Вполне транзитивность абелевых групп

В. М. МИСЯКОВ
Томский государственный университет
e-mail: mvm@mail.tsu.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, вполне транзитивная группа, вполне транзитивная система групп.

Аннотация

Исследуется свойство вполне транзитивности абелевых групп, их прямых сумм и прямых произведений.

Abstract

V. M. Misyakov, Fully transitivity of Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 3, pp. 107—140.

We study fully transitive Abelian groups and their direct sums and direct products.

Введение

Одним из интересных свойств абелевых групп является свойство вполне транзитивности (абелева группа A называется вполне транзитивной, если для любых элементов $a, b \in A$, для которых $\mathbb{H}(a) \leqslant \mathbb{H}(b)$, существует эндоморфизм группы A, переводящий a в b). Данное понятие было введено Капланским в [39] для редуцированных модулей над полным кольцом дискретного нормирования, а также для абелевых p-групп. Там же им было установлено, что всякая редуцированная сепарабельная p-группа является вполне транзитивной. Далее Капланский ставит вопрос: будет ли любая абелева p-группа вполне транзитивной? Первые отрицательные примеры, связанные с данным вопросом, привел Меджиббен [43]. Хилл [37] показал, что тотально проективные p-группы, введённые Нунке [46], вполне транзитивны. Корнер [28] рассматривал следующее понятие. Пусть Φ — подкольцо кольца $\mathrm{E}(G)$ и H — Φ-инвариантная подгруппа редуцированной p-группы G. Тогда Φ вполне транзитивно на H, если для произвольных элементов $x, y \in H$, таких что $U_G(x) \leqslant U_G(y)$, существует $\phi \in \Phi$ со свойством $\phi x = y$. Он доказал, что p-группа G вполне транзитивна тогда и только тогда, когда $\mathrm{E}(G)$ вполне транзитивно на $p^\omega G$. Там же им был приведён пример редуцированной p-группы, которая не является вполне транзитивной.

Пусть λ — предельное порядковое число. Абелева p-группа G называется λ-сепарабельной (ле Борнье [41]), если всякая её конечная система элементов

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 3, с. 107—140.

содержится в некотором прямом слагаемом группы G, являющемся тотально проективной группой длины меньше λ. Ле Борнье доказал, что всякая λ-сепарабельная группа вполне транзитивна.

Хилл и Меджиббен [38] дали описание IT-групп (они назвали p-группу G IT-группой, если она изоморфна изотипной подгруппе тотально проективной группы). В частности, они доказали, что всякая IT-группа вполне транзитивна.

Крылов [9] по аналогии с вполне транзитивными p-группами рассматривал понятие вполне транзитивности для групп без кручения. Арнольд [24] описал однородные вполне транзитивные группы без кручения конечного ранга. Крылов в [10, 13] привёл описание вполне транзитивных счётных однородных групп без кручения и вполне транзитивных групп без кручения, у которых p-ранг (т. е. ранг группы G/pG) конечен, что обобщило результаты, полученные Добрусиным [7]. Неоднородные вполне транзитивные группы без кручения рассматривались Крыловым в [11, 13], а в [12] он построил примеры суперразложимых вполне транзитивных групп. Чехлов [23] получил характеризацию вполне транзитивных групп без кручения, все ненулевые эндоморфизмы которых — мономорфизмы.

Важным подклассом класса вполне транзитивных групп является класс квазисервантно инъективных групп (кратко qpi-групп), т. е. таких групп A, что всякий гомоморфизм любой сервантной подгруппы B в A продолжается до эндоморфизма группы A. Изучение qpi-групп заявлено как проблема 17 а) в [19]. Редуцированными периодическими qpi-группами являются периодически полные группы, строение которых известно. Описание qpi-групп без кручения получено Чехловым [21, 22]. Смешанные qpi-группы изучались Добрусиным [6].

Впервые случай смешанной вполне транзитивной группы был рассмотрен в работе Мадера [42], где он показал, что редуцированная p-адическая алгебраически компактная группа вполне транзитивна.

Москаленко [17], исследуя группу $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}(p^\infty), T)$, показала её вполне транзитивность в случае, когда T — прямая сумма циклических p-групп.

Вполне транзитивные p-группы рассматривались также в [27, 33, 34, 44, 47]. Вполне транзитивные группы без кручения исследовались в [2,30,31,35]. Вполне транзитивные непериодические модули исследовались в [32]. В [36] рассматривались вполне транзитивные p-локальные модули. В [5] охарактеризованы вполне транзитивные сепарабельные абелевы группы и их прямые произведения. Вполне транзитивность прямых сумм и прямых произведений произвольных абелевых групп рассматривалась в [4,15]. В [3] описаны вполне характеристические подгруппы и их решётки для вполне транзитивных групп из различных классов абелевых групп, в этой работе также изучались свойства вполне транзитивных групп, являющихся k-прямыми суммами абелевых групп. Обзор результатов по вполне транзитивным группам и группам, близким к ним, можно найти в [1]. В [40] отмечен ряд проблем, связанных с исследованиями по вполне транзитивным абелевым группам. В частности, проблема 45 формулируется следующим образом: «найти необходимые и достаточные условия вполне транзитивности прямой суммы $\sum\limits_{i\in I}^{\oplus} G_i$ и произведения $\prod\limits_{i\in I} G_i$ некоторых групп G_i».

В данной статье приводятся основные результаты о вполне транзитивных абелевых группах, полученные автором в разные годы и связанные с вышеприведённой проблемой. В первом разделе приводятся необходимые и достаточные условия вполне транзитивности прямых сумм произвольных абелевых групп и достаточные условия вполне транзитивности прямых произведений таких групп. Во втором разделе описываются вполне транзитивные прямые произведения обобщённо сепарабельных групп без кручения. В третьем разделе исследуется вполне транзитивность прямого произведения $\mathbf{s}$-обобщённо узких групп. В четвёртом разделе даётся полное описание вполне транзитивности прямого произведения произвольных сепарабельных групп. Выясняются вопросы влияния вполне транзитивности на расщепляемость прямого произведения $\mathbf{s}$-обобщённо узких групп, на сепарабельность прямого произведения групп. Приведённые доказательства существенно переработаны и унифицированы.

Введём следующие обозначения:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$ — группа целых чисел;
$\mathbb{Z}(p^\infty)$ — квазициклическая группа;
π — множество всех простых чисел;
$o(a)$ — порядок элемента a;
$h_p(a)$ ($h_p^*(a)$) — высота (обобщённая высота) элемента a;
$H_p(a)$ — индикатор (ульмовская последовательность) элемента a;
$\chi_A(a)$ или $\chi(a)$ — характеристика элемента a в группе без кручения A;
$\mathbb{H}_A(a)$ или $\mathbb{H}(a)$ — высотная матрица элемента a в группе A;
$\mathrm{E}(A)$ — кольцо эндоморфизмов группы A;
$\mathrm{Hom}(A, B)$ — группа гомоморфизмов из группы A в группу B;
$t_A(a)$ или $t(a)$ — тип элемента a в группе без кручения A;
$t(A)$ — тип однородной группы без кручения;
$\pi(A)$ — множество простых чисел p, таких что $pA \neq A$;
$T(A)$ — периодическая часть группы A;
$T_p(A)$ — p-компонента группы A.

Обозначения и терминология, используемые без пояснений, стандартные и взяты из [19, 20]. Все группы предполагаются абелевыми.

1. Вполне транзитивность прямых сумм и прямых произведений абелевых групп

В данном разделе устанавливается критерий вполне транзитивности прямых сумм абелевых групп и приводятся достаточные условия вполне транзитивности прямых произведений произвольных редуцированных абелевых групп. Строится пример, показывающий существование таких вполне транзитивных прямых произведений редуцированных групп, для которых одно из достаточных условий вполне транзитивности не выполняется.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — последовательность всех простых чисел в порядке их возрастания. Напомним, что $h_p^*(a) = \sigma$ (где σ — порядковое число), если $a \in p^\sigma A \setminus p^{\sigma+1}A$. В случае, когда $a \in p^\tau A = p^{\tau+1}$, как обычно, полагаем $h_p^*(a) = \infty$ и считаем, что ∞ больше всякого порядкового числа. Матрицу размера $\omega \times \omega$, элементами которой являются порядковые числа или символ ∞, называют высотной матрицей. Такую матрицу

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} & \ldots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

можно интерпретировать как функцию $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathfrak{On} \cup \{\infty\}$ (где $\mathfrak{On}$ — класс всех порядковых чисел), такую что $f(i,j) = \alpha_{ij}$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ класс всех высотных матриц. Пусть $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}$, $M_1 = (\alpha_{ij})$, $M_2 = (\beta_{ij})$. Тогда полагаем $M_1 \leqslant M_2$, если $\alpha_{ij} \leqslant \beta_{ij}$ для всех $i, j \in \mathbb{N}$. Если $M' = \bigl\{\bigl(\alpha_{ij}^{(r)}\bigr) \bigm| r \in K\bigr\}$ — некоторое множество высотных матриц, то естественным образом определим $\inf\limits_{\mathfrak{M}} M'$, а именно $\inf\limits_{\mathfrak{M}} M' = (\beta_{ij})$, где β_{ij} — наименьший из элементов $\alpha_{ij}^{(r)}$, $r \in K$. С элементом a группы A связывают высотную матрицу

$$\mathbb{H}(a) = \begin{pmatrix} h^*_{p_1}(a) & h^*_{p_1}(p_1 a) & \ldots & h^*_{p_1}(p_1^k a) & \ldots \\ h^*_{p_2}(a) & h^*_{p_2}(p_2 a) & \ldots & h^*_{p_2}(p_2^k a) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h^*_{p_n}(a) & h^*_{p_n}(p_n a) & \ldots & h^*_{p_n}(p_n^k a) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = (\sigma_{ij}).$$

n-ю строку матрицы $\mathbb{H}(a)$ называют p_n-индикатором элемента a и обозначают $H_{p_n}(a)$.

Фукс [20], следуя [39], называет редуцированную абелеву p-группу вполне транзитивной, если для любых элементов a и b этой группы, для которых $H_p(a) \leqslant H_p(b)$, существует эндоморфизм φ, переводящий a в b. По аналогии с этим понятием можно ввести понятие вполне транзитивности для произвольной абелевой группы. Назовём абелеву группу G вполне транзитивной, если для любых элементов $a, b \in G$, таких что $\mathbb{H}(a) \leqslant \mathbb{H}(b)$, существует $\varphi \in \mathrm{E}(G)$ со свойством $\varphi(a) = b$. Тогда даже для довольно простых нередуцированных групп получаем, что они не являются вполне транзитивными в смысле введённого определения.

Рассмотрим простой пример, в котором, как принято [19, 20], полагаем, что обобщённая p-высота нулевого элемента совпадает с его обычной p-высотой и равна ∞.

Пример 1.1. Пусть $G = \langle a\rangle \oplus \mathbb{Z}(p_n^\infty)$, где $o(a) = p_n^s$ и $b \in \mathbb{Z}(p_n^\infty)$, $o(b) = p_n^k$, $k > s$. Имеем $\mathbb{H}(a) < \mathbb{H}(b)$, так как $H_{p_n}(a) = (0, 1, \ldots, s-1, \infty, \ldots)$, $H_{p_n}(b) = (\infty, \ldots)$ и $H_{p_i}(a) = H_{p_i}(b) = (\infty, \ldots)$ для всех $i \neq n$. Однако не существует $\varphi \in \mathrm{E}(G)$, такого что $\varphi(a) = b$, так как эндоморфизм не увеличивает порядок элемента.

Определение 1.1 (Гриншпон [4]). Группа G называется вполне транзитивной, если для любых $a, b \in G$ из того, что $\mathbb{H}(a) \leqslant \mathbb{H}(b)$ и $o(a) \,\vdots\, o(b)$ (порядок элемента a делится на порядок элемента b), следует существование $\varphi \in \mathrm{E}(G)$, такого что $\varphi(a) = b$. Полагаем при этом, что если $o(a) = \infty$, то условие $o(a) \,\vdots\, o(b)$ выполняется для любого $b \in G$.

Предложение 1.1 (Гриншпон [4]). *Для редуцированной группы G следующие условия эквивалентны*:

1) *для любых $a, b \in G$ из того, что $\mathbb{H}(a) \leqslant \mathbb{H}(b)$ и $o(a) \,\vdots\, o(b)$, следует существование $\varphi \in \mathrm{E}(G)$, такого что $\varphi(a) = b$*;
2) *для любых $a, b \in G$ из того, что $\mathbb{H}(a) \leqslant \mathbb{H}(b)$, следует существование $\varphi \in E(G)$, такого что $\varphi(a) = b$.*

Покажем, что вопрос о вполне транзитивности группы сводится к соответствующему вопросу для её редуцированной части.

Теорема 1.2. *Группа G вполне транзитивна тогда и только тогда, когда её редуцированная часть вполне транзитивна.*

Доказательство. Если G — вполне транзитивная группа, то вполне транзитивность её редуцированной части легко вытекает из определения 1.1.

Проведём доказательство в обратную сторону. Пусть $G = A \oplus B$, где A — редуцированная, B — делимая части группы G. Рассмотрим произвольные ненулевые элементы $a, b \in G$, такие что $\mathbb{H}(a) \leqslant \mathbb{H}(b)$ и $o(a) \,\vdots\, o(b)$. Пусть $a = a_1 + b_1$, $b = a_2 + b_2$. Рассмотрим возникающие случаи.

1. $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, где $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$. Тогда $\mathbb{H}(a) = \mathbb{H}(a_1)$, $\mathbb{H}(b) = \mathbb{H}(a_2)$ и $\mathbb{H}(a_1) \leqslant \mathbb{H}(a_2)$. Поэтому из вполне транзитивности группы A следует существование $\varphi \in \mathrm{E}(A)$, такого что $\varphi(a_1) = a_2$. Продолжим φ до эндоморфизма $\psi \in \mathrm{E}(G)$, полагая $\psi(c) = \varphi(c)$, если $c \in A$, и $\psi(c) = 0$, если $c \in B$.

2. $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$. Пусть $o(a) < \infty$ (случай, когда $o(a) = \infty$ доказывается аналогично). Рассмотрим подгруппу $\langle a\rangle \subset G$. Построим отображение $\varphi\colon \langle a\rangle \to B$ по правилу $\varphi(a) = b$. Оно определено корректно, так как если $ma = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, то $m \,\vdots\, o(a)$ и, следовательно, $m \,\vdots\, o(b)$. Тогда $\varphi(0) = \varphi(ma) = m\varphi(a) = mb = 0$. Легко проверяется, что φ — гомоморфизм. Пусть $\rho\colon \langle a\rangle \to G$ — вложение. Так как B — инъективная группа, существует гомоморфизм $\psi \in \mathrm{Hom}(G, B)$, такой что $\psi\rho = \varphi$, т. е. $\psi(a) = b$.

3. Случай $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$ невозможен.

4. Пусть $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, т. е. $a, b \in B$ и $o(a) \,\vdots\, o(b)$. Рассмотрим подгруппы $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$ из B. Существует гомоморфизм $\varphi\colon \langle a\rangle \to \langle b\rangle$, такой что $\varphi(a) = b$. Пусть $i\colon \langle a\rangle \to B$ — вложение. Так как B — инъективная группа, то $\psi i = \varphi$ для

некоторого $\psi \in \mathrm{E}(B)$, причём $\psi(a) = b$. Эндоморфизм ψ очевидным образом продолжается до эндоморфизма группы G.

Таким образом, группа G вполне транзитивна. $\square$

Из теоремы 1.2 вытекает, что для изучения свойства вполне транзитивности групп достаточно рассматривать только редуцированные. Поэтому в дальнейшем под группой будем понимать редуцированную группу.

Дадим два основных понятия, которые будем использовать при исследовании вполне транзитивности прямых сумм и прямых произведений. Впервые они были сформулированы С. Я. Гриншпоном [2] для групп без кручения. Первое из них позже и независимо появилось также у Файлса и Голдсмита [33].

Определение 1.2. Систему групп $\{G_i\}_{i\in I}$ будем называть вполне транзитивной, если для каждой пары групп $(G_i, G_j)_{i,j\in I}$ (i может совпадать с j) выполняется условие: из того, что $a \in G_i$, $b \in G_j$ и $\mathbb{H}(a) \leqslant \mathbb{H}(b)$, следует существование $\varphi \in \mathrm{Hom}(G_i, G_j)$ со свойством $\varphi(a) = b$.

