Нечёткие модули относительно t-нормы и некоторые их свойства

С. Г. ПУШКОВ
Бийский технологический институт (филиал)
Алтайского государственного технического университета
e-mail: psg@bti.secna.ru

УДК 512.553+512.715

Ключевые слова: нечёткое множество, модуль над коммутативным кольцом, нечёткий подмодуль.

Аннотация

Введено понятие нечёткого подмодуля над коммутативным кольцом относительно t-нормы. Исследуются некоторые свойства нечётких подмодулей. В частности, рассматриваются свойства пересечения и прямого произведения нечётких подмодулей.

Abstract

S. G. Pushkov, Fuzzy modules with respect to t-norm and some of their properties, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 3, pp. 141—146.

We introduce the concept of fuzzy submodule over a commutative ring with respect to a *t*-norm. Some properties of fuzzy submodules are investigated. In particular, we consider properties of intersection and direct product for fuzzy submodules.

1. Введение

Понятие нечёткого множества [5] было применено к теории групп в [4]. Далее понятие нечёткой подгруппы было обобщено на случай, когда в определении алгебраической структуры вместо операции $\min$ используется t-норма [1]. Значительное число публикаций посвящено исследованию свойств нечётких абелевых групп (см., например, [2]) и нечётких колец [3].

В данной работе вводится понятие нечёткого подмодуля и исследуются некоторые свойства нечётких подмодулей. Для обеспечения достаточной общности изложения и учёта разнообразия различных применений все используемые здесь понятия рассматриваются относительно треугольных норм (t-норм).

Треугольной нормой (t-нормой) принято называть функцию

$$T\colon [0,1] \to [0,1],$$

удовлетворяющую для любых $x, y \in [0,1]$ условиям

$$T(0,x) = 0, \tag{T1}$$
$$T(1,x) = x, \tag{T2}$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 3, с. 141—146.

$$T(x,y)=T(y,x), \tag{T3}$$

$$T\big(x,T(y,z)\big)=T(T(x,y),z), \tag{T4}$$

$$T(x,y)\leqslant T(x,z), \quad \text{если} \quad y\leqslant z. \tag{T5}$$

Частными случаями t-нормы являются функции

$$T(x,y)=\min(x,y), \quad T(x,y)=\max(x+y-1,0), \quad T(x,y)=xy.$$

Нечётким множеством A на универсуме U будем называть множество упорядоченных пар

$$A=\big\{\big(u,\mu_A(u)\big)\bigm| u\in U\big\},$$

где $\mu_A\colon U\to[0,1]$. Множество A составлено из элементов u из универсума U и соответствующих степеней принадлежности $\mu_A(u)$. Нечёткое множество A обычно отождествляется с его функцией принадлежности μ_A. Нечёткое множество A называется *нормальным*, если существует $u\in U$, для которого $\mu_A(u)=1$.

Далее в этой статье R будет означать коммутативное кольцо.

2. Аксиоматика нечётких модулей

Определение 2.1. Пусть A — (левый) модуль над кольцом R. Функция $\mu\colon A\to[0,1]$ есть *нечёткий R-подмодуль* A относительно t-нормы T тогда и только тогда, когда для любых $x,y\in A$ и для любого $\alpha\in R$

$$\mu(x+y)\geqslant T\big(\mu(x),\mu(y)\big), \tag{M1}$$

$$\mu(\alpha x)\geqslant\mu(x), \tag{M2}$$

$$\mu(0)=1. \tag{M3}$$

В следующих утверждениях устанавливаются свойства системы аксиом (M1)—(M3) для различных классов колец.

Предложение 2.1. *Если R — кольцо с единицей и t-норма T для всех $x\in[0,1]$ удовлетворяет условию*

$$T(x,x)=x, \tag{T6}$$

то условие (M2) *в определении* 2.1 *для любых $\alpha\in R$ эквивалентно условию*

$$\mu(\alpha x)=\mu(x). \tag{M2$'$}$$

Доказательство. Пусть выполняются условия (M1) и (M2), 1 — единица кольца R. Тогда

$$\mu(x)=\mu(\alpha x+(1-\alpha)x)\geqslant T\Big(\mu(\alpha x),\mu\big((1-\alpha)x\big)\Big)\geqslant$$
$$\geqslant T\Big(\mu(\alpha x),T\big(\mu(x),\mu(-\alpha x)\big)\Big)\geqslant T\Big(\mu(x),T\big(\mu(x),\mu(-\alpha x)\big)\Big).$$

