы B, E — ограниченная группа, причём всякое p, относящееся к E, относится к C и $\mathrm{Hom}(A, V) = 0$. Из доказательства этого предложения заключаем, что $S = \mathrm{d}(B) \oplus E[k]$, если $\bar{A} \neq H$ и $S = \mathrm{d}(B)[l] \oplus E[k]$, если $\bar{A} = H$ для каких-то $k, l \in \mathbb{N}$. В первом случае

$$\mathrm{d}(B) = D \oplus \sum_{\mathfrak{M}}^{\oplus} Q, \quad C = E[k],$$

во втором —

$$C = S = \mathrm{d}(B)[l] \oplus E[k].$$

Можно также привести некоторые общие условия, при которых $S = \mathrm{d}(B)\oplus E$ или $S = E$, т. е. след выделяется прямым слагаемым в группе B.

Следствие 1.13.

1. *Пусть A и B — такие группы, как в следствии* 1.10. *Тогда $B = E \oplus W$ и $S = E[k]$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.*
2. *Если A и B — группы из следствия* 1.11, *то $A = \bar{A} \oplus V$ для какой-то группы V, причём $\mathrm{Hom}(V,B) = 0$, а $\bar{A}$ — конечная группа.*

2. Случай правого $\mathrm{E}(A)$-модуля $\mathrm{Hom}(A,B)$

Пусть группы A и B таковы, что правый $\mathrm{E}(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов. Из предложений 1.1—1.3 следует, что в таком случае след S есть прямая сумма делимой группы и ограниченной группы. Поскольку $\mathrm{Hom}(A,W)$ есть подмодуль $\mathrm{E}(A)$-модуля $\mathrm{Hom}(A,B)$ для любой подгруппы $W \subseteq B$, понятно, что группа S не может иметь бесконечных прямых разложений. Таким образом, если $\mathrm{Hom}(A,B)$ — артинов $\mathrm{E}(A)$-модуль, то след S является прямой суммой делимой группы конечного ранга и конечной группы. Пример модуля $\mathrm{Hom}\big(\mathbb{Z},\mathbb{Z}(p^\infty)\big)$ показывает, что при этом в следе действительно может присутствовать группа $\mathbb{Z}(p^\infty)$.

Договоримся через D_p (R_p) обозначать делимую (соответственно редуцированную) p-компоненту группы A. Пусть T_p — вся p-компонента группы A, т. е. $T_p = D_p \oplus R_p$. Получим некоторую информацию о группах A и B в предположении артиновости $\mathrm{E}(A)$-модуля $\mathrm{Hom}(A,B)$.

Предложение 2.1. *Если $D_p \neq 0$ и группа B содержит подгруппу $\mathbb{Z}(p^\infty)$, то $\mathrm{E}(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ не является артиновым.*

Доказательство. Группа A обладает следующей бесконечной цепью вполне характеристических подгрупп:

$$D_p[p] \subset D_p[p^2] \subset \ldots.$$

Тогда цепь

$$\mathrm{Hom}(A/D_p[p],B) \supset \mathrm{Hom}(A/D_p[p^2],B) \supset \ldots$$

будет бесконечной строго убывающей цепью подмодулей $\mathrm{E}(A)$-модуля $\mathrm{Hom}(A,B)$. □

Предложение 2.2. *Если $\mathrm{Hom}(A,B)$ — артинов $\mathrm{E}(A)$-модуль, то редуцированная p-компонента группы A является ограниченной для любого p, относящегося к группе B, и таких p-компонент конечное число.*

Доказательство. Возьмём некоторое число p, относящееся к группе B. По условию цепь

$$\operatorname{Hom}(A/T_p[p], B) \supseteq \operatorname{Hom}(A/T_p[p^2], B) \supseteq \ldots$$

подмодулей $\mathrm{E}(A)$-модуля $\operatorname{Hom}(A, B)$ должна обрываться. Запишем соответствующую цепь вполне характеристических подгрупп группы A:

$$T_p[p] \subseteq T_p[p^2] \subseteq \ldots \subseteq T_p[p^n] \subseteq \ldots.$$

Поскольку $T_p[p^n] = D_p[p^n] \oplus R_p[p^n]$ для любого n, то нетрудно убедиться, что $R_p[p^m] = 0$ при каком-то m, что означает ограниченность редуцированной p-компоненты R_p. Пусть $T_{p_1}, T_{p_2}, \ldots$ — p-компоненты группы A для всех p, относящихся к группе B. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно написать разложения

$$A = T_{p_1} \oplus T_{p_2} \oplus \ldots \oplus T_{p_n} \oplus V_n, \quad V_n = T_{p_{n+1}} \oplus V_{n+1},$$

для некоторых групп V_n. Рассмотрение цепи модулей

$$\operatorname{Hom}(A/T_{p_1}, B) \supseteq \operatorname{Hom}(A/(T_{p_1} \oplus T_{p_2}), B) \supseteq \ldots$$

показывает, что p-компонент T_{p_n} должно быть конечное число. $\square$

Полезно привести несколько интересных примеров. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый кардинал.