Определение 1.3. Будем говорить, что система групп $\{G_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию монотонности для высотных матриц, если для каждой группы G_j и для любого элемента $0 \neq a_j \in G_j$ ($j \in I$) из выполнения соотношений

1) $\inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_{i_1}), \ldots, \mathbb{H}(a_{i_s})\} \leqslant \mathbb{H}(a_j)$, где $a_{i_k} \in G_{i_k}$, $i_k \in I$, $k = \overline{1,s}$, $i_k \neq i_l$ при $k \neq l$;
2) $\mathbb{H}(a_j) \ngeqslant \mathbb{H}(a_{i_k})$ для всех $k = \overline{1,s}$

следует существование элементов $a_{j_1}, \ldots, a_{j_r} \in G_j$ со свойствами

1′) $a_{j_1} + \ldots + a_{j_r} = a_j$;
2′) для каждого элемента a_{j_l} ($l = \overline{1,r}$) найдётся такой элемент a_{i_k} ($k = \overline{1,s}$), что $\mathbb{H}(a_{j_l}) \geqslant \mathbb{H}(a_{i_k})$.

Часто вместо фразы «условие монотонности для высотных матриц» будем писать просто «условие монотонности». Нетрудно показать, что если система групп вполне транзитивна, то и всякая её подсистема вполне транзитивна. Если система групп удовлетворяет условию монотонности, то и всякая её подсистема удовлетворяет этому свойству.

Теорема 1.3. *Группа $G = \bigoplus\limits_{i\in I} G_i$ вполне транзитивна тогда и только тогда, когда система групп $\{G_i\}_{i\in I}$ вполне транзитивна и удовлетворяет условию монотонности.*

Доказательство. Пусть G — вполне транзитивная группа. Рассмотрим произвольные группы $G_\alpha, G_\beta \in \{G_i\}_{i\in I}$ и элементы $g_\alpha \in G_\alpha$, $g_\beta \in G_\beta$, такие что $\mathbb{H}(g_\alpha) \leqslant \mathbb{H}(g_\beta)$. Тогда $\mathbb{H}(\rho_\alpha g_\alpha) \leqslant \mathbb{H}(\rho_\beta g_\beta)$, где $\rho_\alpha\colon G_\alpha \to G$, $\rho_\beta\colon G_\beta \to G$ — вложения. Из вполне транзитивности группы G следует существование гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{E}(G)$, такого что $(\varphi\rho_\alpha)(g_\alpha) = \rho_\beta(g_\beta)$ и, значит, $(\pi_\beta\varphi\rho_\alpha)(g_\alpha) = g_\beta$, где $\pi_\beta\colon G \to G_\beta$ — проекция.

Покажем, что система $\{G_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию монотонности. Рассмотрим произвольную группу $G_j \in \{G_i\}_{i\in I}$ и элемент $0 \neq a_j \in G_j$, такой что $\inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_{i_1}),\ldots,\mathbb{H}(a_{i_s})\} \leqslant \mathbb{H}(a_j)$, причём $\mathbb{H}(a_j) \not\geqslant \mathbb{H}(a_{i_k})$ для всех $k=\overline{1,s}$. Для каждого $k=\overline{1,s}$ рассмотрим вложения $\rho_{i_k}\colon G_{i_k}\to G$ и $\rho_j\colon G_j\to G$, где $G_{i_k}\in\{G_i\}_{i\in I}$ и $a_{i_k}\in G_{i_k}$. Тогда

$$\mathbb{H}\big(\rho_{i_1}(a_{i_1})+\ldots+\rho_{i_s}(a_{i_s})\big) \leqslant \mathbb{H}\big(\rho_j(a_j)\big),$$

а из вполне транзитивности группы G следует существование такого гомоморфизма $\varphi\in \mathrm{E}(G)$, что

$$\rho_j(a_j)=\varphi\big(\rho_{i_1}(a_{i_1})+\ldots+\rho_{i_s}(a_{i_s})\big)=(\varphi\rho_{i_1})(a_{i_1})+\ldots+(\varphi\rho_{i_s})(a_{i_s}).$$

Имеем

$$a_j=(\pi_j\rho_j)(a_j)=(\pi_j\varphi\rho_{i_1})(a_{i_1})+\ldots+(\pi_j\varphi\rho_{i_s})(a_{i_s}),$$

где $\pi_j\colon G\to G_j$ — проекция. Пусть $a_{j_k}=(\pi_j\varphi\rho_{i_k})(a_{i_k})$ для любого $k=\overline{1,s}$. Тогда $a_j=a_{j_1}+\ldots+a_{j_s}$, причём для каждого элемента a_{j_k} ($k=\overline{1,s}$) существует элемент a_{i_k} ($k=\overline{1,s}$), такой что $\mathbb{H}(a_{i_k})\leqslant\mathbb{H}(a_{j_k})$.

Проведём доказательство в обратную сторону. Пусть $a,b\in G$, причём $\mathbb{H}(a)\leqslant \leqslant \mathbb{H}(b)$. Пусть $a=a_{i_1}+\ldots+a_{i_r}$, $b=b_{l_1}+\ldots+b_{l_n}$, где $a_{i_t}\in G_{i_t}$, $b_{l_j}\in G_{l_j}$, $i_t,l_j\in I$ для любых $t=\overline{1,r}$ и $j=\overline{1,n}$. Покажем, что для всякого элемента b_{l_j} ($j=\overline{1,n}$) существует гомоморфизм $\varphi_j\in\mathrm{Hom}(G,G_{l_J})$, такой что $\varphi_j(a)=b_{l_j}$. Тогда $b=(\varphi_{j_1}+\ldots+\varphi_{j_n})(a)$ и $\varphi_{j_1}+\ldots+\varphi_{j_n}\in\mathrm{E}(G)$. Если для элемента b_{l_j} найдётся элемент a_{i_k}, такой что $\mathbb{H}(b_{l_j})\geqslant\mathbb{H}(a_{i_k})$, то из вполне транзитивности системы $\{G_i\}_{i\in I}$ следует существование отображения $\psi_j\in\mathrm{Hom}(G_{i_k},G_{l_j})$, обладающего свойством $\psi_j(a_{i_k})=b_{l_j}$. Тогда положим $\varphi_j(a)=\psi_j(a_{i_k})$, т. е. $\varphi_j=\psi_j\pi_{i_k}$, где $\pi_{i_k}\colon G\to G_{i_k}$ — проекция. Пусть не существует такого элемента a_{i_k}, что $\mathbb{H}(b_{l_j})\geqslant\mathbb{H}(a_{i_k})$. Так как $\mathbb{H}(b_{l_j})\geqslant\inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_{i_k})\}_{k=\overline{1,r}}$ и система $\{G_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию монотонности, то существуют элементы $b_{l_{j_\tau}}\in G_{l_j}$ ($\tau=\overline{1,t}$), такие что $b_{l_j}=b_{l_{j_1}}+\ldots+b_{l_{j_t}}$, причём для любого $b_{l_{j_\tau}}$ ($\tau=\overline{1,t}$) найдётся $a_{i_{k_\tau}}\in\{a_{i_k}\}_{k=\overline{1,r}}$, такой что $\mathbb{H}(b_{l_{j_\tau}})\geqslant\mathbb{H}(a_{i_{k_\tau}})$. Тогда из вполне транзитивности системы $\{G_i\}_{i\in I}$ следует существование гомоморфизма $\psi_{j_\tau}\in\mathrm{Hom}(G_{i_{k_\tau}},G_{l_j})$, такого что $\psi_{j_\tau}(a_{i_{k_\tau}})=b_{l_{j_\tau}}$, причём $\psi_{j_1}(a_{i_{k_1}})+\ldots+\psi_{j_t}(a_{i_{k_t}})=b_{l_j}$. Тогда $\varphi_j(a)= =\psi_{j_1}(a_{i_{k_1}})+\ldots+\psi_{j_t}(a_{i_{k_t}})$, где $\varphi_j=\psi_{j_1}\pi_{i_{k_1}}+\ldots+\psi_{j_t}\pi_{i_{k_t}}$ и $\pi_{i_{k_\tau}}\colon G\to G_{i_{k_\tau}}$ ($\tau=\overline{1,t}$) — проекции. Таким образом, $\varphi_j(a)=b_{l_j}$. □

Следующее предложение показывает, что вполне транзитивность и выполнение условия монотонности для системы групп $\{G_i\}_{i\in I}$ являются необходимыми для вполне транзитивности прямого произведения произвольных групп.

Предложение 1.4. *Если $G=\prod\limits_{i\in I}G_i$ — вполне транзитивная группа, то система $\{G_i\}_{i\in I}$ вполне транзитивна и удовлетворяет условию монотонности.*

Доказательство данного утверждения проводится аналогично доказательству необходимости в предыдущей теореме. □

Следующее определение будет полезно для выяснения некоторых достаточных условий для вполне транзитивности группы $G=\prod\limits_{i\in I}G_i$.

Определение 1.4. Будем говорить, что система групп $\{G_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию конечности для высотных матриц, если для любой группы $G_j \in \{G_i\}_{i\in I}$ и любого элемента $0 \neq g_j \in G_j$, такого что $o(g_j) = \infty$, из выполнения условия

$$\mathbb{H}(g_j) \geqslant \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_\gamma)\}_{\gamma\in J}, \quad \text{где} \quad |J| = \aleph_0 \quad \text{и} \quad J \subseteq I,$$

следует существование конечной подсистемы элементов $\{g_{\gamma_k}\}_{\gamma_k\in J,\ k=\overline{1,n}}$, такой что

$$\mathbb{H}(g_j) \geqslant \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_{\gamma_k})\}_{\gamma_k\in J,\ k=\overline{1,n}}.$$

Иногда вместо слов «условие конечности для высотных матриц» будем писать просто «условие конечности».

Предложение 1.5. *Группа $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$ вполне транзитивна, если система групп $\{G_i\}_{i\in I}$ вполне транзитивна и удовлетворяет условиям монотонности и конечности.*

Доказательство. Пусть $a, b \in G$ и $\mathbb{H}(a) \leqslant \mathbb{H}(b)$, где $a = (\ldots, a_i, \ldots)$, $b = (\ldots, b_i, \ldots)$. Покажем, что для произвольной координаты b_j элемента b найдётся конечная подсистема координат $\{a_{i_l}\}_{l=\overline{1,n}}$ элемента a, такая что $\mathbb{H}(b_j) \geqslant \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_{i_l})\}_{l=\overline{1,n}}$. Рассмотрим два случая: 1) $o(b_j) < \infty$, 2) $o(b_j) = \infty$, при этом будем считать, что почти все координаты a_i элемента a отличны от нуля.

Пусть $o(b_j) < \infty$. Так как высотная матрица $\mathbb{H}(b_j)$ содержит конечное число σ_{nk} порядковых чисел, отличных от ∞, и $\mathbb{H}(b_j) \geqslant \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_i)\}_{i\in I}$, то существует такое конечное подмножество $\{a_{i_l}\}_{l=\overline{1,n}} \subset \{a_i\}_{i\in I}$, что $\mathbb{H}(b_j) \geqslant \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_{i_l})\}_{l=\overline{1,n}}$.

Если $o(b_j) = \infty$, то, учитывая неравенство $\mathbb{H}(b_j) \geqslant \mathbb{H}(a)$ и то, что высотная матрица любого элемента группы состоит не более чем из счётного множества порядковых чисел, получаем существование такого подмножества $\{a_\tau\}_{\tau\in J} \subseteq \{a_i\}_{i\in I}$, где $|J| \leqslant \aleph_0$, что $\mathbb{H}(b_j) \geqslant \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_\tau)\}_{\tau\in J}$. Пусть $|J| = \aleph_0$. Так как система $\{G_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию конечности, то существует конечное подмножество $\{a_{\tau_l}\}_{l=\overline{1,m}} \subset \{a_\tau\}_{\tau\in J}$, такое что $\mathbb{H}(b_j) \geqslant \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_{\tau_l})\}_{l=\overline{1,m}}$.

Покажем, что существует такой гомоморфизм $\psi \in \mathrm{E}(G)$, что $\psi(a) = b$. Для этого достаточно заметить, что для произвольной координаты b_j элемента b найдётся гомоморфизм $\psi_j \in \mathrm{Hom}(G, G_j)$, такой что $\psi_j(a) = b_j$. Тогда из [19, теорема 8.2] будет следовать существование требуемого гомоморфизма ψ. Пусть $\mathbb{H}(b_j) \geqslant \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_{i_k})\}_{i_k\in I,\ k=\overline{1,n}}$, где $b_j \in G_j$, $a_{i_k} \in G_{i_k}$. Так как система $\{G_i\}_{i\in I}$ вполне транзитивна и удовлетворяет условию монотонности, подсистема $\{G_j, G_{i_k}\}_{k=\overline{1,n}}$, где $G_j \neq G_{i_k}$ для любого $k = \overline{1,n}$, также вполне транзитивна и удовлетворяет условию монотонности. Следовательно, группа $G' = G_j \oplus \bigoplus\limits_{k=1}^{n} G_{i_k}$, как вытекает из теоремы 1.3, вполне транзитивна. Поэтому будет существовать гомоморфизм $\psi'_j \in \mathrm{Hom}(G', G_j)$, такой что $(\psi'_j\rho')(a_{i_1} + \ldots + a_{i_n}) = b_j$, где $\rho'\colon \bigoplus\limits_{k=1}^{n} G_{i_k} \to G'$ — вложение, $\psi'_j = \pi'_j\psi''_j$, $\pi'_j\colon G' \to G_j$ — проекция, $\psi''_j \in \mathrm{E}(G')$, причём $(\psi''_j\rho')(a_{i_1} + \ldots + a_{i_n}) = \rho_j(b_j)$, $\rho_j\colon G_j \to G'$ — вложение. Так как G' — прямое слагаемое группы G, можно продолжить гомоморфизм $\psi'_j\rho'$ до гомоморфизма $\psi_j \in \mathrm{Hom}(G, G_j)$, переводящего a в элемент b_j. Если же группа G_j совпадает с одной из групп G_{i_k}, $k = \overline{1,n}$, то, проведя аналогичные рассуждения для подсистемы $\{G_{i_k}\}_{k=\overline{1,n}}$, получим также гомоморфизм $\psi_j \in \mathrm{Hom}(G, G_j)$, который переведёт элемент a в элемент b_j. $\square$

Следующий пример показывает, что существует такая вполне транзитивная группа $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$, что система $\{G_i\}_{i\in I}$ условию конечности не удовлетворяет.

Пример 1.2. Пусть $A = \prod\limits_{i=0}^{\infty} A_i$, где A_0 — группа целых p-адических чисел, а A_i $(i = \overline{1,\infty})$ — циклические группы порядка p^i (здесь p — фиксированное простое число). Так как каждая группа A_i $(i = \overline{0,\infty})$ алгебраически компактна, то A — алгебраически компактная группа [19], а значит, по следствию 3.10 вполне транзитивна. Рассмотрим элементы $a_i \in A_i$ $(i = \overline{0,\infty})$, такие что $h_p(a_i) = 0$, тогда $\mathbb{H}(a_0) = \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_i)\}_{i=\overline{1,\infty}}$. В то же время не существует конечного подмножества элементов $\{a_{i_k}\}_{k=\overline{1,n}} \subset \{a_i\}_{i=\overline{1,\infty}}$, такого что $\mathbb{H}(a_0) = \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_{i_k})\}_{k=\overline{1,n}}$.

2. Вполне транзитивность групп без кручения

В данном разделе показывается, что условие монотонности, наложенное на систему сервантных подгрупп ранга 1 произвольной группы без кручения, эквивалентно её однородности, характеризуются вполне транзитивные сепарабельные группы без кручения и рассматриваются вопросы, связанные с вполне транзитивностью прямого произведения обобщённо сепарабельных, сепарабельных и однородно разложимых групп без кручения.

