

Некоторые обобщения узких абелевых групп

Н. И. КРЮЧКОВ

Рязанский государственный университет
им. С. А. Есенина
e-mail: nik@kni.ryazan.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: узкая группа, непрерывные гомоморфизмы, прямые произведения.

Аннотация

Вводятся новые классы абелевых групп, являющиеся обобщением класса узких групп. Дается характеристика принадлежности групп этим классам на языке подгрупп и прямых произведений. Изучаются свойства полученных классов.

Abstract

N. I. Kruchkov, Some generalizations of slender Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 3, pp. 97–106.

New classes of Abelian groups are introduced. They are generalizations of the class of slender groups. We characterize groups that belong to the new classes with the help of subgroups and direct products. We study some general properties of these classes as well.

Введение

В середине 50-х годов прошлого века Ю. Лось открыл важный класс абелевых групп — узкие группы. Узкие группы играют большую роль при изучении прямых произведений. Позднее появились многочисленные обобщения узких групп (см., например, [4, 8, 9]). Определения этих классов даны на чисто алгебраическом языке, но они, а также определения таких классов абелевых групп, как тонкие, толстые и т. п., укладываются в следующую «топологическую» схему. Выбирается некоторая топологическая абелева группа T (*тестовая топологическая группа*). Дискретная абелева группа G принадлежит определяемому классу тогда и только тогда, когда любой гомоморфизм из T в G является непрерывным. Если тестовой топологической группой будет счётное прямое произведение (дискретных) бесконечных циклических абелевых групп с тихоновской топологией, то группа без кручения G будет принадлежать классу узких групп тогда и только тогда, когда любой гомоморфизм из упомянутой группы в G будет непрерывным. Класс обобщённо узких групп [4] (в терминологии Эды [8] —

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 3, с. 97–106.

© 2007 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

класс почти узких групп) получится, если на упомянутом выше прямом произведении задать топологию, которая является верхней гранью тихоновской и $\mathbb{Z}$ -адической. Класс тонких p -групп получится, если тестовой группой будет периодическая часть группы $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}(p^n)$, снабжённая индуктивной p -адической топологией.

В настоящей работе изучаются абелевы группы, которые получаются по описанной выше схеме, где роль тестового объекта играет счётное прямое произведение бесконечных циклических групп, обозначаемое $\prod_{n=1}^{\infty} (e_n)$, а топология на нём — верхняя грань тихоновской и одной из следующих хорошо известных в теории абелевых групп топологий: прюферовой, топологии конечных индексов или $\mathcal{P}$ -топологии [2]. Получающиеся классы абелевых групп охарактеризованы на языке подгрупп и прямых произведений. Изучены некоторые общие свойства полученных классов (замкнутость относительно прямых сумм, расширений, подгрупп).

Всюду в дальнейшем в настоящей работе под группой понимается абелева группа. Необходимые сведения и стандартные обозначения из теории абелевых групп и топологической алгебры можно найти в хорошо известных монографиях [3, 6, 7]. Отметим два исключения из системы обозначений, принятой в [6, 7]. Аддитивную группу целых p -адических чисел будем обозначать $\mathbb{Z}_p$. Заглавная латинская буква P используется в настоящей работе исключительно для обозначения множества всех простых чисел, в отличие от [7], где этим символом обозначается прямое произведение счётного множества бесконечных циклических групп $\prod_{i=1}^{\infty} (e_n)$. Группу $\prod_{i=1}^{\infty} (e_n)$ в настоящей работе мы обозначаем $\mathbf{L}$. Наконец, если G — группа, обозначим через $\pi(G)$ множество $\{p \in P \mid T_p(G) \neq 0\}$. Договоримся также тихоновскую топологизацию счётного прямого произведения бесконечных дискретных циклических групп называть *стандартной топологизацией* этой группы.

Для удобства чтения напомним также определение $\mathcal{P}$ -топологии [2]. Пусть $\mathcal{P}$ — некоторое множество натуральных чисел, для которых выполнены следующие условия:

а) если $n \in \mathcal{P}$ и m — делитель n , то $m \in \mathcal{P}$;

б) если $m, n \in \mathcal{P}$, причём m и N — взаимно простые числа, то $mn \in \mathcal{P}$.