Учитывая условия (T5) и (T6) для t-нормы T и снова применяя (M2), получаем

$$T\Big(\mu(x), T\big(\mu(x), \mu(-\alpha x)\big)\Big) = T\big(T\big(\mu(x), \mu(x)\big), \mu(-\alpha x)\big) = \\ = T\big(\mu(x), \mu(-\alpha x)\big) \geqslant T\big(\mu(x), \mu(\alpha x)\big).$$

Таким образом, имеем

$$\mu(x) = T\big(\mu(x), \mu(x)\big) \geqslant T\big(\mu(x), \mu(\alpha x)\big).$$

Пользуясь условием (T4), заключаем, что

$$\mu(x) \geqslant \mu(\alpha x). \tag{1}$$

Из (1) и условия (M2) следует (M2′). □

Предложение 2.2. *Если R — поле, то условие* (M2) *в определении* 2.1 *для любых $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$, эквивалентно условию* (M2′).

Доказательство. Пусть выполняется условие (M2). Если $\alpha \neq 0$, то, применяя (M2), получаем

$$\mu(\alpha x) \geqslant \mu(x) = \mu\left(\frac{1}{\alpha}(\alpha x)\right) \geqslant \mu(\alpha x).$$

Отсюда следует, что $\mu(\alpha x) = \mu(x)$, т. е. выполняется условие (M2′). □

Предложение 2.3. *Если нечёткое множество μ нормальное, то условие* (M3) *в определении* 2.1 *следует из условий* (M1) *и* (M2).

Доказательство. Пусть для нечёткого множества μ выполняются условия (M1) и (M2). Поскольку нечёткое множество μ нормальное, то существует такой элемент $x \in A$, что выполняется (1). Тогда, применяя для такого x условия (M1) и (M2), получаем

$$\mu(0) = \mu(x - x) \geqslant T\big(\mu(x), \mu(-x)\big) = T\big(1, \mu(-x)\big) = \mu(-x) \geqslant \mu(x) = 1.$$

Отсюда следует, что $\mu(0) = 1$. Таким образом, выполняется условие (M3). □

3. Свойства нечётких модулей

Предложение 3.1. *Если μ — нечёткий R-подмодуль A относительно t-нормы T, то $A_1 = \{x \mid x \in A,\ \mu(x) = 1\}$ есть подмодуль модуля A и μ есть нечёткий R-подмодуль A_1 относительно t-нормы T.*

Доказательство. Пусть $x, y \in A_1$, $\alpha \in R$. Тогда согласно условию (M1)

$$\mu(x + y) \geqslant T\big(\mu(x), \mu(y)\big) = T(1, 1) = 1.$$

Таким образом, $\mu(x+y) = 1$. Следовательно, $x+y \in A_1$. Согласно условию (M2) $\mu(\alpha x) \geqslant \mu(x) = 1$. Таким образом, имеем $\mu(\alpha x) = 1$. Отсюда следует, что $\alpha x \in A_1$. Наконец, согласно условию (M3) $\mu(0) = 1$. Следовательно, $0 \in A_1$. Таким образом, A_1 является подмодулем модуля A.

Вторая часть утверждения предложения 3.1 очевидна. □

Предложение 3.2. *Если для унитарного кольца R μ — нечёткий R-подмодуль A относительно t-нормы T, то μ — нечёткая подгруппа A относительно t-нормы T.*

Доказательство. Пусть $x \in A$. Тогда

$$\mu(-x) = \mu(-1 \cdot x) \geqslant \mu(x).$$

Таким образом, μ — нечёткая подгруппа A относительно t-нормы T. $\square$

Предложение 3.3. *Если μ — нечёткий R-подмодуль A относительно t-нормы* $\min$, *то для любых $\theta \in [0,1]$ $A_\theta = \{x \mid x \in A,\ \mu(x) \geqslant \theta\}$ есть подмодуль модуля A и μ есть нечёткий R-подмодуль A_θ относительно* $\min$.