Лемма 2.1. *Система $\{A_i\}_{i\in I}$ однородных групп без кручения удовлетворяет условию монотонности тогда и только тогда, когда для любых групп $A_\alpha, A_\beta \in \{A_i\}_{i\in I}$, таких что $t(A_\alpha) \neq t(A_\beta)$, справедливо $\pi(A_\alpha) \cap \pi(A_\beta) = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть система $\{A_i\}_{i\in I}$ однородных групп без кручения удовлетворяет условию монотонности и существуют группы $A_\alpha, A_\beta \in \{A_i\}_{i\in I}$, такие что $t(A_\alpha) \neq t(A_\beta)$ и $\pi(A_\alpha) \cap \pi(A_\beta) \neq \varnothing$. Пусть для определённости $t(A_\alpha) \ngeqslant t(A_\beta)$ и p — такое простое число, что $p \in \pi(A_\alpha) \cap \pi(A_\beta)$. Тогда из групп A_α и A_β выберем соответственно элементы a_α и a_β, такие что $h_p(a_\beta) \leqslant h_p(a_\alpha)$. Тогда $\chi(a_\alpha) \geqslant \inf\{\chi(pa_\alpha), \chi(a_\beta)\}$ и $\chi(a_\alpha) < \chi(pa_\alpha)$, так как $h_p(a_\alpha)+1 = h_p(pa_\alpha)$ и $\chi(a_\alpha) \ngeqslant \chi(a_\beta)$, потому что $t(A_\alpha) \ngeqslant t(A_\beta)$. Поскольку система $\{A_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию монотонности, существуют элементы $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots, a_{\alpha_n} \in A_\alpha$, такие что $a_\alpha = a_{\alpha_1} + \ldots + a_{\alpha_n}$, причём $\chi(a_{\alpha_k}) \geqslant \chi(a_\beta)$ для любого $k = \overline{1,n}$ или $\chi(a_{\alpha_k}) \geqslant \chi(pa_\alpha)$. Так как $t(A_\alpha) \ngeqslant t(A_\beta)$, то $\chi(a_{\alpha_k}) \ngeqslant \chi(a_\beta)$ для любого $k = \overline{1,n}$. Поэтому $\chi(a_{\alpha_k}) \geqslant \chi(pa_\alpha)$ для каждого $k = \overline{1,n}$. Тогда $\chi(a_\alpha) \geqslant \geqslant \inf\{\chi(a_{\alpha_k})\}_{k=\overline{1,n}} \geqslant \chi(pa_\alpha)$, что невозможно.

Проведём доказательство в обратную сторону. Рассмотрим произвольную группу $A_j \in \{A_i\}_{i\in I}$ и произвольный элемент $0 \neq a_j \in A_j$, такой что $\chi(a_j) \geqslant \geqslant \inf\{\chi(a_{i_1}), \ldots, \chi(a_{i_s})\}$, где $a_{i_k} \in A_{i_k}$, $i_k \in I$, $k = \overline{1,s}$, $i_k \neq i_l$ при $k \neq l$, причём $\chi(a_j) \ngeqslant \chi(a_{i_k})$ для любого $k = \overline{1,s}$. Так как система $\{A_i\}_{i\in I}$ состоит из редуцированных групп, то существует такое простое число p, что $p \in \pi(A_j)$. Так как $h_p(a_j) \geqslant \inf\{h_p(a_{i_k})\}_{k=\overline{1,s}}$, то найдётся элемент $a_{i_\beta} \in \{a_{i_k}\}_{k=\overline{1,s}}$, такой что $h_p(a_j) \geqslant h_p(a_{i_\beta})$. Тогда, как следует из условия, $t(A_j) = t(A_{i_\beta})$. Так как для почти всех простых чисел q выполняется равенство $h_q(a_j) = = h_q(a_{i_\beta})$, пусть $q_1, \ldots, q_n$ — все такие простые числа, отличные от p, для которых $h_{q_\alpha}(a_j) \neq h_{q_\alpha}(a_{i_\beta})$. Тогда для каждого простого числа q_α ($\alpha = \overline{1,n}$) будет существовать элемент $a_i^{(\alpha)} \in \{a_{i_k}\}_{k=\overline{1,s}}$, такой что $h_{q_\alpha}\big(a_i^{(\alpha)}\big) \leqslant h_{q_\alpha}(a_j)$. Из построения системы $\big\{a_{i_\beta}, a_i^{(\alpha)}\big\}_{\alpha=\overline{1,n}}$ следует, что для любого элемента c из этой системы $t(a_j) = t(c)$, причём $\chi(a_j) \geqslant \inf\big\{\chi(a_{i_\beta}), \chi\big(a_i^{(\alpha)}\big)\big\}_{\alpha=\overline{1,n}}$. Так как система $\big\{A_j, A_{i_\beta}, A_i^{(\alpha)}\big\}_{\alpha=\overline{1,n}}$ состоит из групп одного и того же типа, то, как следует из [2, лемма 2.2], она удовлетворяет условию монотонности. Поэтому существуют элементы $a_{j_1}, \ldots, a_{j_r} \in A_j$, такие что $a_j = a_{j_1} + \ldots + a_{j_r}$, причём для каждого a_{j_l} ($l = \overline{1,r}$) найдётся такой элемент $d \in \big\{a_{i_\beta}, a_i^{(\alpha)}\big\}_{\alpha=\overline{1,n}}$, что $\chi(a_{j_l}) \geqslant \chi(d)$. Тогда $\big\{a_{i_\beta}, a_i^{(\alpha)}\big\}_{\alpha=\overline{1,n}} \subseteq \{a_{i_k}\}_{k=\overline{1,s}}$. $\square$

Лемма 2.2. *Если группы G_i $(i \in I)$ являются однородными прямыми слагаемыми без кручения произвольной вполне транзитивной группы G, то система $\{G_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию монотонности.*

Доказательство. Пусть выполняется условие леммы. Тогда согласно лемме 2.1 нам нужно показать, что для любых групп $A, B \in \{G_i\}_{i\in I}$, таких что $t(A) \neq t(B)$, справедливо $\pi(A) \cap \pi(B) = \varnothing$. Пусть для определённости $t(A) \ngeqslant \ngeqslant t(B)$. Если группы A и B лежат в одном разложении G, то утверждение леммы вытекает из теоремы 1.3 и леммы 2.1. Пусть группы A и B лежат в разных разложениях группы G, т. е. $A \oplus A_1 = G = B \oplus B_1$. Рассмотрим произвольную группу $C \in \{A, B\}$ и произвольный элемент $0 \neq c \in C$, такой что $\mathbb{H}(c) \geqslant \geqslant \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a), \mathbb{H}(b)\}$, где $a \in A$, $b \in B$, причём $\mathbb{H}(c) \ngeqslant \mathbb{H}(a)$ и $\mathbb{H}(c) \ngeqslant \mathbb{H}(b)$. Покажем, что $b \in A_1$. Действительно, так как $t(A) \ngeqslant t(B)$ и $b \neq 0$, имеем $b \notin A$. Пусть $b = a' + a_1'$, где $a' \in A$, $a_1' \in A_1$ (рассматриваем разложение $G = A \oplus A_1$), тогда $\mathbb{H}(b) = \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a'), \mathbb{H}(a_1')\} \leqslant \mathbb{H}(a')$. Это противоречит тому, что $t(A) \ngeqslant t(B)$. Следовательно, $b \in A_1$, тогда $\mathbb{H}(a + b) \leqslant \mathbb{H}(c)$. Из вполне транзитивности группы G следует существование такого гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{E}(G)$, что $c = \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Так как $\mathbb{H}\big(\varphi(a)\big) \geqslant \mathbb{H}(a)$ и $\mathbb{H}\big(\varphi(b)\big) \geqslant \mathbb{H}(b)$, то система $\{A, B\}$ удовлетворяет условию монотонности, и по лемме 2.1 получаем, что $\pi(A) \cap \pi(B) = \varnothing$. $\square$

В следующей лемме устанавливается, что монотонность системы сервантных подгрупп ранга 1 группы без кручения G тесно связана со строением группы.

Лемма 2.3. *Редуцированная группа без кручения G является однородной тогда и только тогда, когда система $\{A_i\}_{i\in I}$ всех её сервантных подгрупп ранга 1 удовлетворяет условию монотонности.*

Доказательство. Необходимость вытекает из леммы 2.1. Докажем достаточность. Допустим противное, т. е. пусть G — неоднородная группа. Тогда существуют такие ненулевые элементы $a, b \in G$, что $t(a) \neq t(b)$. Тогда, как следует из леммы 2.1, $\pi(\langle a\rangle_*)\cap\pi(\langle b\rangle_*) = \varnothing$. Следовательно, $t(a+b) = t(a)\cap t(b)$, откуда $t(a+b) < t(a)$, $\pi(\langle a+b\rangle_*)\cap\pi(\langle a\rangle_*) = \pi(\langle a\rangle_*) \neq \varnothing$. Тогда по лемме 2.1 система $\{\langle a+b\rangle_*, \langle a\rangle_*\}$ не удовлетворяет условию монотонности, что противоречит нашему предположению и замечанию перед теоремой 1.3. □

В следующей теореме даётся характеризация вполне транзитивных сепарабельных групп без кручения.

Теорема 2.4. *Для сепарабельной группы без кручения G следующие условия эквивалентны*:

1) *G — однородно разложимая группа, причём для любых однородных прямых слагаемых G_i, G_j из G, таких что $t(G_i) \neq t(G_j)$, выполнено $\pi(G_i) \cap \cap\, \pi(G_j) = \varnothing$*;
2) *для любых неизоморфных прямых слагаемых A и B ранга 1 из G справедливо $\pi(A)\cap\pi(B) = \varnothing$*;
3) *система $\{A_i\}_{i\in I}$ всех прямых слагаемых ранга 1 группы G удовлетворяет условию монотонности*;
4) *группа G вполне транзитивна.*

Доказательство. Из [2, следствие 2.13] вытекает, что из условия 1) следует 4). Используя лемму 2.2, из 4) получаем 3). Эквивалентность условий 2) и 3) устанавливается в лемме 2.1.

Покажем, что из 2) следует 1). Пусть $\tau(G)$ обозначает множество различных типов всех прямых слагаемых ранга 1 в G. Тогда для каждого $\tau \in \tau(G)$ рассмотрим подгруппы $G^{(\tau)}$, сервантно порождённые всеми прямыми слагаемыми ранга 1 типа τ. Покажем, что $G^{(\tau)}$ — однородная группа типа τ, т. е. что произвольный элемент $g \in G^{(\tau)}$ имеет тип τ в $G^{(\tau)}$. Так как в G элемент g является решением некоторого уравнения $nx = a_{j_1} + \ldots + a_{j_k}$, где $a_{j_l} \in A_{j_l}$, $t(A_{j_l}) = \tau$ и $A_{j_l} \in \{A_i\}_{i\in I}$ для любого $l = \overline{1, k}$ (здесь $\{A_i\}_{i\in I}$ — система всех прямых слагаемых ранга 1 группы G), докажем индукцией по k, что

$$t(a_{j_1} + \ldots + a_{j_k}) = t(a_{j_1}) \cap \ldots \cap t(a_{j_k}). \tag{1}$$

Пусть $k = 2$. Тогда группу G можно представить в виде $G = A_{j_1} \oplus H$. Если $a_{j_2} \in H$, то

$$t(a_{j_1} + a_{j_2}) = t(a_{j_1}) \cap t(a_{j_2}).$$

Если $a_{j_2} \in A_{j_1}$, то $a_{j_1} + a_{j_2} \in A_{j_1}$ и

$$t(a_{j_1} + a_{j_2}) = t(a_{j_1}) \cap t(a_{j_2}).$$

Если $a_{j_2} = a'_{j_1} + h$, где $a'_{j_1} \in A_{j_1}$, $h \in H$, то $a_{j_1} + a_{j_2} = a_{j_1} + a'_{j_1} + h$ и

$$t(a_{j_1} + a_{j_2}) = t(a_{j_1} + a'_{j_1} + h) = t(a_{j_1} + a'_{j_1}) \cap t(h) = t(a_{j_1}) \cap t(a'_{j_1}) \cap t(h).$$

Так как $t(a_{j_2}) = t(a'_{j_1}) \cap t(h)$, то $t(a_{j_1}) \cap t(a_{j_2}) = t(a_{j_1} + a_{j_2})$.

Пусть для $k = m - 1$ $(m \geqslant 3)$ равенство (1) выполняется. Покажем его справедливость при $k = m$. Используя индуктивное предположение, получим, что

$$t(a_{j_1} + \ldots + a_{j_k}) = t(a_{j_1} + \ldots + a_{j_{k-1}}) \cap t(a_{j_k}) = t(a_{j_1}) \cap \ldots \cap t(a_{j_{k-1}}) \cap t(a_{j_k}).$$

Заметим также, что для любых $\tau_1, \tau_2 \in \tau(G)$ имеем $t\big(G^{(\tau_1)}\big) \neq t\big(G^{(\tau_2)}\big)$, а так как $t\big(G^{(\tau_1)}\big) = t\big(A^{(\tau_1)}\big)$, $t\big(G^{(\tau_2)}\big) = t\big(A^{(\tau_2)}\big)$ для некоторых $A^{(\tau_1)}, A^{(\tau_2)} \in \{A_i\}_{i \in I}$ и система $\{A_i\}_{i \in I}$ удовлетворяет условию 2), то $\pi\big(G^{(\tau_1)}\big) \cap \pi\big(G^{(\tau_2)}\big) = \varnothing$.

Покажем, что $G = \bigoplus\limits_{\tau \in \tau(G)} G^{(\tau)}$. Пусть $G^{(\alpha)}, G^{(\tau_1)}, \ldots, G^{(\tau_k)} \in \{G^{(\tau)}\}_{\tau \in \tau(G)}$, где $G^{(\tau_i)} \neq G^{(\tau_j)}$ при $i \neq j$ для любых $i, j = \overline{1, k}$ и $G^{(\alpha)} \neq G^{(\tau_i)}$ для любого $i = \overline{1, k}$. Допустим, что существует $0 \neq b \in G^{(\alpha)} \cap \big(G^{(\tau_1)} + \ldots + G^{(\tau_k)}\big)$. Так как G — редуцированная группа, то существует такое простое число p, что $h_p(b) \neq \infty$ в группе $G^{(\alpha)}$, а значит, и в G. С другой стороны, так как $\pi\big(G^{(1)}\big) \cap \pi\big(G^{(2)}\big) = \varnothing$ для любых $G^{(1)}, G^{(2)} \in \big\{G^{(\tau)}\big\}_{\tau \in \tau(G)}$, $G^{(1)} \neq G^{(2)}$, то $t\big(G^{(\tau_1)} + \ldots + G^{(\tau_k)}\big) = t\big(G^{(\tau_1)}\big) \cap \ldots \cap t\big(G^{(\tau_k)}\big)$, и так как $\pi\big(G^{(\alpha)}\big) \cap \pi\big(G^{(i)}\big) = \varnothing$ для любого $i = \overline{1, k}$, то $\pi\big(G^{(\alpha)}\big) \cap \pi\big(G^{(\tau_1)} + \ldots + G^{(\tau_k)}\big) = \varnothing$. Следовательно, $h_p(b) = \infty$ в группе $G^{(\tau_1)} + \ldots + G^{(\tau_k)}$, а значит, и в группе G, что противоречит единственности высоты элемента в группе.

Покажем, что группа G порождается множеством $\{G^{(\tau)}\}_{\tau \in \tau(G)}$. Действительно, если предположить, что существует элемент $g \in G$, такой что $g \notin \bigoplus\limits_{\tau \in \tau(G)} G^{(\tau)}$, то из сепарабельности группы G следует, что элемент g можно вложить во вполне разложимое прямое слагаемое $F = F_1 + \ldots + F_t$ группы G. Так как для каждого $l = \overline{1, t}$ существует $\tau_l \in \tau(G)$, для которого $F_l \subseteq G^{(\tau_l)}$, то $g \in \bigoplus\limits_{l=1}^{t} G^{(\tau_l)}$, что противоречит нашему предположению. $\square$

Определение 2.1. Назовём систему групп без кручения $\{G_i\}_{i \in I}$ эндотранзитивной, если из того, что $a \in G_i$, $b \in G_j$ и $\chi(a) = \chi(b)$, следует существование $\varphi \in \mathrm{Hom}(G_i, G_j)$ со свойством $\varphi(a) = b$.

Если система $\{G_i\}_{i \in I}$ состоит из одной группы, то приходим к понятию эндотранзитивности группы, введённому в [8].

Следующее простое утверждение показывает, что для системы, состоящей из однородных групп одного и того же типа, понятия вполне транзитивности и эндотранзитивности совпадают.

Лемма 2.5. *Произвольная система однородных групп $\{G_i\}_{i \in I}$ одного и того же типа вполне транзитивна тогда и только тогда, когда она эндотранзитивна.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Рассмотрим произвольные группы $G_j, G_t \in \{G_i\}_{i \in I}$ и произвольные элементы $a \in G_j$, $b \in G_t$, такие что $\chi(a) \leqslant \chi(b)$. Если $\chi(a) = \chi(b)$, то существует такой гомоморфизм $\psi \in \mathrm{Hom}(G_j, G_t)$, что $\psi(a) = b$. Пусть теперь $\chi(a) < \chi(b)$. Так как характеристики $\chi(a)$ и $\chi(b)$ эквивалентны, то существует такое натуральное число n, что $\chi(na) = \chi(b)$. Значит, найдётся такой гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}(G_j, G_t)$, что $\varphi(na) = b$. Следовательно, гомоморфизм $\psi = n\varphi$ переведёт a в элемент b. □

Напомним, что группа без кручения G называется обобщённо сепарабельной [2], если каждое конечное подмножество элементов из G содержится в некотором однородно разложимом прямом слагаемом группы G.