Если G — произвольная группа, то множество всех подгрупп вида mG , где $m \in \mathcal{P}$, образует базис окрестностей нуля группы G в $\mathcal{P}$ -топологии.

1. Группы, узкие относительно тестовой топологической группы

Определение 1. Пусть $\mathcal{T}$ — некоторая фиксированная топологическая группа. Дискретная группа G называется узкой относительно $\mathcal{T}$, если любой гомоморфизм из $\mathcal{T}$ в G является непрерывным.

В этой статье будут изучаться группы, узкие относительно следующих топологических групп:

- а) $\mathbf{L}^{(\mathcal{P})}$ — счётное прямое произведение дискретных бесконечных циклических групп, наделённое топологией, которая является верхней гранью стандартной топологии и $\mathcal{P}$ -топологии;
- б) $\mathbf{L}^{(\mathbf{Pr})}$ счётное прямое произведение дискретных бесконечных циклических групп, наделённое топологией, которая является верхней гранью стандартной и прюферовой топологий;
- в) $\mathbf{L}^{(\mathbf{f})}$ счётное прямое произведение дискретных бесконечных циклических групп, наделённое топологией, которая является верхней гранью стандартной топологии и топологии конечных индексов.

Классы групп, узких относительно $\mathbf{L}^{(\mathcal{P})}$, $\mathbf{L}^{(\mathbf{Pr})}$ и $\mathbf{L}^{(\mathbf{f})}$, будут обозначаться соответственно $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$, $\mathcal{L}_{\mathbf{Pr}}$ и $\mathcal{L}_{\mathbf{f}}$.

В предложениях 2—4 изучаются образы тестовых топологических групп.

Предложение 2. *Группа G принадлежит классу $\mathcal{L}_{\mathbf{Pr}}$ тогда и только тогда, когда при любом гомоморфизме из $\mathbf{L}$ в G образ $\mathbf{L}$ является прямой суммой свободной группы конечного ранга и конечно копорождённой группы.*

Доказательство. Пусть группа G принадлежит классу $\mathcal{L}_{\mathbf{Pr}}$. Так как произвольный гомоморфизм φ из $\mathbf{L}^{(\mathbf{Pr})}$ в дискретную группу G является непрерывным, то найдётся окрестность U нуля группы $\mathbf{L}^{(\mathbf{Pr})}$, такая что $\varphi(U) = 0$. Вспоминая, как устроены базисные окрестности в группе $\mathbf{L}^{(\mathbf{Pr})}$, получаем, что образ $\mathbf{L}$ является эпиморфным образом группы $\bigoplus_{i=1}^n (e_i) \oplus H$, где H — конечно копорождённая группа. Поэтому образ $\mathbf{L}$ имеет нужный вид.

Пусть при любом гомоморфизме $\varphi: \mathbf{L} \rightarrow G$ группа $\varphi(\mathbf{L})$ является прямой суммой свободной группы F конечного ранга и конечно копорождённой группы K . Обозначим через π_F проекцию группы $F \oplus K$ на F . Так как группа F является узкой, найдётся такое число t , что

$$\pi_F \varphi \left(\prod_{i=t}^{\infty} (e_i) \right) = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$\varphi \left(\prod_{i=t}^{\infty} (e_i) \right) \subset K.$$

Пусть теперь V — такая подгруппа $\mathbf{L}$, что $\mathbf{L}/V = K$. Так как K — конечно копорождённая группа, то в ней выполнено условие минимальности для подгрупп, поэтому V будет окрестностью нуля в прюферовой топологии. Обозначая через U пересечение V и $\prod_{i=t}^{\infty} (e_i)$, получаем, что U — такая окрестность нуля в $\mathbf{L}^{(\mathbf{Pr})}$, что $\varphi(U) = 0$, поэтому φ — непрерывный гомоморфизм из $\mathbf{L}^{(\mathbf{Pr})}$ в G . $\square$

Аналогично предложению 2 доказываются предложения 3 и 4.