Пример 2.3.

1. Пусть $A = \sum\limits_{\mathfrak{M}}^{\oplus} \mathbb{Z}(p)$ или $A = \sum\limits_{\mathfrak{M}}^{\oplus} \mathbb{Z}$. Тогда $\mathrm{E}(A)$-модуль $\operatorname{Hom}\big(A, \mathbb{Z}(p)\big)$ неприводим.
2. Если $A = \sum\limits_{\mathfrak{M}}^{\oplus} Q$, то $\mathrm{E}(A)$-модуль $\operatorname{Hom}(A, Q)$ неприводим.

Доказательство. 1. Считаем, что $A = \sum\limits_{\mathfrak{M}}^{\oplus} \mathbb{Z}(p)$. Возьмём произвольные гомоморфизмы $0 \neq \varphi, \psi \in \operatorname{Hom}\big(A, \mathbb{Z}(p)\big)$. Достаточно построить такой $\alpha \in \mathrm{E}(A)$, что $\varphi = \psi\alpha$. Любая подгруппа группы A есть прямое слагаемое. В частности, $A = \ker\varphi \oplus X = \ker\psi \oplus Y$, где $X \cong \mathbb{Z}(p) \cong Y$. Искомый эндоморфизм α определяем так: $\alpha a = 0$ для $a \in \ker\varphi$ и $\alpha a = (\psi|_Y^{-1}\varphi)a$ для $a \in X$.

Рассмотрим $\mathrm{E}(A)$-модуль $\operatorname{Hom}\big(A, \mathbb{Z}(p)\big)$, где $A = \sum\limits_{\mathfrak{M}}^{\oplus} \mathbb{Z}$. Имеет место канонический изоморфизм правых $\mathrm{E}(A)$-модулей

$$\operatorname{Hom}\big(A, \mathbb{Z}(p)\big) \cong \operatorname{Hom}\big(A/pA, \mathbb{Z}(p)\big).$$

Любой эндоморфизм фактор-группы A/pA можно поднять до некоторого эндоморфизма группы A. Поэтому подмодули $\mathrm{E}(A)$-модуля и $\mathrm{E}(A/pA)$-модуля $\operatorname{Hom}\big(A/pA, \mathbb{Z}(p)\big)$ совпадают. Но по доказанному $\operatorname{Hom}\big(A/pA, \mathbb{Z}(p)\big)$ — неприводимый $\mathrm{E}(A/pA)$-модуль, так как $A/pA \cong \sum\limits_{\mathfrak{M}}^{\oplus} \mathbb{Z}(p)$.

2. Ядро любого гомоморфизма $\sum\limits_{\mathfrak{M}}^{\oplus} \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ является прямым слагаемым, как сервантная подгруппа делимой группы без кручения. Дальнейшие рассуждения повторяют проведённые в первом абзаце п. 1). $\square$

Мы видим, что кослед $\bar{A}$ может содержать редуцированную группу без кручения бесконечного ранга, однако $\mathrm{E}(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A, B)$ будет артиновым (даже неприводимым!).

Предложение 2.4. *Допустим, что редуцированная p-компонента группы A является ограниченной. Тогда $\mathrm{E}(A)$-модуль $\mathrm{Hom}\big(T_p, \mathbb{Z}(p^k)\big)$ артинов для всякого $k \in \mathbb{N}$, где T_p — p-компонента группы A.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\mathrm{E}(T_p)$-модуль $\mathrm{Hom}\big(T_p, \mathbb{Z}(p^k)\big)$ артинов. Это вытекает из того обстоятельства, что T_p является вполне характеристическим прямым слагаемым группы A и подмодули $\mathrm{E}(T_p)$- и $\mathrm{E}(A)$-модуля $\mathrm{Hom}\big(T_p, \mathbb{Z}(p^k)\big)$ совпадают.

