

Нечёткие динамические системы, линейные над полями

С. Г. ПУШКОВ

*Бийский технологический институт (филиал)
Алтайского государственного технического университета
e-mail: psg@bti.secna.ru*

В. А. ТЫРЫШКИНА

*Бийский технологический институт (филиал)
Алтайского государственного технического университета
e-mail: djuka78@mail.ru*

УДК 519.95+681.51

Ключевые слова: нечёткое множество, нечёткая динамическая система, нечёткая линейность.

Аннотация

Исследуется проблема формализации способов описаний нечётких систем. Анализируется понятие нечёткой линейности для класса нечётких динамических систем. Рассматриваются некоторые свойства нечётких динамических систем, линейных над полями.

Abstract

S. G. Pushkov, V. A. Tyryshkina, Fuzzy linear dynamical systems over fields, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 3, pp. 147—155.

We investigate the problem of formalization of ways of describing fuzzy systems. A concept of fuzzy linearity for the class of dynamical systems is analyzed. Also we consider some properties of the fuzzy dynamical systems that are linear over fields.

1. Введение

В последнее время подход с использованием теории нечётких множеств [2, 6] всё чаще используется в качестве эффективного инструмента для анализа систем, в которых существенную роль играют сложность и неопределённость. Развиваются теории, посвящённые анализу нечётких систем конкретного типа, таких как нечёткие автоматы, нечёткие модели управления и принятия решений и т. п. [1]. В [4] была предпринята попытка объединить развиваемые в рамках этого подхода теории общей методологией, подобной той, которая разработана для обычных (нечётких) систем М. Месаровичем [3]. В [5] были введены свойство нечёткой линейности и на его основе класс *общих* нечётких линейных систем.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 3, с. 147—155.

© 2007 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

Настоящая работа посвящена анализу понятия нечёткой линейности для класса нечётких *динамических* систем. Изложение результатов данной работы ведётся на языке теории нечётких множеств, где нечёткое множество образуется путём введения обобщённого понятия принадлежности [6]. Нечёткая система рассматривается как нечёткое отношение на обычных (нечётких) множествах.

2. Линейность общих нечётких систем

Рассмотрим сначала класс общих нечётких систем. В [4] под общей нечёткой системой S понимается нечёткое отношение в декартовом произведении универсумов входных и выходных объектов системы A и B с функцией принадлежности

$$\mu_S: A \times B \rightarrow [0, 1].$$

Рассмотренное в [5] для этого класса систем понятие нечёткой линейности было основано на понятии нечёткого линейного отношения относительно треугольной нормы (t-нормы).

Определение 2.1. Пусть K — кольцо, $U_1, U_2, \dots, U_n$ — модули над кольцом K . Нечёткое отношение R в $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ с функцией принадлежности

$$\mu_R: U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow [0, 1]$$

будем называть *нечётким K -линейным отношением* относительно t-нормы T , если для любых $u_1, u'_1 \in U_1$, $u_2, u'_2 \in U_2, \dots$, $u_n, u'_n \in U_n$ и для любого $\lambda \in K$ выполняются условия

$$\mu_R(u_1 + u'_1, u_2 + u'_2, \dots, u_n + u'_n) \geq T(\mu_R(u_1, u_2, \dots, u_n), \mu_R(u'_1, u'_2, \dots, u'_n)), \quad (L1)$$

$$\mu_R(\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n) \geq \mu_R(u_1, u_2, \dots, u_n), \quad (L2)$$

$$\mu_R(0_1, 0_2, \dots, 0_n) = 1, \quad (L3)$$

где $0_1, 0_2, \dots, 0_n$ — нулевые элементы K -модулей $U_1, U_2, \dots, U_n$ соответственно.

С помощью понятия нечёткого отношения в [5] был определён класс нечётких линейных систем.

Определение 2.2. Пусть K — кольцо, A и B — модули над кольцом K . Нечёткую систему S будем называть *нечёткой K -линейной системой* относительно t-нормы T , если S является нечётким K -линейным отношением относительно T , т. е. для любых $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ и любого $\lambda \in K$ выполняются условия

$$\mu_S(a + a', b + b') \geq T(\mu_S(a, b), \mu_S(a', b')), \quad (SL1)$$

$$\mu_S(\lambda a, \lambda b) \geq \mu_S(a, b), \quad (SL2)$$

$$\mu_S(0_A, 0_B) = 1, \quad (SL3)$$

где 0_A и 0_B — нулевые элементы K -модулей A и B соответственно.