Предложение 3. Группа G принадлежит классу $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ тогда и только тогда, когда при любом гомоморфизме $\varphi: \mathbf{L} \rightarrow G$ образ группы $\mathbf{L}$ является прямой суммой свободной группы конечного ранга и такой ограниченной группы B , что $sB = 0$, где $s \in \mathcal{P}$.

Предложение 4. Группа G принадлежит классу $\mathcal{L}_{\mathbf{f}}$ тогда и только тогда, когда при любом гомоморфизме из $\mathbf{L}$ в G образ $\mathbf{L}$ является конечно порождённой группой.

Лемма 5. Пусть K — копериодическая группа, обладающая счётной системой образующих $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Тогда существует сюръективный гомоморфизм ψ из $\mathbf{L}$ на K , при котором $\psi(e_n) = c_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Зададим отображение

$$\varphi: \bigoplus_{i=1}^{\infty} (e_n) \rightarrow K,$$

положив

$$\varphi(n_1 e_1, n_2 e_2, \dots, n_t e_t, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i c_i.$$

Последняя сумма имеет смысл, так как только конечное множество чисел n_i отлично от нуля. Очевидно также, что φ — сюръективный гомоморфизм из $\bigoplus_{i=1}^{\infty} (e_n)$ на K . Короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} (e_n) \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} (e_n) \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} (e_n) / \bigoplus_{i=1}^{\infty} (e_n) \rightarrow 0$$

является периодически расщепляющейся, так как группа $\prod_{i=1}^{\infty} (e_n) / \bigoplus_{i=1}^{\infty} (e_n)$ не имеет кручения. Из того, что K — копериодическая группа, следует, что φ продолжается до гомоморфизма $\psi: \prod_{i=1}^{\infty} (e_n) \rightarrow K$ [6, § 58], который удовлетворяет нужному свойству. $\square$

Лемма 6. Пусть K — копериодическая группа, $a \in K$. Тогда существует гомоморфизм ψ из $\mathbf{L}$ в K , такой что для любого натурального n справедливо $\psi(e_n) = a$.

Лемма 6 доказывается аналогично лемме 5. Гомоморфизм ψ строится как продолжение гомоморфизма

$$\varphi: \bigoplus_{i=1}^{\infty} (e_n) \rightarrow K,$$

определённого равенством

$$\varphi(n_1 e_1, n_2 e_2, \dots, n_t e_t, \dots) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} n_i \right) a.$$

В теоремах 7—9 устанавливаются характеристические свойства групп, узких относительно тестовых топологических групп $\mathbf{L}^{(P)}$, $\mathbf{L}^{(Pr)}$ и $\mathbf{L}^{(f)}$.

Теорема 7. *Группа G принадлежит классу $\mathcal{L}_f$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим условиям:*

- а) G не содержит бесконечных копериодических подгрупп;
- б) G не содержит подгрупп, являющихся счётными прямыми произведениями бесконечных циклических групп.

Доказательство. Пусть группа G принадлежит классу $\mathcal{L}_f$. Во-первых, группа G должна быть редуцированной, так как если она содержит в качестве подгруппы $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{Z}(p^\infty)$, то по лемме 5 найдётся сюръективный гомоморфизм $\mathbf{L}$ на $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{Z}(p^\infty)$, что противоречит предложению 4. Все примарные компоненты G должны быть конечными. Действительно, если бы p -примарная компонента G была бесконечной, то, поскольку эта группа редуцированная, она содержала бы в качестве подгруппы счётную прямую сумму циклических групп порядка p . Тогда, используя лемму 5, мы получили бы гомоморфизм из $\mathbf{L}$ на эту подгруппу, который не удовлетворял бы характеристическому свойству, установленному в предложении 4. Во-вторых, G не может содержать подгрупп, изоморфных $\mathbb{Z}_p$, так как легко строится сюръективный гомоморфизм $\mathbf{L}$ на $\mathbb{Z}_p$. Таким образом, если G содержит копериодическую группу K , то она должна быть урегулированной. В этом случае получим (см. [6, § 55]), что $K \cong \text{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, T(K))$. Докажем, что группа $T(K)$ является конечной. Действительно, так как все её примарные компоненты конечны, то в противном случае она содержала бы подгруппу $\bigoplus_{p \in M} \mathbb{Z}(p)$, где M — некоторое бесконечное множество простых чисел. Значит, K будет содержать подгруппу, изоморфную $\text{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \bigoplus_{p \in M} \mathbb{Z}(p))$. Используя элементарные свойства функтора Ext [6, § 52], получим