Теорема 2.6. *Группа $A = \prod\limits_{i \in I} A_i$, где A_i $(i \in I)$ — обобщённо сепарабельные группы, вполне транзитивна тогда и только тогда, когда для любых однородных прямых слагаемых B и C из A выполняются следующие условия:*

1) *система $\{B, C\}$ эндотранзитивна;*
2) *если $t(B) \neq t(C)$, то $\pi(B) \cap \pi(C) = \varnothing$.*

Доказательство. Необходимость. Условие 2) вытекает из лемм 2.1 и 2.2. Покажем справедливость условия 1). Из теоремы 1.3 и леммы 2.5 следует, что система групп $\{B, C\}$, удовлетворяющая условию теоремы, эндотранзитивна, если эти группы лежат в одном разложении группы A, а также если $t(B) \neq t(C)$, поскольку в этом случае $\mathrm{Hom}(B, C) = \mathrm{Hom}(C, B) = 0$. Пусть $t(B) = t(C)$ и группы B, C лежат в разных разложениях группы A. Рассмотрим произвольные элементы $b \in B$, $c \in C$, такие что $\chi(b) = \chi(c)$. Тогда $\chi\big(\rho_1(b)\big) = \chi\big(\rho_2(c)\big)$, где $\rho_1 \colon B \to A$, $\rho_2 \colon C \to A$ — вложения. Из вполне транзитивности группы A следует существование такого гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{E}(A)$, что $\varphi\big(\rho_1(b)\big) = \rho_2(c)$. Тогда существует такой гомоморфизм $\psi \in \mathrm{Hom}(B, C)$, что $\psi(b) = c$, где $\psi = \pi\varphi\rho_1$ и $\pi \colon A \to C$ — проекция.

Достаточность. Пусть $a, b \in A$, причём $\chi(a) \leqslant \chi(b)$ и $a = (\ldots, a_i, \ldots)$, $b = (\ldots, b_i, \ldots)$, где $a_i, b_i \in A_i$ для всякого $i \in I$. Так как A_i — обобщённо сепарабельная группа, то b_i вкладывается в однородно разложимое прямое слагаемое. Пусть H_i — одно из минимальных (относительно включения) таких слагаемых. Имеем $b_i = b_{i_1} + \ldots + b_{i_m}$, где $H_i = H_{i_1} + \ldots + H_{i_m}$ — разложение H_i в прямую сумму однородных групп (m зависит от индекса i и от выбора H_i). Такое разложение элемента b_i будем называть однородным. Поскольку для любого слагаемого b_{i_n} $(n = \overline{1, m})$ $\chi(b_{i_n}) \geqslant \chi(a)$, достаточно показать, что существует такой гомоморфизм $\psi_{i_n} \in \mathrm{Hom}(A, H_{i_n})$, что $\psi_{i_n}(a) = b_{i_n}$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{m} \psi_{i_n}(a) = b_i$, где $\sum\limits_{n=1}^{m} \psi_{i_n} \in \mathrm{Hom}(A, A_i)$, и, как следует из [19, теорема 8.2], будет существовать такой гомоморфизм $\psi \in \mathrm{E}(A)$, что $\psi(a) = b$.

Так как условие 2) данной теоремы выполняется и $\chi(b_{i_n}) \geqslant \chi(a)$, то найдётся система элементов $\{a_{i_l}\}_{l=\overline{1,d}}$, такая что $a_i = a_{i_1} + \ldots + a_{i_d}$ и $t(a_{i_l}) = t(b_{i_n})$ для любого $l = \overline{1,d}$, причём $\chi(b_{i_n}) \geqslant \inf\{\chi(a_{i_l})\}_{l=\overline{1,d}}$. Если существует $l = \overline{1,d}$, для которого $\chi(a_{i_l}) \leqslant \chi(b_{i_n})$, то из вполне транзитивности однородной системы $\{H_{i_l}, H_{i_n}\}$, которая следует из условия 1) и леммы 2.5, вытекает существование такого гомоморфизма $\varphi_{i_l} \in \mathrm{Hom}(H_{i_l}, H_{i_n})$, что $\varphi_{i_l}(a_{i_l}) = b_{i_n}$. Тогда существует гомоморфизм $\psi_{i_n} \in \mathrm{Hom}(A, H_{i_n})$, отображающий элемент a в элемент b_{i_n}, где $\psi_{i_n} = \varphi_{i_l}\pi_{i_l}\pi$ и $\pi\colon A \to A_i$, $\pi_{i_l}\colon A_i \to H_{i_l}$ — проекции. Если такого элемента a_{i_l} $(l = \overline{1,d})$ не найдётся, то, как вытекает из леммы 2.1 и из условия 2) данной теоремы, система $\{H_{i_l}, H_{i_n}\}_{l=\overline{1,d}}$, состоящая из однородных групп одного и того же типа, удовлетворяет условию монотонности. Тогда существуют такие элементы $b_{i_n}^{(1)}, \ldots, b_{i_n}^{(\gamma)} \in H_{i_n}$, что $b_{i_n} = b_{i_n}^{(1)}, \ldots, b_{i_n}^{(\gamma)}$, причём для каждого $b_{i_n}^{(t)}$ $(t = \overline{1,\gamma})$ найдётся элемент $a_{i_l}^{(t)} \in \{a_{i_l}\}_{l=\overline{1,d}}$, для которого $\chi\bigl(b_{i_n}^{(t)}\bigr) \geqslant \chi\bigl(a_{i_l}^{(t)}\bigr)$. Так как для каждого $t = \overline{1,\gamma}$ система $\bigl\{H_{i_l}^{(t)}, H_{i_n}\bigr\}$ вполне транзитивна, то существуют гомоморфизмы $\varphi_{i_t} \in \mathrm{Hom}\bigl(H_{i_l}^{(t)}, H_{i_n}\bigr)$ $(t = \overline{1,\gamma})$, переводящие элементы $a_{i_l}^{(t)}$ в элементы $b_{i_n}^{(t)}$ соответственно (здесь $H_{i_l}^{(t)} \in \{H_{i_l}\}_{l=\overline{1,d}}$ для каждого $t = \overline{1,\gamma}$), тогда $\sum\limits_{t=1}^{\gamma} \varphi_{i_t}\bigl(a_{i_l}^{(t)}\bigr) = b_{i_n}$. Следовательно, существует такой гомоморфизм $\psi_{i_t} = \sum\limits_{t=1}^{\gamma} \varphi_{i_t}\pi_{i_t}\pi_i$, что $\psi_{i_t}a = b_{i_n}$, где $\pi_{i_t}\colon A_i \to H_{i_t}$, $\pi_i\colon A \to A_i$ — проекции. □

Следствие 2.7. *Группа $A = \prod\limits_{i\in I} A_i$, где A_i $(i \in I)$ — сепарабельные группы, вполне транзитивна тогда и только тогда, когда для любых неизоморфных прямых слагаемых B и C ранга 1 группы A справедливо $\pi(B) \cap \pi(C) = \varnothing$.*

Следствие 2.8 ([8]). *Векторная группа A вполне транзитивна тогда и только тогда, когда для любых неизоморфных прямых слагаемых B и C ранга 1 группы A справедливо $\pi(B) \cap \pi(C) = \varnothing$.*

Следствие 2.9 ([2]). *Вполне разложимая группа A вполне транзитивна тогда и только тогда, когда для любых неизоморфных прямых слагаемых B и C ранга 1 группы A следует, что $\pi(B) \cap \pi(C) = \varnothing$.*

3. Вполне транзитивность прямых произведений и прямых сумм s-обобщённо узких групп

В этом разделе доказывается критерий вполне транзитивности прямых произведений s-обобщённо узких групп (теорема 3.1). С его помощью получается ряд эквивалентных условий вполне транзитивности прямых произведений обобщённо узких групп, сепарабельных групп, счётных групп, узких групп без кручения, периодических групп (следствия 3.2—3.4). Показывается также, что произвольная алгебраически компактная группа вполне транзитивна.

Как было отмечено в разделе 1, условия вполне транзитивности, монотонности и конечности произвольной системы групп $\{G_i\}_{i\in I}$ являются только достаточными для вполне транзитивности группы $\prod\limits_{i\in I} G_i$. В данном разделе будет введён такой класс групп, что эти условия, наложенные на произвольную систему групп из этого класса, будут также необходимыми для вполне транзитивности их прямого произведения.

Напомним понятие, введённое С. В. Рычковым в [18].

Определение 3.1 ([18]). Абелева группа A называется обобщённо узкой, если она не содержит неограниченных копериодических подгрупп и подгрупп, изоморфных группе $\prod\limits_{\aleph_0}\mathbb{Z}$.

Примерами обобщённо узких групп являются узкие группы, счётные редуцированные группы, редуцированные периодические группы [18].

Определение 3.2. Группу G будем называть $\mathbf{s}$-обобщённо узкой, если каждый элемент $g\in G$, такой что $o(g)=\infty$, можно вложить в обобщённо узкое прямое слагаемое группы G.

Класс $\mathbf{s}$-обобщённо узких групп шире класса обобщённо узких групп, в частности, он содержит все сепарабельные редуцированные абелевы группы, в том числе и $\prod\limits_{\aleph_0}\mathbb{Z}$. Действительно, пусть A — сепарабельная редуцированная группа. Покажем, что она $\mathbf{s}$-обобщённо узкая. Пусть $a\in A$, $o(g)=\infty$. Тогда из сепарабельности группы A следует, что элемент a можно вложить во вполне разложимое прямое слагаемое B группы A, где $B=\bigoplus\limits_{i=1}^{n} B_i$, B_i $(i=\overline{1,n})$ — группы ранга 1. Так как каждая B_i — обобщённо узкая группа, то, как вытекает из [18, предложение 3], B — обобщённо узкая группа.

Перейдём к рассмотрению одного из основных результатов этого раздела.

Теорема 3.1. *Группа $G=\prod\limits_{i\in I} G_i$, где G_i $(i\in I)$ — $\mathbf{s}$-обобщённо узкие группы, вполне транзитивна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

1) $\{G_i\}_{i\in I}$ — *вполне транзитивная система групп*;
2) *система групп $\{G_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию монотонности*;
3) *система групп $\{G_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию конечности.*

Доказательство. Достаточность вытекает из предложения 1.5. Докажем необходимость. Выполнение условий 1), 2) следует из предложения 1.4. Покажем справедливость условия 3). Рассмотрим произвольную группу $G_j\in\{G_i\}_{i\in I}$ и произвольный элемент $g_j\in G_j$, такой что $o(g_j)=\infty$, $\mathbb{H}(g_j)\geqslant \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_\tau)\}_{\tau\in J}$, $J\subseteq I$ и $|J|=\aleph_0$. Тогда

$$G=\prod_{\tau\in J} G_\tau\oplus\prod_{i\in I\setminus J} G_i.$$

Пусть
$$G^{(1)} = \prod_{\tau\in J} G_\tau, \quad G^{(2)} = \prod_{i\in I\setminus J} G_i.$$
Так как G — вполне транзитивная группа, то система $\{G^{(1)}, G^{(2)}\}$ вполне транзитивна. Возможны два случая: $j \in I\setminus J$ и $j \in J$.

Пусть $j \in I\setminus J$ и $g^{(1)} = (\ldots, g_\tau, \ldots) \in G^{(1)}$, $g^{(2)} = (0,\ldots,0,g_j,0,\ldots) \in \in G^{(2)}$. Так как $\mathbb{H}(g^{(2)}) \geqslant \mathbb{H}(g^{(1)})$, то существует такой гомоморфизм $\varphi \in \in \operatorname{Hom}(G^{(1)}, G^{(2)})$, что $\varphi(g^{(1)}) = g^{(2)}$. Тогда найдётся гомоморфизм $\psi \in \in \operatorname{Hom}(G^{(1)}, B_j)$, такой что $\psi(g^{(1)}) = g_j$, где B_j — обобщённо узкое прямое слагаемое группы G_j, $\psi = \pi\pi_j\varphi$; $\pi_j\colon G^{(2)} \to G_j$, $\pi\colon G_j \to B_j$ — проекции. Так как B_j — обобщённо узкая группа, то существует, как следует из [18, предложение 1], такое натуральное число k, что $\psi\Big(\prod\limits_{\tau=k}^{\infty} G_\tau\Big)$ — ограниченная группа. Представим группу $G^{(1)}$ в виде
$$G^{(1)} = G_1 \oplus \ldots \oplus G_{k-1} \oplus \prod_{\tau=k}^{\infty} G_\tau,$$
тогда элемент $g^{(1)}$ запишется следующим образом: $g^{(1)} = g_1 + \ldots + g_{k-1} + \bar g$, где $g_t \in G_t$ $(t = \overline{1, k-1})$, $G_t \in \{G_\tau\}_{\tau=\overline{1,\infty}}$ и $\bar g \in \prod\limits_{\tau=k}^{\infty} G_\tau$. Тогда
$$g_j = \psi(g^{(1)}) = \psi(g_1 + \ldots + g_{k-1}) + \psi(\bar g) = g_{j_1} + g_{j_2},$$
где $g_{j_1} = \psi(g_1 + \ldots + g_{k-1})$ и $g_{j_2} = \psi(\bar g)$. Так как $g_{j_2} \in \psi\Big(\prod\limits_{\tau=k}^{\infty} G_\tau\Big)$, то $o(g_{j_2}) < \infty$. Из того, что $\mathbb{H}(g_{j_2}) \geqslant \mathbb{H}(\bar g)$ и $o(g_{j_2}) < \infty$, следует существование конечной системы координат $\{g_{\tau_l}\}_{\tau_l=\overline{k,\infty},\ l=\overline{1,m}}$ элемента $\bar g$, такой что
$$\inf_{\mathfrak{M}} \{\mathbb{H}(g_{\tau_l})\}_{\tau_l=\overline{k,\infty},\ l=\overline{1,m}} \leqslant \mathbb{H}(g_{j_2}).$$
Тогда
$$\begin{aligned}\mathbb{H}(g_j) &\geqslant \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_{j_1}), \mathbb{H}(g_{j_2})\} \geqslant \\ &\geqslant \inf\Big\{\inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_t)\}_{t=\overline{1,k-1}},\ \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_{\tau_l})\}_{\tau_l=\overline{k,\infty},\ l=\overline{1,m}}\Big\} = \\ &= \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_{j_1}), \ldots, \mathbb{H}(g_{k-1}), \mathbb{H}(g_{\tau_1}), \ldots, \mathbb{H}(g_{\tau_m})\}.\end{aligned}$$

Случай, когда $j \in J$ доказывается аналогично. □

Непосредственно из этой теоремы получим несколько следствий.

Следствие 3.2. *Группа $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$, где G_i $(i \in I)$ — обобщённо узкие группы, вполне транзитивна тогда и только тогда, когда для системы $\{G_i\}_{i\in I}$ выполняются условия* 1)—3) *предыдущей теоремы.*

Следствие 3.3. *Если каждая группа G_i $(i \in I)$ удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий*:

1) G_i — *сепарабельная группа,*
2) G_i — *счётная группа,*
3) G_i — *узкая группа,*
4) G_i — *периодическая группа,*

то группа $G = \prod_{i\in I} G_i$ *вполне транзитивна тогда и только тогда, когда выполняются условия* 1)—3) *теоремы* 3.1.

Следствие 3.4. *Группа* $G = \prod_{i\in I} G_i$, *где* G_i $(i \in I)$ — *периодические группы, вполне транзитивна тогда и только тогда, когда выполняются условия* 1), 2) *теоремы* 3.1.

Далее мы покажем, что критерий вполне транзитивности прямого произведения периодических групп можно упростить. Докажем предварительно следующую рабочую лемму.