Для каждого $i = 1, 2, \ldots, k-1$ имеем точную последовательность правых $\mathrm{E}(T_p)$-модулей

$$0 \to \mathrm{Hom}\big(T_p, \mathbb{Z}(p^i)\big) \to \mathrm{Hom}\big(T_p, \mathbb{Z}(p^{i+1})\big) \to \mathrm{Hom}\big(T_p, \mathbb{Z}(p^{i+1})/\mathbb{Z}(p^i)\big).$$

Рассмотрение этой последовательности вместе с цепью $\mathrm{E}(T_p)$-модулей

$$\mathrm{Hom}\big(T_p, \mathbb{Z}(p)\big) \subseteq \mathrm{Hom}\big(T_p, \mathbb{Z}(p^2)\big) \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{Hom}\big(T_p, \mathbb{Z}(p^k)\big)$$

показывает эквивалентность артиновости $\mathrm{E}(T_p)$-модулей $\mathrm{Hom}\big(T_p, \mathbb{Z}(p^k)\big)$ и $\mathrm{Hom}\big(T_p, \mathbb{Z}(p)\big)$. Поскольку справедлив канонический изоморфизм $\mathrm{E}(T_p)$-модулей

$$\mathrm{Hom}\big(T_p, \mathbb{Z}(p)\big) \cong \mathrm{Hom}\big(T_p/pT_p, \mathbb{Z}(p)\big),$$

нам нужно установить артиновость последнего модуля.

Запишем

$$T_p = C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_n \oplus D_p,$$

где C_i — прямая сумма циклических групп порядка p^i ($i = 1, \ldots, n$), D_p — делимая p-компонента группы A. В целях упрощения записей будем без ограничения общности считать, что в группе T_p присутствуют циклические слагаемые всех порядков от p до p^n. Имеем разложения

$$pT_p = pC_2 \oplus \ldots \oplus pC_n \oplus D_p,$$
$$T_p/pT_p = C_1 \oplus C_2/pC_2 \oplus \ldots \oplus C_n/pC_n,$$

где группа C_j/pC_j отождествлена с $(C_j + pT_p)/pT_p$. Элементы цепи

$$0 \subset C_1 \subset C_1 \oplus C_2/pC_2 \subset \ldots \subset T_p/pT_p$$

являются подмодулями $\mathrm{E}(T_p)$-модуля T_p/pT_p (это вытекает из того, что порядки элементов при гомоморфизме не повышаются). Обозначим их соответственно $X_0, X_1, \ldots, X_n$. Для каждого $j = 0, 1, \ldots, n-1$ имеет место точная последовательность $\mathrm{E}(T_p)$-модулей

$$0 \to \mathrm{Hom}\big(X_{j+1}/X_j, \mathbb{Z}(p)\big) \to \mathrm{Hom}\big(X_{j+1}, \mathbb{Z}(p)\big) \to \mathrm{Hom}\big(X_j, \mathbb{Z}(p)\big).$$

Чтобы доказать артиновость модуля $\mathrm{Hom}\big(T_p/pT_p, \mathbb{Z}(p)\big)$, теперь достаточно проверить артиновость модулей $\mathrm{Hom}\big(X_{j+1}/X_j, \mathbb{Z}(p)\big)$ для всех $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Принимая во внимание строение групп C_j, можно вывести, что всякий эндоморфизм фактор-группы X_{j+1}/X_j индуцируется некоторым эндоморфизмом группы T_p. Поэтому подмодули $\mathrm{E}(T_p)$-модуля $\mathrm{Hom}\big(X_{j+1}/X_j, \mathbb{Z}(p)\big)$ и его $\mathrm{E}(X_{j+1}/X_j)$-подмодули суть одно и то же. Так как X_{j+1}/X_j является элементарной p-группой, то на основании примера 2.3 получаем, что $\mathrm{E}(X_{j+1}/X_j)$-модуль $\mathrm{Hom}\big(X_{j+1}/X_j, \mathbb{Z}(p)\big)$ неприводим. Таким образом, $\mathrm{E}(T_p)$-модуль $\mathrm{Hom}\big(X_{j+1}/X_j, \mathbb{Z}(p)\big)$ неприводим для всех $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Следовательно, $\mathrm{E}(T_p)$-модуль $\mathrm{Hom}\big(T_p/pT_p, \mathbb{Z}(p)\big)$ артинов, и предложение доказано. $\square$

Ниже обозначаем буквами T и D соответственно периодическую и делимую части группы A.