С помощью понятия нечёткой глобальной реакции в [5] были рассмотрены также представления общих нечётких линейных систем с использованием объекта глобальных состояний.

3. Нечёткие динамические системы

Рассмотрим теперь класс нечётких *динамических* систем. Аналогично классическому (нечёткому) случаю [3] нечёткая динамика определяется парой отображений, характеризующих изменение состояний системы и её реакцию. Введём следующее определение нечёткой динамической системы.

Определение 3.1. *Нечёткой динамической системой* (с дискретным временем) будем называть объект $S = (U, X, Y, \varphi, \eta)$, где φ и η определяют нечёткие отношения, $\varphi = X \times U \times X \rightarrow [0, 1]$, $\eta = X \times U \times Y \rightarrow [0, 1]$, U, X, Y — (нечёткие) объекты входных сигналов, состояний и выходных сигналов соответственно. Динамическое поведение системы S определяется следующими соотношениями:

$$\mu_{X(t+1)}(x) = \max_{x' \in X, u \in U} \min(\mu_{X(t)}(x'), \mu_{U(t)}(u), \varphi(x', u, x)), \quad (\text{DS1})$$

$$\mu_{Y(t)}(y) = \max_{x \in X, u \in U} \min(\mu_{X(t)}(x), \mu_{U(t)}(u), \varphi(x, u, y)), \quad (\text{DS2})$$

$$X(0) \in F(X), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Для данного класса систем с использованием понятия нечёткого линейного отношения введём понятие нечёткой *линейной* динамической системы.

Определение 3.2. Пусть K — поле, U, X, Y — линейные пространства над полем K . Нечёткую динамическую систему S , определённую согласно определению 3.1, будем называть *нечёткой K -линейной динамической системой*, если φ и η определяют нечёткие K -линейные отношения, т. е. для любых $x, x', \hat{x}, \hat{x}' \in X$, $u, u' \in U$, $y, y' \in Y$ и любого $\lambda \in K$ выполняются условия

$$\varphi(x + x', u + u', \hat{x} + \hat{x}') \geq \min(\varphi(x, u, \hat{x}), \varphi(x', u', \hat{x}')), \quad (\text{DL1})$$

$$\varphi(\lambda x, \lambda u, \lambda \hat{x}) \geq \varphi(x, u, \hat{x}), \quad (\text{DL2})$$

$$\varphi(0_X, 0_U, 0_X) = 1, \quad (\text{DL3})$$

и

$$\eta(x + x', u + u', y + y') \geq \min(\eta(x, u, y), \eta(x', u', y')), \quad (\text{DL1}')$$

$$\eta(\lambda x, \lambda u, \lambda y) \geq \eta(x, u, y), \quad (\text{DL2}')$$

$$\eta(0_X, 0_U, 0_Y) = 1, \quad (\text{DL3}')$$

где $0_X, 0_U, 0_Y$ — нулевые элементы пространств U, X, Y соответственно.

Для нечётких динамических систем, линейных над полями, можно доказать следующую теорему. Аналог этого результата для обычных (нечётких) систем играет фундаментальную роль в теории систем [3].

Теорема 3.1. Пусть U, X, Y — линейные пространства над полем K . Нечёткая динамическая система S с отношениями

$$\varphi: X \times U \times X \rightarrow [0, 1], \quad \eta: X \times U \times Y \rightarrow [0, 1]$$

является K -линейной, если существуют две пары нечётких K -линейных отношений

$$\begin{aligned} \varphi_1: X \times X &\rightarrow [0, 1], & \varphi_2: U \times X &\rightarrow [0, 1], \\ \eta_1: X \times Y &\rightarrow [0, 1], & \eta_2: U \times Y &\rightarrow [0, 1], \end{aligned}$$

такие что для всех $x, \hat{x} \in X, u \in U, y \in Y$ выполняются равенства

$$\varphi(x, u, \hat{x}) = \max_{x' \in X} \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')), \quad (\text{LD1})$$

$$\eta(x, u, y) = \max_{y' \in Y} \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')). \quad (\text{LD1}')$$