$$\begin{aligned} \text{Ext}\left(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \bigoplus_{p \in M} \mathbb{Z}(p)\right) &\cong \prod_{p \in P} \text{Ext}\left(\mathbb{Z}(p^\infty), \bigoplus_{p \in M} \mathbb{Z}(p)\right) \cong \\ &\cong \prod_{p \in M} \text{Ext}(\mathbb{Z}(p^\infty), \mathbb{Z}(p)) \cong \prod_{p \in M} \mathbb{Z}(p). \end{aligned}$$

Теперь, пользуясь леммой 5, легко построить сюръективный гомоморфизм $\mathbf{L}$ на $\prod_{p \in M} \mathbb{Z}(p)$, что приводит к противоречию с предложением 4. Необходимость условий доказана.

Пусть теперь группа G удовлетворяет условиям а) и б) теоремы и φ — произвольный гомоморфизм из $\mathbf{L}$ в G . По известной теореме Нунке [7, предложение 95.2] $\text{Im } \varphi$ будет прямой суммой копериодической группы и прямого произведения не более чем счётного числа бесконечных циклических групп. Учитывая условия теоремы, получим, что $\text{Im } \varphi = F \oplus E$, где E — конечная группа, а F — свободная группа конечного ранга, т. е. образ $\mathbf{L}$ будет конеч-

но порождённой группой, а поэтому в соответствии с предложением 4 группа G принадлежит классу $\mathcal{L}_f$. $\square$

Теоремы 8 и 9 доказываются аналогично теореме 7.

Теорема 8. *Группа G принадлежит классу $\mathbf{L}^{(\mathbf{Pr})}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим условиям:*

- а) почти все примарные компоненты группы $T(G)$ являются редуцированными;
- б) каждая p -примарная компонента группы $T(G)$ имеет конечный ранг;
- в) группа G не содержит подгрупп, изоморфных аддитивным группам целых p -адических чисел (для произвольного простого числа p), подгрупп, являющихся счётными прямыми произведениями бесконечных циклических групп, и подгрупп, изоморфных $\mathbb{Q}$.

Для того чтобы сформулировать теорему, в которой описываются группы, принадлежащие классу $\mathbf{L}^{(\mathcal{P})}$, договоримся о следующих обозначениях. Если G — некоторая группа, то пусть $e_p(G)$ — число, равное максимуму экспонент элементов, принадлежащих p -примарной компоненте группы G . Если в данной группе найдутся элементы, имеющие сколь угодно большие p -экспоненты, то будем считать, что $e_p(G) = \infty$. Пусть $\mathcal{P}$ — множество, которое определяет $\mathcal{P}$ -топологию, и p — простое число, принадлежащее множеству $\mathcal{P}$. Через m_p обозначим наибольшее натуральное число k , которое удовлетворяет условию $p^k \in \mathcal{P}$. Если при любом натуральном k верно $p^k \in \mathcal{P}$, то будем считать, что $m_p = \infty$.

Теорема 9. *Группа G принадлежит классу $\mathbf{L}^{(\mathcal{P})}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим условиям:*

- а) $\pi(G) \subset \mathcal{P}$;
- б) для любого простого числа p , принадлежащего множеству $\mathcal{P}$, справедливо $e_p \leq m_p$;
- в) G не содержит подгрупп, являющихся неограниченными копериодическими группами или счётными прямыми произведениями бесконечных циклических групп.