Теорема 2.5. *Пусть A и B — некоторые группы. $\mathrm{E}(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A, B)$ артинов тогда и только тогда, когда след S равен прямой сумме конечной группы и делимой группы конечного ранга; для каждого p, относящегося к группе B, редуцированная p-компонента группы A является ограниченной, группы A и B не содержат одновременно групп $\mathbb{Z}(p^\infty)$; $\mathrm{E}(A)$-модуль $\mathrm{Hom}\big(A/T, \mathbb{Z}(p)\big)$ артинов, если p относится к S, $\mathrm{E}(A)$-модуль $\mathrm{Hom}\big(A/T, \mathbb{Z}(p^\infty)\big)$ артинов, если в S содержится группа $\mathbb{Z}(p^\infty)$, и, наконец, $\mathrm{E}(A)$-модуль $Hom(A/(T+D), \mathbb{Q})$ артинов, если в S содержится группа $\mathbb{Q}$.*

Доказательство. Необходимость. Считаем, что $\mathrm{E}(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A, B)$ артинов. Утверждения теоремы о следе, редуцированной p-компоненте и о наличии групп $\mathbb{Z}(p^\infty)$ уже установлены (см. начало раздела и предложения 2.1, 2.2). Модули $\mathrm{Hom}\big(A/T, \mathbb{Z}(p)\big)$, $\mathrm{Hom}\big(A/T, \mathbb{Z}(p^\infty)\big)$ и $\mathrm{Hom}(A/(T+D), \mathbb{Q})$ артиновы как подмодули артинова модуля $\mathrm{Hom}(A, B)$.

Достаточность. Рассмотрение строения следа S показывает, что артиновость модуля $\mathrm{Hom}(A, B)$ равносильна артиновости его подмодулей $\mathrm{Hom}\big(A, \mathbb{Z}(p^k)\big)$, $\mathrm{Hom}\big(A, \mathbb{Z}(p^\infty)\big)$ и $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q})$ для всевозможных p, относящихся к S, и некоторых показателей k (разумеется, если соответствующая группа $\mathbb{Z}(p^k)$, $\mathbb{Z}(p^\infty)$ или $\mathbb{Q}$ присутствует в следе). Докажем, что каждый из них артинов.

Возьмём $\mathrm{E}(A)$-модуль $\mathrm{Hom}\big(A, \mathbb{Z}(p^k)\big)$. Так как подгруппа T вполне характеристична в A, то индуцированная точная последовательность

$$\mathrm{Hom}\big(A/T, \mathbb{Z}(p^k)\big) \to \mathrm{Hom}\big(A, \mathbb{Z}(p^k)\big) \to \mathrm{Hom}\big(T, \mathbb{Z}(p^k)\big)$$

является последовательностью правых $\mathrm{E}(A)$-модулей. Модуль $\mathrm{Hom}\big(A/T, \mathbb{Z}(p^k)\big)$ артинов по условию (точнее говоря, артинов модуль $\mathrm{Hom}\big(A/T, \mathbb{Z}(p)\big)$, однако из доказательства предложения 2.4 видно, что это влечёт артиновость модуля $\mathrm{Hom}\big(A/T, \mathbb{Z}(p^k)\big)$ при любом k). Теперь заметим, что

$$\mathrm{Hom}\big(T, \mathbb{Z}(p^k)\big) = \mathrm{Hom}\big(T_p, \mathbb{Z}(p^k)\big).$$

Так как p относится к B, то редуцированная p-компонента группы A является ограниченной. По предложению 2.4 модуль $\mathrm{Hom}\big(T_p, \mathbb{Z}(p^k)\big)$ артинов. Итак, первый и последний модули в записанной последовательности артиновы. Следовательно, артинов модуль $\mathrm{Hom}\big(A, \mathbb{Z}(p^k)\big)$.

Покажем, что $\mathrm{E}(A)$-модуль $\mathrm{Hom}\big(A, \mathbb{Z}(p^\infty)\big)$ артинов. Опять имеем точную последовательность правых $\mathrm{E}(A)$-модулей

$$\mathrm{Hom}\big(A/T, \mathbb{Z}(p^\infty)\big) \to \mathrm{Hom}\big(A, \mathbb{Z}(p^\infty)\big) \to \mathrm{Hom}\big(T, \mathbb{Z}(p^\infty)\big),$$

в которой первый модуль артинов в силу предположения. Затем

$$\mathrm{Hom}\big(T, \mathbb{Z}(p^\infty)\big) = \mathrm{Hom}\big(T_p, \mathbb{Z}(p^\infty)\big).$$