Доказательство. Пусть для системы S выполняются условия теоремы 3.1. Тогда для любых $x_1, \hat{x}_1 \in X, u_1 \in U$ выполнено равенство

$$\varphi(x_1, u_1, \hat{x}_1) = \max_{x'_1 \in X} \min(\varphi_1(x_1, x'_1), \varphi_2(u_1, \hat{x}_1 - x'_1)).$$

Отсюда следует, что существует $\hat{x}'_1 \in X$, для которого

$$\varphi(x_1, u_1, \hat{x}_1) = \min(\varphi_1(x_1, \hat{x}'_1), \varphi_2(u_1, \hat{x}_1 - \hat{x}'_1)).$$

Аналогично для любых $x_2, \hat{x}_2 \in X, u_2 \in U$ выполнено равенство

$$\varphi(x_2, u_2, \hat{x}_2) = \max_{x'_2 \in X} \min(\varphi_1(x_2, x'_2), \varphi_2(u_2, \hat{x}_2 - x'_2)).$$

Отсюда следует, что существует $\hat{x}'_2 \in X$, для которого

$$\varphi(x_2, u_2, \hat{x}_2) = \min(\varphi_1(x_2, \hat{x}'_2), \varphi_2(u_2, \hat{x}_2 - \hat{x}'_2)).$$

Тогда с учётом (LD1), а также K -линейности φ_1 и φ_2 имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x_1 + x_2, u_1 + u_2, \hat{x}_1 + \hat{x}_2) &= \\ &= \max_{x' \in X} \min(\varphi_1(x_1 + x_2, x'), \varphi_2(u_1 + u_2, \hat{x}_1 + \hat{x}_2 - x')) \geq \\ &\geq \min(\varphi_1(x_1 + x_2, \hat{x}'_1 + \hat{x}'_2), \varphi_2(u_1 + u_2, \hat{x}_1 + \hat{x}_2 - \hat{x}'_1 - \hat{x}'_2)) \geq \\ &\geq \min(\min(\varphi_1(x_1, \hat{x}'_1), \varphi_1(x_2, \hat{x}'_2)), \min(\varphi_2(u_1, \hat{x}_1 - \hat{x}'_1), \varphi_2(u_2, \hat{x}_2 - \hat{x}'_2))) = \\ &= \min(\min(\varphi_1(x_1, \hat{x}'_1), \varphi_2(u_1, \hat{x}_1 - \hat{x}'_1)), \min(\varphi_1(x_2, \hat{x}'_2), \varphi_2(u_2, \hat{x}_2 - \hat{x}'_2))) = \\ &= \min(\varphi(x_1, u_1, \hat{x}_1), \varphi(x_2, u_2, \hat{x}_2)); \\ \varphi(\lambda x_1, \lambda u_1, \lambda \hat{x}_1) &= \max_{x' \in X} \min(\varphi_1(\lambda x_1, x'), \varphi_2(\lambda u_1, \lambda \hat{x}_1 - x')) \geq \\ &\geq \min(\varphi_1(\lambda x_1, \lambda \hat{x}'_1), \varphi_2(\lambda u_1, \lambda \hat{x}_1 - \lambda \hat{x}'_1)) \geq \\ &\geq \min(\varphi_1(x_1, \hat{x}'_1), \varphi_2(u_1, \hat{x}_1 - \hat{x}'_1)) = \varphi(x_1, u_1, \hat{x}_1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(0_x, 0_u, 0_{\hat{x}}) &= \max_{x' \in X} \min(\varphi_1(0_x, x'), \varphi_2(0_u, 0_{\hat{x}} - x')) \geq \\
&\geq \min(\varphi_1(0_x, 0_{\hat{x}}), \varphi_2(0_u, 0_{\hat{x}} - \hat{x}_1')) \geq \\
&\geq \min(\varphi_1(0_x, 0_{\hat{x}}), \varphi_2(0_u, 0_{\hat{x}})) = \min(1, 1) = 1.
\end{aligned}$$

Согласно условиям теоремы для любых $x_1 \in X$, $u_1 \in U$, $y_1 \in Y$ выполняется

$$\eta(x_1, u_1, y_1) = \max_{y'_1 \in Y} \min(\eta_1(x_1, y'_1), \eta_2(u_1, y_1 - y'_1)).$$