Лемма 3.5. *Система периодических групп* $\{G_i\}_{i\in I}$ *удовлетворяет условию монотонности для высотных матриц тогда и только тогда, когда для каждого простого числа* p *система* $\{G_{ip}\}_{i\in I}$ (где G_{ip} — p-*примарные компоненты группы* G_i) *удовлетворяет условию монотонности.*

Доказательство. Необходимость непосредственно следует из определения монотонности системы. Докажем достаточность. Рассмотрим произвольную группу $G_j \in \{G_i\}_{i\in I}$ и произвольный элемент $g_j \in G_j$, такой что $\mathbb{H}(g_j) \geqslant \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_{i_k})\}_{i_k\in I,\ k=\overline{1,n}}$, причём $g_{i_l} \neq g_{i_t}$, если $i_l \neq i_t$. Пусть $\mathbb{H}(g_j) \ngeqslant \mathbb{H}(g_{i_k})$ для любого $k = \overline{1,n}$. Представим элементы g_j и $\{g_{i_k}\}_{k=\overline{1,n}}$ в виде суммы элементов, порядки которых есть степени различных простых чисел:

$$g_j = g_{j_1} + \ldots + g_{j_r}, \quad g_{i_k} = g_{i_k}^{(1)} + \ldots + g_{i_k}^{(m)} \quad (k = \overline{1,n}).$$

Тогда

$$\mathbb{H}(g_{j_\alpha}) \geqslant \mathbb{H}(g_j) \geqslant \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_{i_k})\}_{i_k\in I,\ k=\overline{1,n}} = \inf_{\mathfrak{M}}\bigl\{\mathbb{H}\bigl(g_{i_k}^{(\beta)}\bigr)\bigr\}_{i_k\in I,\ k=\overline{1,n},\ \beta=\overline{1,m}}$$

для любого $\alpha = \overline{1,r}$. Рассмотрим элементы g_{j_α} $(\alpha = \overline{1,r})$, такие что $\mathbb{H}(g_{j_\alpha}) \ngeqslant \mathbb{H}\bigl(g_{i_k}^{(\beta)}\bigr)$ для любых $\beta = \overline{1,m}$ и $k = \overline{1,n}$ (если таких элементов нет, то условие монотонности тривиально выполняется). Тогда для каждого такого элемента g_{j_α} найдутся элементы $\bigl\{a_\tau^{(\alpha)}\bigr\}_{\tau=\overline{1,t}} \subseteq \bigl\{g_{i_k}^{(\beta)}\bigr\}_{i_k\in I,\ k=\overline{1,n},\ \beta=\overline{1,m}}$, порядки которых являются степенями того же простого числа, что и порядок элемента g_{j_α}, причём $\mathbb{H}(g_{j_\alpha}) \geqslant \inf_{\mathfrak{M}}\bigl\{\mathbb{H}\bigl(a_\tau^{(\alpha)}\bigr)\bigr\}_{\tau=\overline{1,t}}$. Так как для каждого простого числа p система $\{G_{ip}\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию монотонности, то существуют элементы $b_{j_1}^{(\alpha)}, \ldots, b_{j_\gamma}^{(\alpha)}$, такие что $b_{j_1}^{(\alpha)} + \ldots + b_{j_\gamma}^{(\alpha)} = g_{j_\alpha}$, причём для каждого элемента $b_{j_\delta}^{(\alpha)}$ $(\delta = \overline{1,\gamma})$ найдётся элемент $a_\tau^{(\alpha)}$ $(\tau = \overline{1,t})$, такой что $\mathbb{H}\bigl(b_{j_\delta}^{(\alpha)}\bigr) \geqslant \mathbb{H}\bigl(a_\tau^{(\alpha)}\bigr)$. Тогда $\mathbb{H}\bigl(b_{j_\delta}^{(\alpha)}\bigr) \geqslant \mathbb{H}(g_{i_k})$ для некоторого $k = \overline{1,n}$, поскольку $a_\tau^{(\alpha)})$ является одним слагаемых в разложении элемента g_{i_k}. Далее, заменяя элементы g_{j_α} их разложением

$b_{j_1}^{(\alpha)} + \ldots + b_{j_\gamma}^{(\alpha)}$, получим новое разложение элемента g_j, причём для каждого элемента c_{j_σ} из этого разложения найдётся элемент g_{i_k} ($k = \overline{1,n}$), такой что $\mathbb{H}(c_{j_\sigma}) \geqslant \mathbb{H}(g_{i_k})$. □

Интерес представляет следующее предложение.

Предложение 3.6. *Любая система вполне транзитивных периодических групп удовлетворяет условию монотонности.*

Доказательство. Утверждение следует из леммы 3.5, [33, предложение 1] и теоремы 1.3. □

Из предложения 3.6, следствия 3.4 и теоремы 1.3 вытекает следствие 3.7.

Следствие 3.7. *Следующие условия для периодических групп G_i ($i \in I$) эквивалентны*:

1) $\prod\limits_{i\in I} G_i$ — *вполне транзитивная группа*;
2) $\bigoplus\limits_{i\in I} G_i$ — *вполне транзитивная группа*;
3) $\{G_i\}_{i\in I}$ — *вполне транзитивная система групп.*

Следующий результат показывает, что если в периодической группе G выделено сепарабельное прямое слагаемое A, то вопрос о вполне транзитивности всей группы сводится к вопросу о вполне транзитивности дополнительного прямого слагаемого к A.

Предложение 3.8. *Периодическая группа $G = A \oplus B$, где A — сепарабельная группа, вполне транзитивна тогда и только тогда, когда группа B вполне транзитивна.*

Доказательство. Применив теорему 1.3, получим необходимость. Согласно следствию 3.7 для доказательства достаточности осталось показать, что система $\{A, B\}$ вполне транзитивна, или что для любого простого числа p система $\{A_p, B_p\}$ (где A_p, B_p — p-компоненты групп A и B соответственно) вполне транзитивна. Группы A_p, B_p вполне транзитивны, как прямые слагаемые вполне транзитивных групп. Поэтому покажем, что для любых элементов $a \in A_p$ и $b \in B_p$, таких что $H_p(a) \leqslant H_p(b)$ ($H_p(b) \leqslant H_p(a)$), существует такой гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$ ($\psi \in \mathrm{Hom}(B, A)$), что $\varphi(a) = b$ ($\psi(b) = a$).

Пусть подгруппа $\langle b \rangle$ не содержит элементов бесконечной p-высоты в B_p. Тогда элемент b можно вложить в конечное прямое слагаемое B'_p группы B_p [19, следствие 27.9]. Так как B'_p — сепарабельная группа, то $A_p \oplus B'_p$ также сепарабельна, а значит, вполне транзитивна. Тогда, как вытекает из следствия 3.7, существует гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}(A_p, B'_p)$, отображающий элемент a в b, если $H_p(a) \leqslant H_p(b)$. С другой стороны, будет существовать гомоморфизм $\psi' \in \mathrm{Hom}(B'_p, A_p)$, такой что $\psi'(b) = a$, если $H_p(b) \leqslant H_p(a)$, но тогда будет существовать и $\psi \in \mathrm{Hom}(B_p, A_p)$, такой что $\psi(b) = a$, где $\psi = \psi'\pi$ и $\pi\colon B_p \to B'_p$ — проекция.

Пусть подгруппа $\langle b \rangle$ содержит элементы бесконечной высоты, тогда $H_p(a) < H_p(b)$ — единственное возможное сравнение (высоты элементов берутся соответственно в A_p и B_p). Пусть δ_n — наименьшее бесконечное порядковое число в $H_p(b) = (\delta_0, \ldots, \delta_k, \infty, \ldots)$. Пусть $o(a) = p^t$ и $h_p(p^{t-1}a) = s$. Если $n = 0$, то из неограниченности группы B_p будет следовать существование в ней циклических прямых слагаемых сколь угодно большого порядка. Пусть F_p — такое слагаемое порядка не меньше чем p^{t+s}, т. е. пусть $|F_p| = p^{t+s+r}$, где $r \geqslant 0$, и f — образующий группы F_p. Тогда $H_p(a) \leqslant H_p(p^{s+r}f)$ и, как следует из предыдущего случая, существует гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}(A_p, B_p)$, отображающий элемент a в $p^{s+r}f$. Так как B_p — вполне транзитивная группа и $o(p^{s+r}f) \geqslant o(b)$, найдётся $\psi \in \mathrm{E}(B_p)$, такой что $\psi(p^{s+r}f) = b$. Тогда $\psi\varphi \in \mathrm{Hom}(A_p, B_p)$ отобразит элемент a в элемент b. Пусть $n \neq 0$, тогда для всех порядковых чисел δ_i $(0 \leqslant i < n)$, после которых есть скачки, δ_i-е инварианты Ульма—Капланского будут отличны от нуля [20, лемма 65.3]. Следовательно, возрастающая последовательность $(\delta_0, \ldots, \delta_{n-1}, \infty, \ldots)$ будет индикатором некоторого элемента $b'_p \in B_p$. Так как группа $\langle b'_p \rangle$ не содержит элементы бесконечной высоты, то элемент b'_p можно вложить в конечное прямое слагаемое B'_p группы B_p. Пусть $B_p = B'_p \oplus B''_p$. Так как B''_p — неограниченная группа, то она содержит циклические прямые слагаемые сколь угодно больших порядков. Значит, в B''_p существует циклическое прямое слагаемое C_p порядка не меньше чем p^{t+s}, т. е. $|C_p| = p^{t+s+r}$ $(r \geqslant 0)$, и $c \in C_p$ — её образующий. Тогда $H_p(a) < H_p(b' + p^{s+r}c) < H_p(b)$. Так как $A_p \oplus B'_p \oplus C_p$ является сепарабельным прямым слагаемым группы G, то, как вытекает из следствия 3.7, существует такой гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}(A_p, B'_p \oplus C_p)$, что $\varphi(a) = b' + p^{s+r}c$. В то же время из вполне транзитивности группы B_p следует существование такого гомоморфизма $\psi \in \mathrm{E}(B_p)$, что $(\psi\varphi)(a) = b$, где $\psi\varphi \in \mathrm{Hom}(A_p, B_p)$. $\square$

Некоторые примеры вполне транзитивных (не обязательно периодических) групп даёт следствие 3.9, в котором под сепарабельной (тотально проективной) периодической группой понимаем периодическую группу, у которой каждая p-компонента — сепарабельная (тотально проективная) группа.

Следствие 3.9. *Если каждая из редуцированных периодических групп G_i $(i \in I)$ удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий*:

1) *G_i — сепарабельная группа,*

2) *G_i — тотально проективная группа,*

то $\prod\limits_{i \in I} G_i$ и $\bigoplus\limits_{i \in I} G_i$ — вполне транзитивные группы.

Доказательство. Согласно лемме 3.5 можно считать, что каждая группа G_i $(i \in I)$ — p-группа. Покажем, что $\bigoplus\limits_{i \in I} G_i$ — вполне транзитивная группа. Пусть

$$I_1 = \{i \in I \mid G_i \text{ — сепарабельная группа}\},$$

тогда

$$\bigoplus_{i \in I} G_i = \bigoplus_{i \in I_1} G_i \oplus \bigoplus_{i \in I \setminus I_1} G_i.$$

Заметим, что $\bigoplus\limits_{i\in I_1} G_i$ — сепарабельная группа ($\bigoplus\limits_{i\in I\setminus I_1} G_i$ — тотально проективная группа), как прямая сумма сепарабельных (тотально проективных групп) [20, теорема 83.5]. Поскольку каждая тотально проективная p-группа вполне транзитивна [37], то $\bigoplus\limits_{i\in I\setminus I_1} G_i$ — вполне транзитивная группа. Воспользовавшись предложением 3.8, получим, что группа $\bigoplus\limits_{i\in I} G_i$ вполне транзитивна. Следствие 3.7 даёт возможность утверждать, что и $\prod\limits_{i\in I} G_i$ — вполне транзитивная группа. □

Следствие 3.10. *Алгебраически компактная группа вполне транзитивна.*

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 1.3, следствия 3.9 и [19, следствие 38.2]. □

4. Вполне транзитивность прямых произведений абелевых групп, системы множителей которых удовлетворяют условию конечности

В данном разделе мы получаем более простые критерии вполне транзитивности расщепляемых смешанных групп и вполне транзитивности прямого произведения сепарабельных групп и рассматриваем вопросы влияния вполне транзитивности на расщепляемость прямого произведения $\mathbf{s}$-обобщённо узких групп и на сепарабельность прямого произведения групп.

Докажем следующее простое утверждение.

Лемма 4.1. *Если в группе G существует элемент a порядка p^n, $n \in \mathbb{N}$, и обобщённой p-высоты, большей или равной m (где m — неотрицательное целое число), то в ней есть циклическое прямое слагаемое порядка не меньше чем p^{n+m}.*

Доказательство. Пусть в группе G существует элемент a, удовлетворяющий условию леммы. Пусть $T_p(G)$ — p-компонента периодической части группы G. Если $T_p(G)$ является неограниченной группой, то из [19, с. 142] следует, что она содержит циклическое прямое слагаемое сколь угодно большого порядка, которое, будучи ограниченной сервантной подгруппой группы G, выделяется в ней прямым слагаемым. Если $T_p(G)$ — ограниченная группа, то пусть $h_p^*(a) = k \geqslant m$. Тогда, как следует из [14], элемент $p^{n-1}a$ можно вложить в циклическое прямое слагаемое B порядка $p^{n+k} \geqslant p^{n+m}$. □

Лемма 4.2. *Пусть A — группа без кручения и $\prod\limits_{i\in I} G_i$ — вполне транзитивная группа, где G_i $(i \in I)$ — периодические группы. Тогда для любых элементов $a \in A$ и $g \in G$, таких что $\mathbb{H}(a) \leqslant \mathbb{H}(g)$, существует гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, G)$, переводящий a в g.*

Доказательство. Пусть $a \in A$ и $g \in G$ удовлетворяют условию леммы и $g = (\ldots, g_i, \ldots)$, где $g_i \in G_i$. Так как $\mathbb{H}(a) < \mathbb{H}(g_i)$ для любого $i \in I$, то нам достаточно показать, что для произвольной координаты g_i ($i \in I$) существует такой гомоморфизм $\varphi_i \in \mathrm{Hom}(A, G_i)$, что $\varphi_i(a) = g_i$. Тогда, как следует из [19, теорема 8.2], будет существовать такой гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, G)$, что $\varphi(a) = g$.

Рассмотрим произвольную координату $g_i \in G_i$ и обозначим её через b, а группу G_i через B. Зафиксируем множество простых чисел $p_1, \ldots, p_k$, для которых $h^*_{p_i}(b) \neq \infty$, и пусть $h_{p_i}(a) = n_i$ ($i = \overline{1,k}$). Так как элемент b можно представить в виде $b = b_1 + \ldots + b_k$, где B_i ($i = \overline{1,k}$) — p_i-компоненты группы B и $b_i \in B_i$, то для любого элемента b_i, у которого $o(b_i) = p_i^{m_i}$ и $h^*_{p_i}(b_i) \geqslant n_i$, найдётся циклическое такое прямое слагаемое C_i, что $|C_i| \geqslant p_i^{m_i+n_i}$ (лемма 4.1). Пусть c_i — один из образующих группы C_i ($i = \overline{1,k}$). Тогда $\mathbb{H}(a) < \mathbb{H}(p_i^{n_i} c_i) \leqslant \mathbb{H}(b_i)$, а значит, $\mathbb{H}(a) < \mathbb{H}(p_1^{n_1} c_1 + \ldots + p_k^{n_k} c_k) \leqslant \mathbb{H}(b)$. Так как в группе $\langle a \rangle_*$ разрешимы уравнения $p_i^{n_i} x = a$ ($i = \overline{1,k}$), то пусть x_i ($i = \overline{1,k}$) — решения этих уравнений, следовательно, $h_{p_i}(x_i) = 0$.