Напомним определение понятия, введённого С. В. Рычковым [5, 9]. Семейство подгрупп $\mathcal{M}$ группы G называется *индуктивным*, если оно содержит кофинимальное относительно $\subseteq$ подсемейство $\mathcal{M}'$, такое что выполняются следующие условия:

- 1) для любых M_1 и M_2 из $\mathcal{M}$ найдётся $M_3 \in \mathcal{M}'$, такое что $M_1 \cup M_2 \subseteq M_3$;
- 2) для любой вложенной цепочки

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_n \subseteq \dots,$$

где $M_i \in \mathcal{M}'$, и любого $M \in \mathcal{M}$ цепочка

$$(M_1 \cap M) \subseteq \dots \subseteq (M_n \cap M) \subseteq \dots$$

стабилизируется.

Известно, что любое счётное семейство подгрупп, удовлетворяющих условию 1), является индуктивным. Далее в [5] вводится понятие группы, узкой относительно индуктивного семейства своих подгрупп. Именно, группа G называется *узкой относительно индуктивного семейства своих подгрупп $\mathcal{M}$* , если для любого гомоморфизма

$$\varphi: \prod_{i=1}^{\infty} (e_n) \rightarrow G$$

найдутся натуральное число s и $M \in \mathcal{M}$, такие что

$$\varphi\left(\prod_{n \geq s} (e_n)\right) \subset M.$$

В [5] установлен следующий результат.

Теорема 10 ([5]). *Группа G является узкой относительно индуктивного семейства своих подгрупп $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда для любого семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$, где $|I|$ — неизмеримый кардинал, и любого гомоморфизма*

$$\varphi: \prod_{i \in I} G_i \rightarrow G$$

существуют $M \in \mathcal{M}$ и конечное подмножество $J \subset I$, такие что

$$\varphi\left(\prod_{i \in I \setminus J} G_i\right) \subset M.$$

Из предложений 2—4 и теорем 7—9 следует, что группы, принадлежащие классам $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$, $\mathcal{L}_{\mathbf{Pr}}$ и $\mathcal{L}_{\mathbf{f}}$, являются узкими относительно некоторых индуктивных семейств своих подгрупп. Действительно, если группа G принадлежит классу $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$, то в качестве $\mathcal{M}$ можно взять совокупность всех подгрупп вида $G[m]$, где $m \in \mathcal{P}$; если группа принадлежит классу $\mathcal{L}_{\mathbf{f}}$, то в качестве $\mathcal{M}$ берём совокупность всех её конечных подгрупп; в случае же, когда группа принадлежит классу $\mathcal{L}_{\mathbf{Pr}}$, в качестве $\mathcal{M}$ берём множество всех конечно порождённых подгрупп. Во всех случаях в качестве $\mathcal{M}'$ можно выбрать $\mathcal{M}$. Переводя теорему С. В. Рычкова на топологический язык, получаем следующее утверждение.

Теорема 11. *Пусть $\{G_i\}_{i \in I}$ — произвольное семейство групп, причём $|I|$ — неизмеримый кардинал. Группа G принадлежит классу $\mathcal{L}_{\mathbf{f}}$ (классу $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$, $\mathcal{L}_{\mathbf{Pr}}$) тогда и только тогда, когда любой гомоморфизм из группы $\prod_{i \in I} G_i$, снабжённой топологией, которая является верхней гранью тихоновского произведения дискретных групп и топологии конечных индексов (соответственно верхней гранью тихоновского произведения дискретных групп и $\mathcal{P}$ -топологии или верхней гранью тихоновского произведения дискретных групп и прюферовой топологии), в дискретную группу G является непрерывным.*

Эти утверждения могут быть сформулированы на чисто алгебраическом языке.