Отсюда следует, что существует $\hat{y}_1 \in Y$, для которого

$$\eta(x_1, u_1, y_1) = \min(\eta_1(x_1, \hat{y}_1), \eta_2(u_1, y_1 - \hat{y}_1)).$$

Аналогично, для любых $x_2 \in X$, $u_2 \in U$, $y_2 \in Y$ выполняется

$$\eta(x_2, u_2, y_2) = \max_{y'_2 \in Y} \min(\eta_1(x_2, y'_2), \eta_2(u_2, y_2 - y'_2)).$$

Отсюда следует, что существует $\hat{y}_2 \in Y$, для которого

$$\eta(x_2, u_2, y_2) = \min(\eta_1(x_2, \hat{y}_2), \eta_2(u_2, y_2 - \hat{y}_2)).$$

Тогда с учётом (LD1'), а также K -линейности η_1 и η_2 имеем

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1 + x_2, u_1 + u_2, y_1 + y_2) &= \\
&= \max_{y' \in Y} \min(\eta_1(x_1 + x_2, y'), \eta_2(u_1 + u_2, y_1 + y_2 - y')) \geq \\
&\geq \min(\eta_1(x_1 + x_2, \hat{y}_1 + \hat{y}_2), \eta_2(u_1 + u_2, y_1 + y_2 - \hat{y}_1 - \hat{y}_2)) \geq \\
&\geq \min(\min(\eta_1(x_1, \hat{y}_1), \eta_1(x_2, \hat{y}_2)), \min(\eta_2(u_1, y_1 - \hat{y}_1), \eta_2(u_2, y_2 - \hat{y}_2))) = \\
&= \min(\min(\eta_1(x_1, \hat{y}_1), \eta_2(u_1, y_1 - \hat{y}_1)), \min(\eta_1(x_2, \hat{y}_2), \eta_2(u_2, y_2 - \hat{y}_2))) = \\
&= \min(\eta(x_1, u_1, y_1), \eta(x_2, u_2, y_2)); \\
\eta(\lambda x_1, \lambda u_1, \lambda y_1) &= \max_{y' \in Y} \min(\eta_1(\lambda x_1, y'), \eta_2(\lambda u_1, \lambda y_1 - y')) \geq \\
&\geq \min(\eta_1(\lambda x_1, \lambda \hat{y}_1), \eta_2(\lambda u_1, \lambda y_1 - \lambda \hat{y}_1)) \geq \\
&\geq \min(\eta_1(x_1, \hat{y}_1), \eta_2(u_1, y_1 - \hat{y}_1)) = \eta(x_1, u_1, y_1); \\
\eta(0_x, 0_u, 0_y) &= \max_{y' \in Y} \min(\eta_1(0_x, y'), \eta_2(0_u, 0_y - y')) \geq \\
&\geq \min(\eta_1(0_x, 0_y), \eta_2(0_u, 0_y - \hat{y}_1)) \geq \\
&\geq \min(\eta_1(0_x, 0_y), \eta_2(0_u, 0_y)) = \min(1, 1) = 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, нечёткая система S является линейной. $\square$

Замечание 3.1. Теорема 3.1 верна и в тех случаях, когда в качестве условий (LD1) и (LD1') используются следующие пары условий:

$$(\exists x' \in X) \varphi(x, u, \hat{x}) = \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')); \quad (\text{LD2})$$

$$(\exists y' \in Y) \eta(x, u, y) = \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')); \quad (\text{LD2}')$$

$$\max_{x' \in X} \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')) \geq \varphi(x, u, \hat{x}); \quad (\text{LD3})$$

$$\max_{y' \in Y} \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')) \geq \eta(x, u, y); \quad (\text{LD3}')$$

$$(\exists x' \in X) \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')) \geq \varphi(x, u, \hat{x}); \quad (\text{LD4})$$

$$(\exists y' \in Y) \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')) \geq \eta(x, u, y); \quad (\text{LD4}')$$

$$\varphi(x, u, \hat{x}) > 0 \iff (\exists x' \in X) \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')) > 0; \quad (\text{LD5})$$

$$\eta(x, u, y) > 0 \iff (\exists y' \in Y) \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')) > 0; \quad (\text{LD5}')$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, u, \hat{x}) \geq \delta &\iff (\exists x' \in X) \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')) \geq \delta, \\ \text{где } \delta > 0; \end{aligned} \quad (\text{LD6})$$

$$\begin{aligned} \eta(x, u, y) \geq \delta &\iff (\exists y' \in Y) \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')) \geq \delta, \\ \text{где } \delta > 0. \end{aligned} \quad (\text{LD6}')$$

Следующие предложения устанавливают связь между приведёнными условиями (LD1)–(LD6').