Построим гомоморфизмы $\psi_i \colon \langle a \rangle_* \to C_i$ ($i = \overline{1,k}$), такие что $\psi_i(x_i) = c_i$. Так как $\langle a \rangle_*$ — группа ранга 1, то для произвольного $d \in \langle a \rangle_*$ существуют такие целые числа m и n, что $m x_i = n d$ и $(m, n) = 1$. Учитывая, что x_i в группе $\langle a \rangle_*$ имеет нулевую высоту по простому числу p_i, получим $(n, p_i) = 1$. Полагаем теперь $\psi_i(d) = \frac{m}{n} c_i$. Легко проверить, что отображение ψ_i ($i = \overline{1,k}$) является гомоморфизмом. Заметим также, что гомоморфизм $\psi = \psi_1 + \ldots + \psi_k$ отобразит элемент a в элемент $p_1^{n_1} c_1 + \ldots + p_k^{n_k} c_k$. Так как $C = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} C_i$ — алгебраически компактная и, следовательно, сервантно инъективная группа, то найдётся гомоморфизм $\alpha \in \mathrm{Hom}(A, C)$, такой что $\alpha i = \psi$, где $i \colon \langle a \rangle_* \to A$ — вложение, причём $\alpha(a) = p_1^{n_1} c_1 + \ldots + p_k^{n_k} c_k$. Так как $\mathbb{H}(p_1^{n_1} c_1 + \ldots + p_k^{n_k} c_k) \leqslant \mathbb{H}(b)$ и B — вполне транзитивная группа, то найдётся гомоморфизм $\eta \in \mathrm{E}(B)$, такой что $\eta(p_1^{n_1} c_1 + \ldots + p_k^{n_k} c_k) = b$. Тогда гомоморфизм $\eta\alpha \in \mathrm{Hom}(A, B)$ будет переводить элемент a в элемент b. $\square$

Предложение 4.3. *Пусть система $\{G_i\}_{i \in I}$ удовлетворяет условию конечности для высотных матриц. Если для простого числа p существует элемент $g_j \in G_j$ ($j \in I$), такой что $o(g_j) = \infty$ и $h^*_p(p^k g_j) \neq \infty$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то*

$$T_p\Bigl(\prod_{i \in I} G_i\Bigr) = \prod_{i \in I} T_p(G_i).$$

Доказательство. Легко показывается, что

$$T_p\Bigl(\prod_{i \in I} G_i\Bigr) = T_p\Bigl(\prod_{i \in I} T_p(G_i)\Bigr) \tag{2}$$

для любого простого числа p. Пусть выполняется условие предложения, т. е. существует элемент $g_j \in G_j$ ($j \in I$), такой что $o(g_j) = \infty$ и $h^*_p(p^k g_j) \neq \infty$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и некоторого простого числа p. Из равенства (2) следует, что

$$T_p\Bigl(\prod_{i\in I} G_i\Bigr) \subseteq \prod_{i\in I} T_p(G_i).$$

Осталось показать, что $\prod\limits_{i\in I} T_p(G_i)$ — периодическая группа. Допустим противное, т. е. пусть существует элемент $a \in \prod\limits_{i\in I} T_p(G_i)$, имеющий бесконечный порядок. Тогда найдутся такие координаты a_α элемента a, что

$$\mathbb{H}(a) = \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_\alpha)\}_{\alpha\in J,\ J\subseteq I,\ |J|=\aleph_0}.$$

Как следует из леммы 4.1, для любой координаты a_α $(\alpha \in J)$ элемента a, такой что $o(a_\alpha) = p^{k(\alpha)}$, найдётся циклическое прямое слагаемое $B_\alpha \subseteq T_p(G_\alpha)$, для которого $|B_\alpha| \geqslant p^{k(\alpha)}$. Пусть b_α — один из образующих группы B_α $(\alpha \in J)$. Тогда $\inf\{H_p(b_\alpha)\}_{\alpha\in J} = (0,1,2,\ldots)$. Так как $\mathbb{H}(g_j) \geqslant \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(pg_j), \mathbb{H}(b_\alpha)\}_{\alpha\in J}$, то из того, что система $\{G_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию конечности, следует существование конечной подсистемы $\{c_\tau\}_{\tau=\overline{1,n}} \subset \{pg_j, b_\alpha\}_{\alpha\in J}$, такой что $\mathbb{H}(g_j) \geqslant \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(c_\tau)\}_{\tau=\overline{1,n}}$. Если $pg_j \notin \{c_\tau\}_{\tau=\overline{1,n}}$, то предыдущее неравенство невозможно. Действительно, в группе $\prod\limits_{i\in I} T_p(G_i)$ существует элемент b', такой что все его ненулевые координаты являются элементами c_τ $(\tau = \overline{1,n})$. Так как элемент b' имеет конечный порядок и $\mathbb{H}(b') = \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(c_\tau)\}_{\tau=\overline{1,n}}$, то $\mathbb{H}(g_j) \ngeqslant \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(c_\tau)\}_{\tau=\overline{1,n}}$. Пусть $pg_j \in \{c_\tau\}_{\tau=\overline{1,n}}$ и $pg_j = c_n$. Так как все элементы c_τ $(\tau = \overline{1,n-1})$ имеют конечный порядок, то существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $p^m = \max\{o(c_\tau)\}_{\tau=\overline{1,n-1}}$. Тогда $H_p(p^l g_j) < \inf\{H_p(p^l c_\tau)\}_{\tau=\overline{1,n}} = H_p(p^{l+1} g_j)$ для любого $l \geqslant m$. Следовательно, $\mathbb{H}(g_j) \ngeqslant \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(c_\tau)\}_{\tau=\overline{1,n}}$. □

Следствие 4.4. *Пусть система $\{G_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию конечности для высотных матриц. Если для некоторого $j \in I$ существует A_j — прямое слагаемое без кручения группы G_j, то для любого $p \in \pi(A_j)$ справедливо*

$$T_p\Bigl(\prod_{i\in I} G_i\Bigr) = \prod_{i\in I} T_p(G_i).$$

Лемма 4.5. *Пусть система $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ удовлетворяет условию конечности и $\mathfrak{A} = I \cup J$, причём выполняются следующие условия:*

1) *$G_\alpha = A_\alpha \oplus B_\alpha$, если $\alpha \in I \cap J$,*
2) *$G_\alpha = A_\alpha$, если $\alpha \in \mathfrak{A} \setminus J$,*
3) *$G_\alpha = B_\alpha$, если $\alpha \in \mathfrak{A} \setminus I$,*

где $0 \neq A_\alpha$ — группа без кручения, $0 \neq B_\alpha = T(G_\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$. Если $\prod\limits_{j\in J} B_j$ — вполне транзитивная группа, то система $\Bigl\{\prod\limits_{i\in I} A_i, \prod\limits_{j\in J} B_j\Bigr\}$ удовлетворяет условию монотонности.

Доказательство. Пусть $A = \prod\limits_{i\in I} A_i$ и $B = \prod\limits_{j\in J} B_j$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $a, c \in A$, $b \in B$ и $\mathbb{H}(a) \geqslant \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(c), \mathbb{H}(b)\}$. Тогда, как вытекает из следствия 4.4, для каждого простого числа p, такого что $pA \neq A$, существует $n \in \mathbb{N}$, такое что $p^n b = 0$. Следовательно, $H_p(p^n a) \geqslant \inf\{H_p(p^n c), H_p(p^n b)\} = H_p(p^n c)$, откуда $\mathbb{H}(a) \geqslant \mathbb{H}(c)$.

Рассмотрим второй случай. Пусть $a \in A$, $b, c \in B$ и $\mathbb{H}(b) \geqslant \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a), \mathbb{H}(c)\}$, причём $\mathbb{H}(b) \ngeqslant \mathbb{H}(a)$ и $\mathbb{H}(b) \ngeqslant \mathbb{H}(c)$.

1. Пусть $o(b) < \infty$, $o(c) < \infty$ и $b = b_{p_1} + \ldots + b_{p_k}$, где $b_{p_\tau} \in B_{p_\tau}$ и B_{p_τ} $(\tau = \overline{1,k})$ — p-компоненты периодической части группы B. Рассмотрим все такие элементы $b_q \in B_q$, что $q \in \{p_\tau\}_{\tau=\overline{1,k}}$ и $\mathbb{H}(b_q) \ngeqslant \mathbb{H}(a)$, $\mathbb{H}(b_q) \ngeqslant \mathbb{H}(c)$. Так как $\mathbb{H}(b_q) \geqslant \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a), \mathbb{H}(c)\}$ и $\mathbb{H}(b_q) \ngeqslant \mathbb{H}(a)$, $\mathbb{H}(b_q) \ngeqslant \mathbb{H}(c)$, то $1'$) $H_q(b_q) \gtreqless H_q(a)$ и $2'$) $H_q(a) \gtreqless H_q(c)$. Покажем, что выполняется $1'$). Действительно, так как $o(a) = \infty$, $o(b_q) < \infty$ и $\mathbb{H}(b_q) \ngeqslant \mathbb{H}(a)$, то $H_q(b_q) \gtreqless H_q(a)$. Покажем, что справедливо условие $2'$). Так как $o(a) = \infty$, $o(c) < \infty$, $h_q(a) \neq \infty$ и $h_q(c) \neq \infty$, то возможны только два варианта: $H_q(a) < H_q(c)$ или $H_q(a) \gtreqless H_q(c)$. Допустим, что $H_q(a) < H_q(c)$, тогда $\inf\{H_q(a), H_q(c)\} = H_q(a) \leqslant H_q(b_q)$, что противоречит $1'$). Пусть

$$H_q(b_q) = \big(\delta_0^{(q)}, \ldots, \delta_{m(q)}^{(q)}, \infty, \ldots\big), \tag{3}$$

$H_q(a) = \big(n_0^{(q)}, n_1^{(q)}, \ldots\big)$, $H_q(c) = \big(\sigma_0^{(q)}, \ldots, \sigma_{\nu(q)}^{(q)}, \infty, \ldots\big)$ для каждого q. Так как $\mathbb{H}(b_q) \geqslant \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a), \mathbb{H}(c)\}$ и $H_q(b_q) \gtreqless H_q(a)$, $H_q(a) \gtreqless H_q(c)$, то $h_q(a) > h_q^*(b_q) \geqslant h_q^*(c)$ (т. е. $n_0^{(q)} > \delta_0^{(q)} \geqslant \sigma_0^{(q)}$). Так как $H_q(b_q) \gtreqless H_q(a)$, то существует наименьшее целое неотрицательное число $r(q)$, такое что $n_{r(q)}^{(q)} > \delta_{r(q)}^{(q)} \geqslant \sigma_{r(q)}^{(q)}$, но уже $\delta_{r(q)+1}^{(q)} \geqslant n_{r(q)+1}^{(q)}$, причём $\delta_{r(q)+1}^{(q)} \neq \infty$ (если предположить, что $\delta_{r(q)+1}^{(q)} = \infty$, то $\mathbb{H}(b_q) \geqslant \mathbb{H}(c)$, что невозможно). Покажем, что между $\delta_{r(q)}^{(q)}$ и $\delta_{r(q)+1}^{(q)}$ есть скачок. Действительно, так как $\delta_{r(q)}^{(q)} < n_{r(q)}^{(q)}$, то

$$\delta_{r(q)}^{(q)} + 1 < n_{r(q)}^{(q)} + 1 = n_{r(q)+1}^{(q)} \leqslant \delta_{r(q)+1}^{(q)}.$$

Так как в индикаторе $H_q(b_q)$ каждый $\delta_\gamma^{(q)}$-й инвариант Ульма—Капланского группы B_q отличен от нуля, если между $\delta_\gamma^{(q)}$ и $\delta_{\gamma+1}^{(q)}$ есть скачок, то, как вытекает из [20, лемма 65.3], последовательность (3) будет индикатором некоторого элемента $d_q \in B_q$. С другой стороны, так как элемент $q^{m(q)} b_q$ имеет порядок q и высоту, большую или равную $n_{m(q)}^{(q)}$, то по лемме 4.1 в группе B_q существует циклическое прямое слагаемое F_q порядка не меньше чем $q^{n_{m(q)}^{(q)}+1}$. Так как $n_{m(q)}^{(q)} = n_0^{(q)} + m(q)$, то $q^{n_{m(q)}^{(q)}+1} = q^{n_0^{(q)}+m(q)+1}$. Пусть f_q — один из образующих группы F_q. Тогда элемент $q^{n_0^{(q)}} f_q$ будет иметь индикатор $H_q(q^{n_0^{(q)}} f_q) = \big(n_0^{(q)}, \ldots, n_\lambda^{(q)}, \infty, \ldots\big)$, где $\lambda \geqslant m(q)$.

Итак, мы получили, что $H_q(d_q) > H_q(c)$ и $H_q\big(q^{n_0^{(q)}} f_q\big) > H_q(a)$, откуда следует, что $\mathbb{H}(d_q) > \mathbb{H}(c)$ и $\mathbb{H}\big(q^{n_0^{(q)}} f_q\big) > \mathbb{H}(a)$. С другой стороны, так как $h_q(q^\alpha d_q) < h_q\big(q^{\alpha+n_0^{(q)}} f_q\big)$ для любого $0 \leqslant \alpha \leqslant r(q)$, а $h_q(q^\alpha d_q) > h_q\big(q^{\alpha+n_0^{(q)}} f_q\big)$ для всех $\alpha > r(q)$, то $H_q\big(d_q + q^{n_0^{(q)}} f_q\big) = \inf\big\{H_q(d_q), H_q\big(q^{n_0^{(q)}} f_q\big)\big\}$, причём $\mathbb{H}\big(d_q + q^{n_0^{(q)}} f_q\big) \leqslant \mathbb{H}(b_q)$, как видно из построения элемента $d_q + q^{n_0^{(q)}} f_q$. Так как B_q — вполне транзитивная группа, то существует такой гомоморфизм $\varphi_q \in \mathrm{E}(B_q)$, что $\varphi_q(d_q) + \varphi_q\big(q^{n_0^{(q)}} f_q\big) = b_q$, откуда получаем, что $\mathbb{H}\big(\varphi_q(d_q)\big) > \mathbb{H}(c)$, $\mathbb{H}\Big(\varphi_q\big(q^{n_0^{(q)}} f_q\big)\Big) > \mathbb{H}(a)$. Заменяя в равенстве $b = b_{p_1} + \ldots + b_{p_k}$ все элементы b_q со свойством $\mathbb{H}(b_q) \ngeqslant \mathbb{H}(a)$ и $\mathbb{H}(b_q) \ngeqslant \mathbb{H}(c)$ их разложениями, приведёнными выше, получим, что $b = b'_1 + \ldots + b'_n$, где $n \geqslant k$. Таким образом, для любого $\beta = \overline{1,n}$ найдётся элемент $v \in \{a, c\}$, такой что $\mathbb{H}(b'_\beta) \geqslant \mathbb{H}(v)$.

2. Пусть $o(b) < \infty$, $o(c) = \infty$ и $\{c_j\}_{j\in J}$, $\{a_i\}_{i\in I}$ — координаты элементов c и a соответственно. Поскольку $\mathbb{H}(b) \geqslant \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a), \mathbb{H}(c)\}$, имеем $\mathbb{H}(b) \geqslant \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_i), \mathbb{H}(c_j)\}_{i\in I,\ j\in J}$. Из того, что $o(b) < \infty$, следует существование конечного числа элементов $\{c_{j_k}, a_{i_l}\}_{k=\overline{1,r},\ l=\overline{1,t}}$, таких что

$$\mathbb{H}(b) \geqslant \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_{i_l}), \mathbb{H}(c_{j_k})\}_{k=\overline{1,r},\ l=\overline{1,t}},$$

где $\{c_{j_k}, a_{i_l}\}_{k=\overline{1,r},\ l=\overline{1,t}} \subset \{c_j\}_{j\in J} \cup \{a_i\}_{i\in I}$, причём множество $\{c_{j_k}, a_{i_l}\}_{k=\overline{1,r},\ l=\overline{1,t}}$ не может состоять только из элементов c_{j_k} $(k = \overline{1,r})$ или только из элементов a_{i_l} $(l = \overline{1,t})$. Действительно, если $a_{i_l} = 0$ для любого $l = \overline{1,t}$, то

$$\mathbb{H}(b) \geqslant \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(c_{j_k})\}_{k=\overline{1,r}} \geqslant \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(c_j)\}_{j\in J} = \mathbb{H}(c),$$

что невозможно, так как по условию $\mathbb{H}(b) \ngeqslant \mathbb{H}(c)$. Аналогично проверяется условие, при котором $c_{j_k} = 0$ для любого $k = \overline{1,r}$.

Пусть $\rho_{j_k}\colon B_{j_k} \to B$ $(k = \overline{1,r})$ и $\rho_{i_l}\colon A_{i_l} \to A$ $(l = \overline{1,t})$ — вложения, тогда

$$\mathbb{H}(b) \geqslant \inf_{\mathfrak{M}}\big\{\mathbb{H}\big(\rho_{j_1}(c_{j_1}) + \ldots + \rho_{j_k}(c_{j_k})\big), \mathbb{H}\big(\rho_{i_1}(a_{i_1}) + \ldots + \rho_{i_t}(a_{i_t})\big)\big\}.$$

Так как элемент $\rho_{j_1}(c_{j_1}) + \ldots + \rho_{j_k}(c_{j_k})$ имеет конечный порядок, то, как вытекает из случая 1, существует конечное число элементов $b_1, \ldots, b_m \in B$, таких что $b = b_1 + \ldots + b_m$, причём для каждого элемента b_β $(\beta = \overline{1,m})$ должно выполняться хотя бы одно из двух неравенств: $\mathbb{H}(b_\beta) \geqslant \mathbb{H}\big(\rho_{j_1}(c_{j_1}) + \ldots + \rho_{j_k}(c_{j_k})\big)$ или $\mathbb{H}(b_j) > \mathbb{H}\big(\rho_{i_1}(a_{i_1}) + \ldots + \rho_{i_t}(a_{i_t})\big)$. Тогда для каждого $\beta = \overline{1,m}$ должно выполняться хотя бы одно из двух неравенств: $\mathbb{H}(b_\beta) \geqslant \mathbb{H}(c)$ или $\mathbb{H}(b_\beta) > \mathbb{H}(a)$.