2. Свойства классов групп, узких относительно тестовой топологической группы

В этой части работы опишем некоторые общие свойства изучаемых нами классов. Во-первых, непосредственно из определения получается, что каждый из классов $\mathcal{L}_f$, $\mathcal{L}_{Pr}$, $\mathcal{L}_P$ замкнут относительно подгрупп. Из теорем 7 и 8 следует, что классы $\mathcal{L}_f$ и $\mathcal{L}_{Pr}$ замкнуты относительно конечных прямых сумм и не замкнуты относительно произвольных прямых сумм.

Предложение 12. *Класс $\mathcal{L}_P$ замкнут относительно прямых сумм.*

Доказательство. Пусть $\{G_i\}_{i \in I}$ — произвольное семейство групп, принадлежащих классу $\mathcal{L}_P$. Докажем, что $\bigoplus_{i \in I} G_i$ также принадлежит $\mathcal{L}_P$. Пусть φ — произвольный гомоморфизм из $\prod_{n=1}^{\infty} (e_n)$ в $\bigoplus_{i \in I} G_i$. Обозначим через π_i канонические проекции $\bigoplus_{i \in I} G_i \rightarrow G_i$. Тогда $\pi_i \varphi$ — гомоморфизм $\prod_{n=1}^{\infty} (e_n)$ в группу, принадлежащую классу $\mathcal{L}_P$, а значит, согласно предложению 3 $\text{Im } \pi_i \varphi$ будет прямой суммой конечно порождённой свободной группы и ограниченной группы, причём порядки элементов этой ограниченной группы являются делителями некоторого числа из $\mathcal{P}$. Далее, $\text{Im } \varphi \subset \bigoplus_{i \in I} \text{Im } \pi_i \varphi$, и $\text{Im } \varphi$ будет прямой суммой конечно порождённой свободной группы и ограниченной, так как в противном случае существовал бы эпиморфизм группы $\prod_{n=1}^{\infty} (e_n)$ на свободную группу счётного ранга или на неограниченную группу, что в обоих случаях противоречит теореме Нунке об эпиморфных образах группы $\prod_{n=1}^{\infty} (e_n)$. Ясно, что если $\text{Im } \varphi \cong F \oplus B$, где B — ограниченная группа, то число $t \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее условию $tB = 0$, можно выбрать так, что $t \in \mathcal{P}$. По предложению 3 группа G является узкой относительно тестового объекта $\mathbf{L}^{(\mathcal{P})}$, т. е. принадлежит классу $\mathcal{L}_P$. $\square$

Предложение 13. *Класс $\mathcal{L}_{Pr}$ не замкнут относительно расширений.*

Доказательство. Обозначим через $\mathbb{Q}_p$ подгруппу аддитивной группы рациональных чисел, состоящую из всех рациональных чисел вида $\frac{r}{s}$, у которых знаменатель взаимно прост с некоторым фиксированным простым числом p . Тогда $\mathbb{Q}/\mathbb{Q}_p \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$. Группы $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{Z}(p^\infty)$ являются узкими относительно тестового объекта $\mathbf{L}^{(Pr)}$, в то время как $\mathbb{Q}$ не является узкой относительно $\mathbf{L}^{(Pr)}$. $\square$

Предложение 14. *Класс $\mathcal{L}_f$ замкнут относительно расширений.*

Доказательство. Пусть G — такая группа, что некоторая её подгруппа H и фактор-группа G/H принадлежат классу $\mathcal{L}_f$. Покажем, что группа G также принадлежит классу $\mathcal{L}_f$. Предположим, что G содержит бесконечную копериодическую подгруппу K . Тогда группа $(H \cup K)/H$, изоморфная группе $K/(H \cap K)$, будет копериодической, так как является эпиморфным образом копериодической

группы K , и редуцированной, так как она является подгруппой группы G/H . Тогда, используя свойства копериодических групп (см., например, [6, § 54]), мы получим, что $H \cap K$ — редуцированная копериодическая подгруппа, лежащая в H . Так как группы H и G/H принадлежат классу $\mathcal{L}_f$, то $H \cap K$ и $(H \cup K)/H$ должны быть конечными по теореме 7, а это невозможно, так как по предположению K является бесконечной. Полученное противоречие показывает, что G не может содержать бесконечных копериодических подгрупп.