Предложение 3.1. Для заданной нечёткой динамической системы S пары условий (LD3), (LD3') и (LD4), (LD4') эквивалентны.

Доказательство. Очевидно, что (LD3) $\implies$ (LD4), (LD3') $\implies$ (LD4'). Докажем, что (LD4) $\implies$ (LD3), (LD4') $\implies$ (LD3').

Пусть выполняется (LD4), т. е.

$$(\exists x' \in X) \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')) \geq \varphi(x, u, \hat{x}).$$

Тогда

$$\max_{x' \in X} \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')) \geq \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')) \geq \varphi(x, u, \hat{x}).$$

Таким образом,

$$\max_{x' \in X} \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')) \geq \varphi(x, u, \hat{x}),$$

а это есть условие (LD3).

Пусть выполняется (LD4'), т. е.

$$(\exists y' \in Y) \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')) \geq \eta(x, u, y).$$

Тогда

$$\max_{y' \in Y} \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')) \geq \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')) \geq \eta(x, u, y).$$

Таким образом,

$$\max_{y' \in Y} \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')) \geq \eta(x, u, y),$$

а это есть условие (LD3'). □

Предложение 3.2. Если для заданной нечёткой динамической системы S выполняется пара условий (LD2), (LD2'), то также выполняются пары условий (LD3), (LD3') и (LD4), (LD4').

Доказательство. Пусть выполняется условие (LD2), т. е.

$$(\exists x' \in X) \varphi(x, u, \hat{x}) = \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')).$$

Тогда

$$\max_{x' \in X} \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')) \geq \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')) \geq \varphi(x, u, \hat{x}).$$

Следовательно,

$$\max_{x' \in X} \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')) \geq \varphi(x, u, \hat{x}),$$

т. е. выполняется условие (LD3). С учётом предложения 3.1 отсюда следует, что выполняется условие (LD4).

Теперь пусть выполняется условие (LD2'), т. е.

$$(\exists y' \in Y) \eta(x, u, y) = \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')).$$

Тогда

$$\max_{y' \in Y} \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')) \geq \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')) \geq \eta(x, u, y).$$

Следовательно,

$$\max_{y' \in Y} \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')) \geq \eta(x, u, y),$$

т. е. выполняется условие (LD3'). С учётом предложения 3.1 отсюда следует, что выполняется также условие (LD4'). $\square$

Предложение 3.3. Если для заданной нечёткой динамической системы S выполняются пары условий (LD1), (LD1'), то также выполняются пары условий (LD2), (LD2')—(LD6), (LD6').

Доказательство. Очевидно, что (LD1) $\implies$ (LD2), (LD1') $\implies$ (LD2'). Отсюда, учитывая предложение (3.2), можно заключить, что (LD1) $\implies$ (LD3), (LD1') $\implies$ (LD3') и (LD1) $\implies$ (LD4), (LD1') $\implies$ (LD4').

Докажем, что (LD1) $\implies$ (LD5). Пусть

$$\max_{x' \in X} \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')) = \varphi(x, u, \hat{x}).$$

Предположим, что $\varphi(x, u, \hat{x}) > 0$. Тогда

$$\max_{x' \in X} \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')) = \varphi(x, u, \hat{x}) > 0.$$

Отсюда следует, что

$$(\exists x' \in X) \varphi(x, u, \hat{x}) = \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')) > 0.$$

Обратно, предположим, что

$$(\exists x'' \in X) \varphi(x, u, \hat{x}) = \min(\varphi_1(x, x''), \varphi_2(u, \hat{x} - x'')) > 0.$$

Тогда

$$\varphi(x, u, \hat{x}) = \max_{x' \in X} \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')) \geq \min(\varphi_1(x, x''), \varphi_2(u, \hat{x} - x'')) > 0.$$

Таким образом, условие (LD5) выполняется.