3. Пусть $o(b) = \infty$, $o(c) = \infty$, тогда среди координат $\{b_j\}_{j\in J}$ элемента b выберем только такие, для которых $\mathbb{H}(b_j) \ngeqslant \mathbb{H}(c)$ (такие существуют, в противном случае $\mathbb{H}(b) \geqslant \mathbb{H}(c)$, что противоречило бы предположению $\mathbb{H}(b) \ngeqslant \mathbb{H}(c)$). Так как $o(b_j) < \infty$ для любого $j \in J$, то, как следует из случаев 1 и 2, существуют элементы $\{b_k^{(j)}\}_{k=\overline{1,r}}$, $b_k^{(j)} \in B$, такие что $\rho_j(b_j) = b_1^{(j)} + \ldots + b_r^{(j)}$, где $\rho_j\colon B_j \to B$ — вложение, причём для любого $k = \overline{1,r}$ должно выполняться хотя бы одно из двух неравенств: $\mathbb{H}\big(b_k^{(j)}\big) > \mathbb{H}(c)$ или $\mathbb{H}\big(b_k^{(j)}\big) > \mathbb{H}(a)$.

Пусть $\pi_j\colon B \to B_j$ — проекция, тогда $b_j = \pi_j\bigl(b_1^{(j)}\bigr) + \ldots + \pi_j\bigl(b_r^{(j)}\bigr)$, причём $\mathbb{H}\Bigl(\pi_j\bigl(b_k^{(j)}\bigr)\Bigr) > \mathbb{H}(c)$ или $\mathbb{H}\Bigl(\pi_j\bigl(b_k^{(j)}\bigr)\Bigr) > \mathbb{H}(a)$ для любого $k = \overline{1,r}$. Тогда каждый элемент b_j можно представить в виде $b_j = b_{j_1} + b_{j_2}$, где b_{j_1} равен сумме элементов $\pi_j\bigl(b_k^{(j)}\bigr)$, таких что $\mathbb{H}\Bigl(\pi_j\bigl(b_k^{(j)}\bigr)\Bigr) > \mathbb{H}(c)$, а b_{j_2} — сумме элементов $\pi_j\bigl(b_k^{(j)}\bigr)$, для которых $\mathbb{H}\Bigl(\pi_j\bigl(b_k^{(j)}\bigr)\Bigr) \not> \mathbb{H}(c)$. Поэтому $\mathbb{H}(b_{j_1}) > \mathbb{H}(c)$, $\mathbb{H}(b_{j_2}) > \mathbb{H}(a)$. Тогда $b = (\ldots, b_{j_1} + b_{j_2}, \ldots)$, причём для некоторых $b_j \neq 0$ может выполняться $b_{j_1} = 0$ или $b_{j_2} = 0$. Следовательно, элемент b можно записать в виде $b = b_1 + b_2$, где $b_1 = (\ldots, b_{j_1}, \ldots)$, $b_2 = (\ldots, b_{j_2}, \ldots)$. Поэтому $\mathbb{H}(b_1) \geqslant \mathbb{H}(c)$, $\mathbb{H}(b_2) > \mathbb{H}(a)$. □

Теорема 4.6. *Пусть система $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ удовлетворяет условию конечности и $\mathfrak{A} = I \cup J$, причём выполняются следующие условия*:

1) *$G_\alpha = A_\alpha \oplus B_\alpha$, если $\alpha \in I \cap J$,*
2) *$G_\alpha = A_\alpha$, если $\alpha \in \mathfrak{A} \setminus J$,*
3) *$G_\alpha = B_\alpha$, если $\alpha \in \mathfrak{A} \setminus I$,*

где $0 \neq A_\alpha$ — группа без кручения, $0 \neq B_\alpha = T(G_\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$. Группа $G = \prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} G_\alpha$ вполне транзитивна тогда и только тогда, когда группы $\prod\limits_{i\in I} A_i$ и $\prod\limits_{j\in J} B_j$ вполне транзитивны.

Доказательство. Пусть $A = \prod\limits_{i\in I} A_i$ и $B = \prod\limits_{j\in J} B_j$, тогда, как следует из теоремы 1.3, эти группы вполне транзитивны.

Проведём доказательство в обратную сторону. Покажем, что система групп $\{A, B\}$ вполне транзитивна. Так как система $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ удовлетворяет условию конечности, то, как вытекает из следствия 4.4, $T_p(B) = \prod\limits_{j\in J} B_{j_p}$ для любого простого числа $p \in \pi(A)$, где B_{j_p} $(j \in J)$ — p-компонента группы B_j. Тогда для каждого простого числа $p \in \pi(A)$ справедливо $H_p(b) \nleq H_p(a)$, откуда $\mathbb{H}(b) \nleq \mathbb{H}(a)$, т. е. возможно только неравенство $\mathbb{H}(b) > \mathbb{H}(a)$. По лемме 4.2 существует такой гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$, что $\varphi(a) = b$. Условие монотонности системы $\{A, B\}$ следует из леммы 4.5. □

Непосредственно из этой теоремы для класса расщепляемых групп получаем следующий результат.

Следствие 4.7. *Пусть система $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ расщепляемых групп удовлетворяет условию конечности. Группа $G = \prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} G_\alpha$ вполне транзитивна тогда и только тогда, когда группы $\prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} T(G_\alpha)$ и $\prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} \bigl(G_\alpha / T(G_\alpha)\bigr)$ вполне транзитивны.*

Следствие 4.8. *Расщепляемая группа вполне транзитивна тогда и только тогда, когда её периодическая часть и часть без кручения вполне транзитивны.*

Некоторые классы вполне транзитивных расщепляемых групп выделяются в следующем следствии.

Следствие 4.9. *Пусть $G = A \oplus B$, где $B = T(G)$. Если группы A и B удовлетворяют хотя бы одному из следующих условий:*

1) *A — такая сепарабельная группа, что для любых неизоморфных прямых слагаемых C и K ранга 1 группы A справедливо $\pi(C) \cap \pi(K) = \varnothing$,*
2) *A — алгебраически компактная группа,*
3) *B — сепарабельная группа,*
4) *B — тотально проективная группа,*
5) *B — прямая сумма сепарабельной и тотально проективной групп,*

то G — вполне транзитивная группа.

Доказательство. Вполне транзитивность групп из 1), 2) и 5) вытекает соответственно из теоремы 2.4, следствия 3.9 и предложения 3.8; вполне транзитивность групп из 3) и 4) получаем из [20]. □

Напомним, что подгруппу H группы G называют поглощающей в G [48], если $T(G/H) = 0$.

Обозначим через $\mathfrak{B}$ класс всех редуцированных групп, в которых каждая поглощающая подгруппа выделяется прямым слагаемым.

Следствие 4.10. *Группа $G \in \mathfrak{B}$ вполне транзитивна тогда и только, тогда когда $T(G)$ вполне транзитивна.*

Доказательство. Из [48] и [49] следует, что $G = T(G) \oplus F$, где F — прямая сумма конечного числа изоморфных между собой групп без кручения ранга 1. Остаётся применить следствие 4.8 и теорему 2.4. □

Следующие следствия будут интересны с точки зрения примеров классов вполне транзитивных групп.

Обозначим через $\mathfrak{C}$ класс всех редуцированных групп, в которых каждая изотипная (сервантная) подгруппа выделяется прямым слагаемым.

Следствие 4.11. *Класс $\mathfrak{C}$ состоит из вполне транзитивных групп.*

Доказательство. Как следует из [26, теорема 2], произвольная группа $G \in \mathfrak{C}$ имеет вид $G = T(G) \oplus F$, где каждая p-компонента $T(G)$ является ограниченной, а группа F — прямая сумма конечного числа изоморфных между собой групп ранга 1. Применяя следствие 4.9, получим вполне транзитивность группы G. □

Напомним, что подгруппу B называют сбалансированной в группе A [50], если каждый смежный класс $a + B$ содержит такой элемент x, что $\mathbb{H}_A(x) = \mathbb{H}_{A/B}(a + B)$ и $o(x) = o(a + B)$.

Обозначим через $\mathfrak{S}$ класс всех редуцированных групп, в которых каждая сервантная подгруппа является сбалансированной.

Следствие 4.12. *Класс $\mathfrak{S}$ состоит из вполне транзитивных групп.*

Доказательство. Из [50, предложение 4.8] следует, что каждая группа из класса $\mathfrak{S}$ имеет вид $G = A \oplus B$, где B — периодическая группа, в которой каждая p-компонента является ограниченной, и A — однородная вполне разложимая группа без кручения конечного ранга. Вполне транзитивность группы G будет вытекать из следствия 4.9. $\square$

Теорема 4.13. *Пусть* $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ *— система* $\mathbf{s}$*-обобщённо узких групп и* $\mathfrak{A} = I \cup J$, *причём выполняются следующие условия*:

1) $G_\alpha = A_\alpha \oplus B_\alpha$, *если* $\alpha \in I \cap J$,
2) $G_\alpha = A_\alpha$, *если* $\alpha \in \mathfrak{A} \setminus J$,
3) $G_\alpha = B_\alpha$, *если* $\alpha \in \mathfrak{A} \setminus I$,

где $0 \neq A_\alpha$ *— группа без кручения,* $0 \neq B_\alpha = T(G_\alpha)$ *для любого* $\alpha \in \mathfrak{A}$. *Группа* $\prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} G_\alpha$ *вполне транзитивна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

1) $\prod\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$ *— вполне транзитивная группа*;
2) $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ *— вполне транзитивная система*;
3) *если* $p \in \pi\Big(\prod\limits_{\alpha\in I} G_\alpha\Big)$, *то* $T_p\Big(\prod\limits_{\alpha\in J} G_\alpha\Big) = \prod\limits_{\alpha\in J} T_p(G_\alpha)$.

Доказательство. Из условия теоремы получаем, что

$$G = \prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} G_\alpha = \prod_{\alpha\in I} G_\alpha \oplus \prod_{\alpha\in J} G_\alpha.$$

Из вполне транзитивности группы G следует вполне транзитивность групп $\prod\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$ и $\prod\limits_{\alpha\in J} G_\alpha$ (теорема 1.3). Из предложения 1.4 вытекает, что система $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ вполне транзитивна. Поскольку $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ — система $\mathbf{s}$-обобщённо узких групп и G — вполне транзитивная группа, то, как следует из теоремы 3.1, система $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ удовлетворяет условию конечности. По следствию 4.4 выполняется условие 3).

Докажем утверждение в обратную сторону. Из следствия 3.7 вытекает, что группа $\prod\limits_{\alpha\in J} G_\alpha$ вполне транзитивна. Покажем, что система $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ удовлетворяет условию конечности. Рассмотрим произвольную группу без кручения $A_i \in \{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ и произвольный элемент $a_i \in A_i$, такой что $\mathbb{H}(a_i) \geqslant \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_\alpha)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}'}$, где $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ и $|\mathfrak{A}'| = \aleph_0$. Рассмотрим все такие простые числа p, что $h_p(a_i) \neq \infty$ в группе A_i. Тогда $T_p\Big(\prod\limits_{\alpha\in J} G_\alpha\Big) = \prod\limits_{\alpha\in J} T_p(G_\alpha)$ и для каждого такого простого числа p будет существовать такое $m(p) \in \mathbb{N}$, что $h_p\big(p^{m(p)}a_i\big) \geqslant h_p\big(p^{m(p)}g_\alpha^{(p)}\big)$ для некоторого элемента бесконечного порядка $g_\alpha^{(p)} \in \{g_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}'}$. Тогда $H_p(a_i) \geqslant H_p\big(g_\alpha^{(p)}\big)$ для всех таких p и всех таких элементов $g_\alpha^{(p)}$. Откуда следует, что $\mathbb{H}(a_i) \geqslant \inf\limits_{\mathfrak{M}}\big\{\mathbb{H}\big(g_\alpha^{(p)}\big)\big\}_{\alpha\in\mathfrak{A}'\cap I}$. Так как система $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ состоит из $\mathbf{s}$-обобщённо узких групп и так как $\prod\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$ — вполне транзитивная группа, то система $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ по теореме 3.1 удовлетворяет условию конечности. Тогда её подсистема $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}'\cap I}$ также удовлетворяет условию конечности. Следовательно, среди элементов $\{g_\alpha^{(p)}\}_{\alpha\in\mathfrak{A}'\cap I}$ найдётся конечная подсистема элементов $\{g_{\alpha r}^{(p)}\}_{r=\overline{1,n}}$, такая что $\mathbb{H}(a_i) \geqslant \inf\limits_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_{\alpha r}^{(p)})\}_{r=\overline{1,n}}$. Таким образом, показано, что система $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ удовлетворяет условию конечности. Значит, по теореме 4.6 группа G вполне транзитивна. □

Если $\mathbf{s}$-обобщённо узкие группы G_i $(i \in I)$ являются смешанными сепарабельными группами [45], то условия 1)—3) теоремы 3.1 можно заменить более наглядными.

Теорема 4.14. *Пусть* $\{G_i\}_{i\in I}$ *— семейство сепарабельных групп. Группа* $\prod\limits_{i\in I} G_i$ *вполне транзитивна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) *если для простого числа* p *найдётся прямое слагаемое без кручения* C *из* G, *такое что* $pC \neq C$, *то* $T_p(G) = \prod\limits_{i\in I} T_p(G_i)$;
2) *для любых неизоморфных прямых слагаемых* A *и* B *ранга без кручения* 1 *из* G *следует, что* $\pi(A) \cap \pi(B) = \varnothing$.

Доказательство. Так как сепарабельные группы являются $\mathbf{s}$-обобщённо узкими, то из теоремы 3.1 следует, что система $\{G_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию конечности. Тогда по предложению 4.3 получаем выполнение условия 1). Справедливость условия 2) вытекает из лемм 2.2 и 2.1.

Проведём доказательство в обратную сторону. Пусть $a, b \in G$ и $\mathbb{H}(a) \leqslant \mathbb{H}(b)$, где $a = (\ldots, a_i, \ldots)$, $b = (\ldots, b_i, \ldots)$. Так как для каждого $i \in I$ элементы $a_i, b_i \in G_i$ можно вложить во вполне разложимое прямое слагаемое G_i' группы G_i, т. е. $G_i' = A_i \oplus B_i$, где A_i — вполне разложимая группа без кручения конечного ранга, а B_i — прямая сумма конечного числа циклических p-групп, то элементы a и b будут принадлежать прямому слагаемому $G' = \prod\limits_{i\in I} A_i \oplus \prod\limits_{i\in I} B_i$ группы G. Поэтому для доказательства существования такого $\varphi \in \mathrm{E}(G)$, что $\varphi(a) = b$, достаточно показать, что G' — вполне транзитивная группа. Как следует из предыдущей теоремы, для доказательства вполне транзитивности группы G' достаточно заметить, что $\prod\limits_{i\in I} A_i$ — вполне транзитивная группа и $\{B_i\}_{i\in I}$ — вполне транзитивная система. Вполне транзитивность последней вытекает из следствий 3.9 и 3.7. Вполне транзитивность $\prod\limits_{i\in I} A_i$ показывается в следствии 2.7. □

Следствие 4.15. *Сепарабельная абелева группа вполне транзитивна тогда и только тогда, когда для любых её неизоморфных прямых слагаемых* A *и* B *ранга без кручения* 1 *имеем, что* $\pi(A) \cap \pi(B) = \varnothing$.

Далее будет исследовано влияние свойства вполне транзитивности на расщепляемость прямого произведения $\mathbf{s}$-обобщённо узких групп.

Поскольку смешанная группа расщепляется тогда и только тогда, когда расщепляется её редуцированная часть, в следующем предложении и его следствиях группы предполагаются редуцированными.

Предложение 4.16. *Пусть* $G = \prod\limits_{i \in I} G_i$ — *смешанная группа. Группа* G *расщепляется тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

1) *если* G_i $(i \in I)$ — *смешанная группа, то она расщепляется*;
2) $T\Big(\prod\limits_{i \in I} G_i\Big) = \prod\limits_{i \in I} T(G_i)$.