Покажем теперь, что G не может содержать подгрупп, изоморфных счётному прямому произведению бесконечных циклических групп. Предположим противное, т. е. группа $\prod_{n=1}^{\infty} (e_n)$ является подгруппой G . Пусть φ — ограничение естественного гомоморфизма $G \rightarrow G/H$ на подгруппу $\prod_{n=1}^{\infty} (e_n)$. Так как фактор-группа G/H по условию принадлежит классу $\mathcal{L}_f$, то по предложению 4 $\text{Im } \varphi \cong F_n \oplus F$, где F_n — свободная группа конечного ранга, а F — конечная группа. Из доказательства предложения 4 следует, что существует такое $s \in \mathbb{N}$, что $\varphi\left(\prod_{n \geq s} (e_n)\right) \subset F$. Следовательно, $\ker \varphi$ — счётное прямое произведение бесконечных циклических групп, т. е. H содержит счётное прямое произведение бесконечных циклических групп, что приводит к противоречию. $\square$

Предложение 15. *Класс $\mathcal{L}_p$ замкнут относительно расширений тогда и только тогда, когда для любого простого числа p справедливо $m_p \in \{0; \infty\}$.*

Доказательство. Докажем сначала, что если для какого-то простого числа p справедливо включение $m_p \in \mathbb{N}$, то в этом случае класс $\mathcal{L}_p$ не замкнут относительно расширений. Действительно, если $m_p = s$ и $s \in \mathbb{N}$, то группа $\mathbb{Z}(p^s)$ по теореме 9 принадлежит классу $\mathcal{L}_p$, $\mathbb{Z}(p^{2s})/\mathbb{Z}(p^s) \cong (\mathbb{Z}(p^s))$ и по той же теореме $\mathbb{Z}(p^{2s}) \notin \mathcal{L}_p$. Будем считать теперь, что для любого простого числа p справедливо включение $m_p \in \{0; \infty\}$. Пусть группа G содержит такую подгруппу H , что $H, G/H \in \mathcal{L}_p$. Легко проверяется, что в этом случае выполняются условия а) и б) теоремы 9, а выполнение условия в) проверяется так же, как при доказательстве предыдущего предложения. $\square$

В [1] было введено понятие группы, узкой относительно заданной на ней топологии. Именно, (топологическая) группа G называется узкой относительно топологии, заданной на ней, если любой гомоморфизм из $\prod_{n=1}^{\infty} (e_n)$, где произведение снабжено тихоновской топологией (дискретных) множителей, является непрерывным. Продолжением данного исследования может быть изучение таких топологических групп G , что любой гомоморфизм из $\mathbf{L}^{(P)}$, $\mathbf{L}^{(Pr)}$ или $\mathbf{L}^{(f)}$ в G является непрерывным.

Литература

- [1] Крючков Н. И. Абелевы группы, узкие относительно заданной на них топологии // *Фундамент. и прикл. мат.* — 1996. — Т. 2, вып. 2. — С. 615—617.

- [2] Кузьминов В. И., Шведов И. А. О пополнении абелевых групп в $\mathcal{P}$ -топологии // Алгебра и логика. — 1970. — Т. 9, № 4. — С. 436—457.
- [3] Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — М.: Наука, 1973.
- [4] Рычков С. В. О прямых произведениях абелевых групп // Мат. сб. — 1982. — Т. 117, № 2. — С. 266—278.
- [5] Рычков С. В. Тестовые абелевы группы и их применение // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1984. — № 8. — С. 29—39.
- [6] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974. — Т. 1.
- [7] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1977. — Т. 2.
- [8] Eda K. Almost slender groups and Fuchs-44-groups // Comment. Math. Univ. St. Paul. — 1983. — Vol. 32. — P. 131—135.
- [9] Rychkov S. V., Thome B. Slender groups and related concepts // Comm. Algebra. — 1986. — Vol. 14. — P. 333—387.

Статья поступила в редакцию в мае 2006 г.