Докажем, что (LD1') $\implies$ (LD5'). Пусть

$$\max_{y' \in Y} \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')) = \eta(x, u, y).$$

Предположим, что $\eta(x, u, y) > 0$. Тогда

$$\max_{y' \in Y} \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')) = \eta(x, u, y) > 0.$$

Отсюда следует, что

$$(\exists y' \in Y) \eta(x, u, y) = \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')) > 0.$$

Обратно, предположим, что

$$(\exists y'' \in Y) \eta(x, u, y) = \min(\eta_1(x, y''), \eta_2(u, y - y'')) > 0.$$

Тогда

$$\eta(x, u, y) = \max_{y' \in Y} \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')) \geq \min(\eta_1(x, y''), \eta_2(u, y - y'')) > 0.$$

Таким образом, условие (LD5') выполняется.

Докажем, что (LD1) $\implies$ (LD6). Пусть

$$\varphi(x, u, \hat{x}) = \max_{x' \in X} \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')).$$

Предположим, что $\varphi(x, u, \hat{x}) \geq \delta$. Тогда

$$\max_{x' \in X} \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')) = \varphi(x, u, \hat{x}) \geq \delta.$$

Отсюда следует, что

$$(\exists x' \in X) \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')) \geq \delta.$$

Обратно, предположим, что

$$(\exists x'' \in X) \min(\varphi_1(x, x''), \varphi_2(u, \hat{x} - x'')) \geq \delta.$$

Тогда

$$\varphi(x, u, \hat{x}) = \max_{x' \in X} \min(\varphi_1(x, x'), \varphi_2(u, \hat{x} - x')) \geq \min(\varphi_1(x, x''), \varphi_2(u, \hat{x} - x'')) \geq \delta.$$

Таким образом, условие (LD6) выполняется.

Докажем, что (LD1') $\implies$ (LD6'). Пусть

$$\eta(x, u, y) = \max_{y' \in Y} \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')).$$

Предположим, что $\eta(x, u, y) \geq \delta$. Тогда

$$\max_{y' \in Y} \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')) = \eta(x, u, y) \geq \delta.$$

Отсюда следует, что

$$(\exists y' \in Y) \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')) \geq \delta.$$

Обратно, предположим, что

$$(\exists y'' \in Y) \min(\eta_1(x, y''), \eta_2(u, y - y'')) \geq \delta.$$

Тогда

$$\eta(x, u, y) = \max_{y' \in Y} \min(\eta_1(x, y'), \eta_2(u, y - y')) \geq \min(\eta_1(x, y''), \eta_2(u, y - y'')) \geq \delta.$$

Таким образом, условие (LD6') выполняется. $\square$

Результаты предложений 3.1–3.3 можно представить в виде диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & & \text{(LD1), (LD1')} \\ & & \downarrow \\ \text{(LD2), (LD2')} & \text{(LD5), (LD5')} & \text{(LD6), (LD6')} \\ \downarrow & & \\ \text{(LD3), (LD3')} & \longleftrightarrow & \text{(LD4), (LD4')} \end{array}$$

где стрелки указывают направления от более сильных условий к менее сильным.

Замечание 3.2. Все введённые здесь понятия, а также теорему 3.1 можно обобщить также на случай, когда вместо функции $\min$ используется любая треугольная норма (t-норма).

Литература

- [1] Аверкин А. Н., Батыршин И. З., Блишун А. Ф. и др. Нечёткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. — М.: Наука, 1986.
- [2] Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближённых решений. — М.: Мир, 1976.
- [3] Месарович М., Такаха Я. Общая теория систем: математические основы. — М.: Мир, 1978.
- [4] Пушков С. Г. Об общей теории нечётких систем: глобальные состояния и нечёткая глобальная реакция нечёткой системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2001. — № 5. — С. 105–109.
- [5] Пушков С. Г. К общей теории нечётких систем: глобальные состояния, условия согласованности и линейность // Вестн. Томского гос. ун-та. — 2002. — № 1. — С. 169–174.
- [6] Zadeh L. A. Fuzzy sets // Inform. Control. — 1965. — Vol. 8. — P. 338–353.

Статья поступила в редакцию в мае 2006 г.