Доказательство. Выполнение условия 1) следует из [20, с. 224]. Докажем условие 2). Допустим противное, т. е. пусть $T\Big(\prod\limits_{i \in I} G_i\Big) \neq \prod\limits_{i \in I} T(G_i)$, тогда группа $\prod\limits_{i \in I} T(G_i)$ содержит такой элемент g, что $o(g) = \infty$, $g = (\ldots, g_i, \ldots)$ и $o(g_i) = n_i$ $(n_i \in \mathbb{N})$ для любого $i \in I$. Рассмотрим произвольную координату $g_i \neq 0$, и пусть $n_i = p_i^{k_i} m_i$, где p_i — такое простое число, что $(p_i, m_i) = 1$ и $k_i, m_i \in \mathbb{N}$. Тогда элемент $m_i g_i$ будет иметь порядок $p_i^{k_i}$. Группа G_i, как следует из леммы 4.1, будет содержать циклическое прямое слагаемое A_i порядка не меньше $p_i^{k_i}$. Так как $o(g) = \infty$, то найдутся координата g_j элемента g и простое число p_j, такие что $o(g_j) = p_j^{k_j} m_j$, где $(p_j, m_j) = 1$ и $k_j, m_j \in \mathbb{N}$, причём $p_j^{k_j} > p_i^{k_i}$. Тогда согласно лемме 4.1 в группе G_j найдётся циклическое прямое слагаемое A_j порядка не меньше $p_j^{k_j}$. Продолжая таким образом, мы получим систему групп $\{A_i\}_{i \in I'}$, где $I' \subseteq I$ и $|I'| = \aleph_0$, порядки которых в совокупности не ограничены. Так как каждая группа A_i $(i \in I')$ выделяется в группе G_i прямым слагаемым, то

$$\prod_{i \in I} G_i = \prod_{i \in I \setminus I'} G_i \oplus \prod_{i \in I'} B_i \oplus \prod_{i \in I'} A_i,$$

где $G_i = A_i \oplus B_i$ для любого $i \in I'$. Так как $\prod\limits_{i \in I} G_i$ расщепляется, то каждое прямое слагаемое этой группы также расщепляется, т. е. $\prod\limits_{i \in I'} A_i = A \oplus T\Big(\prod\limits_{i \in I'} A_i\Big)$, где A — группа без кручения. Но $T\Big(\prod\limits_{i \in I'} A_i\Big)$ — ограниченная группа [19, следствие 40.3], что противоречит тому, что она, с другой стороны, содержит неограниченную подгруппу $\bigoplus\limits_{i \in I'} A_i$.

Докажем теорему в обратную сторону. Поскольку выполняется условие 1), то $G_i = A_i \oplus T(G_i)$ $(i \in I)$, где A_i — группа без кручения. Тогда

$$\prod_{i \in I} G_i = \prod_{i \in I} A_i \oplus \prod_{i \in I} T(G_i) = \prod_{i \in I} A_i \oplus T\Big(\prod_{i \in I} G_i\Big). \qquad \square$$

Следствие 4.17. *Если* $G = \prod\limits_{i \in I} G_i$ — *смешанная группа, где* G_i $(i \in I)$ — *периодические группы, то* G — *нерасщепляющаяся группа.*

Следствие 4.18. *Пусть* $G = \prod\limits_{i \in I} G_i$ — *смешанная группа,* $\{G_i\}_{i \in I}$ — *система групп, удовлетворяющая условию конечности. Группа* G *расщепляется тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

1) *если* G_i $(i \in I)$ — *смешанная группа, то она расщепляется*;

2) *если для простого числа p найдётся прямое слагаемое без кручения A группы G, такое что $pA = A$, то* $T_p\Big(\prod\limits_{i\in I} G_i\Big) = \prod\limits_{i\in I} T_p(G_i)$;
3) $\bigoplus\limits_{p\in\pi}\prod\limits_{i\in I} T_p(G_i) = \prod\limits_{i\in I}\bigoplus\limits_{p\in\pi} T_p(G_i)$.

Доказательство. Необходимость следует из предложения 4.16. Для доказательства достаточности нам нужно показать, что $T\Big(\prod\limits_{i\in I} G_i\Big) = \prod\limits_{i\in I} T(G_i)$. Так как система $\{G_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию конечности, то согласно следствию 4.4 для любого простого числа p, для которого найдётся такое $i \in I$, что группа $G_i/T(G_i)$ не p-делима, справедливо $T_p\Big(\prod\limits_{i\in I} G_i\Big) = \prod\limits_{i\in I} T_p(G_i)$. Тогда имеем

$$T\Big(\prod_{i\in I} G_i\Big) = \bigoplus_{p\in\pi} T_p\Big(\prod_{i\in I} G_i\Big) = \bigoplus_{p\in\pi}\prod_{i\in I} T_p(G_i) = \prod_{i\in I}\bigoplus_{p\in\pi} T_p(G_i) = \prod_{i\in I} T(G_i). \quad \square$$

Следствие 4.19. *Вполне транзитивная смешанная группа G, равная прямому произведению $\mathbf{s}$-обобщённо узких групп G_i $(i \in I)$, расщепляется тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

1) *если G_i $(i \in I)$ — смешанная группа, то она расщепляется*;
2) *если для простого числа p найдётся прямое слагаемое без кручения A группы G, такое что $pA = A$, то* $T_p\Big(\prod\limits_{i\in I} G_i\Big) = \prod\limits_{i\in I} T_p(G_i)$;
3) $\bigoplus\limits_{p\in\pi}\prod\limits_{i\in I} T_p(G_i) = \prod\limits_{i\in I}\bigoplus_{p\in\pi} T_p(G_i)$.

Доказательство вытекает из теоремы 3.1 и предыдущего следствия. $\square$

Следующая теорема отражает влияние свойства вполне транзитивности на сепарабельность прямого произведения абелевых редуцированных групп.

Теорема 4.20. *Группа $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$ является вполне транзитивной сепарабельной группой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

1) *G_i — сепарабельная группа для любого $i \in I$*;
2) *для любых однородных прямых слагаемых без кручения A и B из G, таких что $t(A) \neq t(B)$, справедливо $\pi(A) \cap \pi(B) = \varnothing$*;
3) $G = \bigoplus\limits_{i\in J_1} G_i \oplus \bigoplus\limits_{i\in J_2} A_i \oplus \bigoplus\limits_{j=1}^{k} \prod\limits_{i\in I'} A_i^{(j)} \oplus \prod\limits_{i\in I\setminus J_1} T(G_i)$, *где J_1, J_2 — такие конечные множества, что $J_1 \subset I$, $J_2 \subset I\setminus J_1$, $I' = I\setminus(J_1\cup J_2)$; $\prod\limits_{i\in I\setminus J_1} T(G_i)$ — ограниченная группа; $A_i \cong G_i/T(G_i)$ для любого $i \in I\setminus J_1$; $\prod\limits_{i\in I'} A_i^{(j)}$ $(j = \overline{1,k})$ — однородные группы без кручения, причём если $\prod\limits_{i\in I'} A_i^{(j)} \neq \bigoplus\limits_{i\in I'} A_i^{(j)}$ для некоторого $j = \overline{1,k}$, то $\prod\limits_{i\in I'} A_i^{(j)}$ имеет идемпотентный тип; $\bigoplus\limits_{i\in J_2} A_i$ — однородно разложимая группа без кручения.*

Доказательство. Докажем необходимость условий. Условие 2) следует из лемм 2.2 и 2.1. Выполнение условия 1) получаем из [15, следствие 3]. Покажем справедливость условия 3). Так как G — сепарабельная группа, то выполняются условия 2) и 3) из следствия 3 в [15], т. е. существует такое конечное подмножество $J_1 \subset I$, что группы $T(G_i)$ $(i \in I \setminus J_1)$ в совокупности ограничены. Тогда

$$G = \bigoplus_{i \in J_1} G_i \oplus \prod_{i \in I \setminus J_1} G_i = \bigoplus_{i \in J_1} G_i \oplus \prod_{i \in I \setminus J_1} A_i \oplus \prod_{i \in I \setminus J_1} T(G_i),$$

где $A_i \cong G_i/T(G_i)$ для любого $i \in I \setminus J_1$ и $\prod\limits_{i \in I \setminus J_1} T(G_i)$ — ограниченная периодическая группа. Из выполнения условия 2) данного следствия и условия б) из следствия 3 в [15] получим существование конечного подмножества $J_2 \subset I \setminus J_1$ и $k \in \mathbb{N}$, таких что $\prod\limits_{i \in I \setminus J_1} A_i = \prod\limits_{i \in J_2} A_i \oplus \prod\limits_{i \in I'} A_i$, где $k = \max |\tau(A_i)|_{i \in I'}$ и $\tau(A_i)$ $(i \in I',\ I' = I \setminus (I_1 \cup I_2))$ — множество типов прямых слагаемых без кручения ранга 1 групп A_i. Так как каждая группа A_i $(i \in I')$ является вполне транзитивной сепарабельной группой без кручения, то, как вытекает из теоремы 2.4, она однородно разложимая группа. Тогда

$$\prod_{i \in I'} A_i = \prod_{i \in I'} \bigoplus_{j=1}^{k} A_i^{(j)} = \bigoplus_{j=1}^{k} \prod_{i \in I'} A_i^{(j)},$$

причём для всякого $j = \overline{1,k}$, такого что $\prod\limits_{i \in I'} A_i^{(j)} \neq \bigoplus\limits_{i \in I'} A_i^{(j)}$ следует, что $\prod\limits_{i \in I'} A_i^{(j)}$ — однородная группа идемпотентного типа [25]. То, что $\bigoplus\limits_{i \in J_2} A_i$ — однородно разложимая группа, также следует из её вполне транзитивности и сепарабельности.

Покажем достаточность условий. Так как условия теоремы 4.14 выполняются, то G — вполне транзитивная группа. Поскольку G_i — сепарабельная группа для любого $i \in I$, то для доказательства сепарабельности группы G достаточно заметить, что $\prod\limits_{i \in I'} A_i^{(j)}$ — сепарабельная группа для любого $j = \overline{1,k}$ [15, следствие 3]. $\square$

Замечание. Если в теореме 4.20 группы G_i $(i \in I)$ счётные, то о группах $\bigoplus\limits_{i \in J_1} G_i \oplus \bigoplus\limits_{i \in J_2} A_i$ и $A_i^{(j)}$ $(i \in I',\ j = \overline{1,k})$ из условия 3) можно получить дополнительную информацию: эти группы вполне разложимы [45, следствие 1.6], поэтому если G — смешанная группа, то она расщепляется.

Литература

[1] Беккер И. Х., Крылов П. А., Чехлов А. Р. Абелевы группы без кручения, близкие к алгебраически компактным // Абелевы группы и модули. — Томск, 1994. — С. 3—52.

[2] Гриншпон С. Я. О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. — Томск, 1982. — С. 56—92.

[3] Гриншпон С. Я. Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность // Фундамент. и прикл. мат. — 2002. — Т. 8, вып. 2. — С. 407—473.

[4] Гриншпон С. Я., Мисяков В. М. О вполне транзитивных абелевых группах // Абелевы группы и модули. — Томск, 1986. — С. 12—27.

[5] Гриншпон С. Я., Мисяков В. М. Вполне транзитивность прямых произведений абелевых групп // Абелевы группы и модули. — Томск, 1991. — С. 23—30.

[6] Добрусин Ю. Б. О расщепляющихся квазисервантно инъективных группах // Абелевы группы и модули. — Томск, 1984. — С. 11—23.

[7] Добрусин Ю. Б. О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения. II // Абелевы группы и модули. — Томск, 1985. — С. 31—41.

[8] Добрусин Ю. Б. О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. — Томск, 1986. — С. 36—53.

[9] Крылов П. А. О вполне характеристических подгруппах абелевых групп без кручения // Сборник аспирантских работ по математике. — Томск, 1973. — С. 15—20.

[10] Крылов П. А. Сильно однородные абелевы группы без кручения // Сиб. мат. журн. — 1983. — Т. 24, № 2. — С. 77—84.

[11] Крылов П. А. Об абелевых группах без кручения. I // Абелевы группы и модули. — Томск, 1984. — С. 40—64.

[12] Крылов П. А. Некоторые примеры квазисервантно инъективных и транзитивных абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. — Томск, 1988. — С. 81—99.

[13] Крылов П. А. Вполне транзитивные абелевы группы без кручения // Алгебра и логика. — 1990. — Т. 29, № 5. — С. 549—560.

[14] Куликов Л. Я. К теории абелевых групп произвольной мощности // Мат. сб. — 1945. — Т. 16. — С. 129—162.

[15] Мисяков В. М. О сепарабельности прямого произведения произвольных абелевых групп // Абелевы группы и модули. — Томск, 1991. — С. 83—85.

[16] Мисяков В. М. Вполне транзитивность редуцированных абелевых групп // Абелевы группы и модули. — Томск, 1994. — С. 134—156.

[17] Москаленко А. И. О копериодической оболочке сепарабельной p-группы // Алгебра и логика. — 1989. — Т. 28, № 2. — С. 207—226.

[18] Рычков С. В. О прямых произведениях абелевых групп // Мат. сб. — 1982. — Т. 117 (159), № 2. — С. 266—278.

[19] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974. — Т. 1.

[20] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1977. — Т. 2.

[21] Чехлов А. Р. Абелевы группы без кручения конечного p-ранга с дополняемыми замкнутыми сервантными подгруппами // Абелевы группы и модули. — Томск, 1991. — С. 157—178.

[22] Чехлов А. Р. Об абелевых QCS-группах без кручения // Абелевы группы и модули. — Томск, 1994. — С. 240—245.

[23] Чехлов А. Р. Вполне транзитивные группы без кручения конечного p-ранга // Алгебра и логика. — 2001. — Т. 40, № 6. — С. 698—715.

[24] Arnold D. M. Strongly homogeneous torsion-free Abelian groups of finite rank // Proc. Amer. Math. Soc. — 1976. — Vol. 56. — P. 67—72.

[25] Beaumont R. A. A note on products of homogeneous free Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 22. — P. 434—436.

[26] Bečvar J. Abelian groups in which every pure subgroup is an isotype subgroup // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1980. — Vol. 62. — P. 129—136.

[27] Carroll D., Goldsmith B. On transitive and fully transitive Abelian p-groups // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. — 1996. — Vol. 96, no. 1. — P. 33—41.

[28] Corner A. L. S. The independence of Kaplansly's notions of transitivity and full transitivity // Quart. J. Math. Oxford Ser. — 1976. — Vol. 27, no. 105. — P. 15—20.

[29] Corner A. L. S., Göbel R. Prescribing endomorphism algebras, a unified treatment // Proc. London Math. Soc. — 1985. — Vol. 50. — P. 447—479.

[30] Dugas M., Hausen J. Torsion-free E-uniserial groups of infinite rank // Abelian Group Theory. Proc. 4th Conf., Perth, 1987. — Amer. Math. Soc., 1989. — (Contemp. Math.; Vol. 87). — P. 181—189.

[31] Dugas M., Shelah S. E-transitive groups in L // Abelian Group Theory. Proc. 4th Conf., Perth, 1987. — Amer. Math. Soc., 1989. — (Contemp. Math.; Vol. 87). — P. 191—199.

[32] Files S. Transitivity and full transitivity for nontorsion modules // J. Algebra. — 1997. — Vol. 197. — P. 468—478.

[33] Files S., Goldsmith B. Transitive and fully transitive groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — Vol. 126, no. 6. — P. 1605—1610.

[34] Griffith P. Transitive and fully transitive primary Abelian groups // Pacific J. Math. — 1968. — Vol. 25, no. 2. — P. 249—254.

[35] Hausen J. E-transitive torsion-free Abelian groups // J. Algebra. — 1987. — Vol. 107, no. 1. — P. 17—27.

[36] Hennecke G., Strüngmann L. Transitivity and full transitivity for p-local modules // Arch. Math. — 2000. — Vol. 74. — P. 321—329.

[37] Hill P. On transitive and fully transitive primary groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 22, no. 2. — P. 414—417.

[38] Hill P., Megibben Ch. On the theory and classification of Abelian p-groups // Math. Z. — 1985. — Vol. 190. — P. 17—38.

[39] Kaplansky I. Infinite Abelian Groups. — Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1954.

[40] Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. Endomorphism Rings of Abelian Groups. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2003.

[41] Le Borgne M. Groups λ-séparables // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1975. — Vol. 281, no. 12. — P. A415—A417.

[42] Mader A. The fully invariant subgroups of reduced algebraically compact groups // Publ. Math., Debrecen. — 1971. — Vol. 17, no. 1—4. — P. 299—306.

[43] Megibben C. Large subgroups and small homomorphisms // Michigan Math. J. — 1966. — Vol. 13. — P. 153—160.

[44] Megibben C. A nontransitive, fully transitive primary group // J. Algebra. — 1969. — Vol. 13. — P. 571—574.

[45] Megibben C. Separable mixed groups // Comment. Math. Univ. Carolin. — 1980. — Vol. 21, no. 4. — P. 755—768.

[46] Nunke R. J. Purity and subfunctors of the identity // Topics in Abelian Groups. — Chicago, 1963. — P. 121—171.

[47] Paras A., Strüngmann L. Fully transitive p-groups with finite first Ulm subgroup // Proc. Amer. Math. Soc. — 2003. — Vol. 131. — P. 371—377.

[48] Rangaswamy K. M. Full subgroups of Abelian groups // Indian J. Math. — 1964. — Vol. 6. — P. 21—27.

[49] Rangaswamy K. M. Groups with special properties // Proc. Nat. Inst. Sci. India. — 1965. — Vol. A31. — P. 531—526.

[50] Rangaswamy K. M. The theory of separable mixed Abelian groups // Comm. Algebra. — 1984. — Vol. 12, no. 15—16. — P. 1813—1834.

Статья поступила в редакцию в мае 2006 г.