Доказательство. Пусть $x, y \in A_1$, $\alpha \in R$. Тогда

$$\mu(x+y) \geqslant \min\bigl(\mu(x), \mu(y)\bigr) = \min(\theta, \theta) = \theta.$$

Таким образом, $\mu(x+y) \geqslant \theta$. Следовательно, $x + y \in A_\theta$. Имеем $\mu(\alpha x) \geqslant \mu(x) \geqslant \theta$, откуда заключаем, что $\alpha x \in A_\theta$. Наконец, из того, что $\mu(0) = 1 \geqslant \theta$, следует, что $0 \in A_\theta$. $\square$

Предложение 3.4. *Пусть $\mu\colon B \to \{0,1\}$ — характеристическая функция подмножества $B \subseteq A$, A — R-модуль. Тогда μ есть нечёткий R-подмодуль A относительно t-нормы T тогда и только тогда, когда B есть подмодуль модуля A.*

Доказательство. Пусть μ — нечёткий R-подмодуль A относительно T. Тогда согласно условию (M1) имеем для любых $x, y \in B$

$$\mu(x+y) \geqslant T\bigl(\mu(x), \mu(y)\bigr) = T(1,1).$$

Отсюда следует, что $x + y \in B$. Для любых $x \in B$, $\alpha \in R$ согласно (M2) $\mu(\alpha x) \geqslant \mu(x) = 1$. Следовательно, $\alpha x \in B$. Наконец, по условию (M3) $\mu(0) = 1$. Поэтому $0 \in B$. Таким образом, B — подмодуль модуля A.

Обратно, пусть B — подмодуль модуля A. Тогда для любых $x, y \in A$

$$\mu(x+y) \geqslant T\bigl(\mu(x), \mu(y)\bigr).$$

Действительно, для любых $x, y \in B$

$$\mu(x+y) = 1 \geqslant 1 = T(1,1) = T\bigl(\mu(x), \mu(y)\bigr).$$

Для любых $x \in B$ и $y \notin B$

$$T\bigl(\mu(x), \mu(y)\bigr) = T(1,0) = 0 \leqslant \mu(x+y).$$

Для любых $x \notin B$ и $y \in B$

$$T\bigl(\mu(x), \mu(y)\bigr) = T(0,1) = 0 \leqslant \mu(x+y).$$

Наконец, для любых $x, y \notin B$

$$T\bigl(\mu(x), \mu(y)\bigr) = T(0,0) = 0 \leqslant \mu(x+y).$$

Далее, для любых $x \in A$ и $\alpha \in R$ $\mu(\alpha x) \geqslant \mu(x)$. Действительно, для любых $x \in B$ имеет место $\alpha x \in B$, а следовательно, $\mu(\alpha x) = 1 \geqslant \mu(x)$, а для любых $x \notin B$ верно $\mu(x) = 0 \leqslant \mu(\alpha x)$.

Наконец, поскольку $0 \in B$, имеем $\mu(0) = 1$. Следовательно, μ — нечёткий R-подмодуль A относительно T. $\square$

4. Пересечение и прямое произведение нечётких модулей

Определение 4.1. Определим

$$T_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = T\big(x_i, T_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\big)$$

для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, $n \geqslant 2$, $T_2 = T$. Определим также

$$T_\infty(x_1, x_2, \ldots) = \lim_{n \to \infty} T_n(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Определение 4.2. *Пересечением* нечётких подмножеств μ_1 и μ_2 множества A относительно t-нормы T будем называть нечёткое подмножество $\mu = \mu_1 \cap \mu_2$ множества A, такое что для любых $x \in A$

$$\mu(x) = (\mu_1 \cap \mu_2)(x) = T\big(\mu_1(x), \mu_2(x)\big).$$

Пересечением семейства нечётких подмножеств $\{\mu_1, \mu_2, \ldots\}$ множества A относительно t-нормы T будем называть нечёткое подмножество $\bigcap\limits_T \mu_i$, такое что для любых $x \in A$

$$\Big(\bigcap_T \mu_i\Big)(x) = T_\infty(\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots).$$

Предложение 4.1. *Пересечение любого множества нечётких подмодулей R-модуля A есть нечёткий подмодуль этого модуля.*