По предположению компонента T_p есть ограниченная группа. Поэтому

$$\mathrm{Hom}\big(T_p, \mathbb{Z}(p^\infty)\big) = \mathrm{Hom}\big(T_p, \mathbb{Z}(p^n)\big),$$

где n таково, что $p^n T_p = 0$. Предложение 2.4 гарантирует артиновость модуля $\mathrm{Hom}\big(T_p, \mathbb{Z}(p^n)\big)$. Таким образом, модуль $\mathrm{Hom}\big(T, \mathbb{Z}(p^\infty)\big)$ артинов. Как и выше, это влечёт артиновость модуля $\mathrm{Hom}\big(A, \mathbb{Z}(p^\infty)\big)$.

Осталось показать артиновость $\mathrm{E}(A)$-модуля $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q})$. Запишем индуцированную точную последовательность правых $\mathrm{E}(A)$-модулей

$$\mathrm{Hom}(A/(T+D), \mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}(T+D, \mathbb{Q}).$$

По предположению первый модуль в последовательности артинов. Проверим артиновость модуля $\mathrm{Hom}(T+D, \mathbb{Q})$. Во-первых, имеем

$$\mathrm{Hom}(T+D, \mathbb{Q}) = \mathrm{Hom}(D, \mathbb{Q}).$$

Так как D есть вполне характеристическое прямое слагаемое группы A, то подмодули $\mathrm{E}(A)$- и $\mathrm{E}(D)$-модуля $\mathrm{Hom}(D, \mathbb{Q})$ совпадают. Докажем, что $\mathrm{Hom}(D, \mathbb{Q})$ — артинов $\mathrm{E}(D)$-модуль. Обозначим через $\mathrm{t}(D)$ периодическую часть группы D. Поскольку $\mathrm{t}(D)$ есть вполне характеристическое прямое слагаемое группы D, то $\mathrm{E}(D)$-модули $\mathrm{Hom}(D, \mathbb{Q})$ и $\mathrm{Hom}(D/\mathrm{t}(D), \mathbb{Q})$ канонически изоморфны. Канонический гомоморфизм колец $\mathrm{E}(D) \to \mathrm{E}\big(D/\mathrm{t}(D)\big)$ является наложением, и подмодули $\mathrm{Hom}(D/\mathrm{t}(D), Q)$ как $\mathrm{E}(D)$- и $\mathrm{E}\big(D/\mathrm{t}(D)\big)$-модуля совпадают. Пример 2.3 говорит об артиновости $\mathrm{E}\big(D/\mathrm{t}(D)\big)$-модуля $\mathrm{Hom}(D/\mathrm{t}(D), \mathbb{Q})$. Мы нашли, что последний модуль в последовательности артинов. Следовательно, $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q})$ — артинов модуль. Теорема доказана. □

Приведём два частных случая доказанной теоремы.

Следствие 2.6. *Пусть A — произвольная, B — редуцированная группы. $\mathrm{E}(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A, B)$ артинов тогда и только тогда, когда след S есть конечная группа; для каждого p, относящегося к B, редуцированная p-компонента группы A является ограниченной; $\mathrm{E}(A)$-модуль $\mathrm{Hom}\big(A/T, \mathbb{Z}(p)\big)$ артинов для каждого p, относящегося к S.*

Следствие 2.7. *Если A и B — периодические группы, то $\mathrm{E}(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A, B)$ артинов в том и только в том случае, если S — конечная группа и для каждого p, относящегося к B, редуцированная p-компонента группы A является ограниченной.*

Теорема 2.5, а также результаты [1] поднимают вопрос, для каких групп A без кручения $\mathrm{E}(A)$-модули $\mathrm{Hom}\big(A, \mathbb{Z}(p)\big)$, $\mathrm{Hom}\big(A, \mathbb{Z}(p^\infty)\big)$ и $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q})$ являются а) неприводимыми, б) артиновыми, в) нётеровыми?

Литература

[1] Крылов П. А., Подберезина Е. И. Строение смешанных абелевых групп с нётеровыми кольцами эндоморфизмов // Абелевы группы и модули. — Томск, 1994. — С. 121—129.

[2] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974. — Т. 1.

[3] Arnold D. M. Finite Rank Torsion-Free Abelian Groups and Rings. — Springer, 1982. — (Lect. Notes Math.; Vol. 931).

[4] Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. Endomorphism Rings of Abelian Groups. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.

Статья поступила в редакцию в мае 2006 г.