Доказательство. Для любых $x, y \in A$ и любого $\alpha \in R$ имеем

$$\begin{aligned}
\Big(\bigcap_T \mu_i\Big)(x+y) &= T_\infty(\mu_1(x+y), \mu_2(x+y), \ldots) \geqslant \\
&\geqslant T_\infty\big(T\big(\mu_1(x), \mu_1(y)\big), T\big(\mu_2(x), \mu_2(y)\big), \ldots\big) = \\
&= T\big(T_\infty(\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots), T_\infty(\mu_1(y), \mu_2(y), \ldots)\big) = \\
&= T\bigg(\Big(\bigcap_T \mu_i\Big)(x), \Big(\bigcap_T \mu_i\Big)(y)\bigg);
\end{aligned}$$

$$\Big(\bigcap_T \mu_i\Big)(\alpha x) = T_\infty(\mu_1(\alpha x), \mu_2(\alpha x), \ldots) \geqslant T_\infty(\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots) = \Big(\bigcap_T \mu_i\Big)(x);$$

$$\Big(\bigcap_T \mu_i\Big)(0) = T_\infty(\mu_1(0), \mu_2(0), \ldots) = T_\infty(1, 1, \ldots) = 1.$$

Предложение 4.1 доказано. $\square$

Определение 4.3. Будем называть *прямым произведением* нечётких множеств $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$ относительно t-нормы T нечёткое подмножество $\mu = \prod_{i=1}^{n} \mu_i$, такое что

$$\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} \mu_i\right)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = T_n\big(\mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \ldots, \mu_n(x_n)\big).$$

Теорема 4.1. *Пусть $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ — семейство R-модулей и $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ — их прямое произведение. Пусть $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$ — нечёткие подмодули R-модулей $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ относительно t-нормы T. Тогда $\mu = \prod_{i=1}^{n} \mu_i$ является нечётким подмодулем R-модуля A относительно t-нормы T.*

Доказательство. Пусть $x, y \in A$,

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Пусть также $\alpha \in R$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mu(x+y) &= \mu(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) = \\
&= T_n\big(\mu_1(x_1+y_1), \mu_2(x_2+y_2), \ldots, \mu_n(x_n+y_n)\big) \geqslant \\
&\geqslant T_n\Big(T\big(\mu_1(x_1), \mu_1(y_1)\big), T\big(\mu_2(x_2), \mu_2(y_2)\big), \ldots, T\big(\mu_n(x_n), \mu_n(y_n)\big)\Big) = \\
&= T\Big(T_n\big(\mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \ldots, \mu_n(x_n)\big), T_n\big(\mu_1(y_1), \mu_2(y_2), \ldots, \mu_n(y_n)\big)\Big) = \\
&= T\big(\mu(x), \mu(y)\big), \\
\mu(\alpha x) &= \mu(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) = T_n\big(\mu_1(\alpha x_1), \mu_2(\alpha x_2), \ldots, \mu_n(\alpha x_n)\big) \geqslant \\
&\geqslant T_n\big(\mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \ldots, \mu_n(x_n)\big) = \mu(x), \\
\mu(0) &= \mu(0_1, 0_2, \ldots, 0_n) = T_n\big(\mu_1(0_1), \mu_2(0_2), \ldots, \mu_n(0_n)\big) = T_n(1, 1, \ldots, 1) = 1.
\end{aligned}$$

Следовательно, μ является нечётким подмодулем модуля A относительно T. □

Литература

[1] Abu Osman M. T. On the direct product of fuzzy subgroups // Fuzzy Sets and Systems. — 1984. — Vol. 12. — P. 87—91.

[2] Lu T., Gu W. Abelian fuzzy group and its properties // Fuzzy Sets and Systems. — 1993. — Vol. 64. — P. 415—420.

[3] Malik D. S., Mordeson J. N. Fuzzy direct sums of fuzzy rings // Fuzzy Sets and Systems. — 1992. — Vol. 45. — P. 83—91.

[4] Rosenfeld A. Fuzzy groups // J. Math. Anal. Appl. — 1971. — Vol. 35. — P. 512—517.

[5] Zadeh L. A. Fuzzy sets // Inform. Control. — 1965. — Vol. 8. — P. 338—353.

Статья поступила в редакцию в мае 2006 г.