Строго сервантно корректные абелевы группы без кручения

С. К. РОСОШЕК
Томский государственный университет
e-mail: rososhek@list.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа без кручения, сервантно корректная группа, кольцо целочисленных многочленов, периодический модуль, полиномиальная периодичность, полиномиальная расщепляемость, векторная группа.

Аннотация

В работе вводятся и изучаются понятия полиномиально периодических и полиномиально расщепляемых абелевых групп, рассматриваемых как модули над кольцом целочисленных многочленов. Посредством этих понятий получено описание строго сервантно корректных полиномиально расщепляемых векторных групп.

Abstract

S. K. Rososhek, Strictly purely correct torsion-free Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 3, pp. 165—183.

In this paper, the concepts of polynomially periodic and polynomially split abelian groups are introduced and studied. These groups are considered as modules over the ring of integral polynomials. By using these concepts, a description of strictly purely correct polynomially split vector groups is obtained.

Введение

Теоретико-множественная теорема Кантора—Шрёдера—Бернштейна послужила источником постановки аналогичных задач в различных областях математики. Так, например, в топологии известна задача Борсука [1, с. 20—21]: для каких топологических пространств X и Y из того, что X и Y гомеоморфны ретрактам один другого, следует гомеоморфизм X и Y? Хотя имеются примеры отрицательного решения этой задачи (X — треугольник, Y — два треугольника, имеющие единственную общую вершину), представляет интерес изучение таких классов топологических пространств, для которых задача Борсука имеет положительное решение. Такие пространства вводятся в [7, с. 1087].

Известны подобные задачи и в алгебре. В [8] изучается теоретико-кольцевой, а в [11] — теоретико-категорный аналоги теоремы Кантора—Шрёдера—Бернштейна. Для абелевых групп известным аналогом этой теоремы является первая тестовая проблема Капланского: будут ли изоморфны абелевы группы G

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 3, с. 165—183.

и H, если каждая из них изоморфна прямому слагаемому другой? В [9, 10] были построены примеры групп, для которых эта проблема имеет отрицательное решение. Заметим, что существует взаимосвязь между задачей Борсука и первой тестовой проблемой Капланского. А именно, если топологические пространства X и Y гомеоморфны ретрактам одно другого, то их группы гомологий (когомологий) изоморфны прямым слагаемым одна другой.

Рассмотрим обобщение первой тестовой проблемы Капланского на сервантные подгруппы, а именно для каких абелевых групп G и H из их изоморфизма сервантным подгруппам друг друга следует изоморфизм G и H? Для систематического изучения этой задачи зафиксируем одну из двух групп. Тогда приходим к следующему определению.

Назовём абелеву группу G сервантно корректной, если для любой абелевой группы H из того, что G и H изоморфны сервантным подгруппам друг друга, следует изоморфизм G и H.

Важным частным случаем сервантно корректной группы является следующее понятие.

Назовём абелеву группу G строго сервантно корректной, если G не содержит собственных сервантных подгрупп, изоморфных группе G.

Очевидно, что любая строго сервантно корректная группа является сервантно корректной. С другой стороны, легко построить пример сервантно корректной, но не строго сервантно корректной группы: достаточно взять свободную абелеву группу бесконечного ранга.

Цель данной работы — изучение сервантно корректных и строго сервантно корректных абелевых групп. В разделах 1 и 2 при рассмотрении данной проблемы в классе групп без кручения вводятся полиномиально периодические и полиномиально расщепляемые группы, посредством которых удаётся продвинуться в изучении сервантно корректных групп. В разделе 3 для векторных групп доказано, что из строгой сервантной корректности группы G следует её полиномиальная периодичность тогда и только тогда, когда G полиномиально расщепляема. Отсюда следует, что для векторной группы G её полиномиальная периодичность равносильна строгой сервантной корректности тогда и только тогда, когда G полиномиально расщепляема. В дальнейшем под группой понимается абелева группа без кручения, если не оговорено противное.

1. Полиномиально периодические абелевы группы без кручения

Определение 1.1. Пусть G — группа, α — эндоморфизм группы G. Назовём α-модулем на группе G модуль над кольцом целочисленных многочленов $\mathbb{Z}[X]$, аддитивная группа которого есть G, а модульная структура задана следующим образом: для любого $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ и для любого $g \in G$

$$f(X) \cdot g = \big(f(\alpha)\big)(g).$$

Будем обозначать α-модуль на группе G через ${}^{\alpha}G$. Очевидно, что для произвольных эндоморфизмов α и β группы G модули ${}^{\alpha}G$ и ${}^{\beta}G$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует автоморфизм φ группы G, такой что $\varphi^{-1}\alpha\varphi = \beta$. Отсюда следует, что если кольцо эндоморфизмов $\mathrm{E}(G)$ группы G коммутативно, то для любых $\alpha, \beta \in \mathrm{E}(G)$ имеем ${}^{\alpha}G \cong {}^{\beta}G$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta$.

Напомним, что модуль M над областью целостности R называется периодическим, если для любого $m \in M$ существует элемент $0 \neq r \in R$, такой что $rm = 0$, и ограниченным, если существует ненулевой идеал I кольца R, такой что $IM = 0$.

Пусть α — эндоморфизм группы G, задаваемый как умножение на рациональное число $\frac{m}{n}$. Тогда назовём α-модуль ${}^{\alpha}G$ скалярным. Заметим, что скалярный модуль ${}^{\alpha}G$ является периодическим и ограниченным $\mathbb{Z}[X]$-модулем. С другой стороны, если ${}^{\alpha}G$ является периодическим и ограниченным $\mathbb{Z}[X]$-модулем, то он не обязан быть скалярным модулем.

Пример 1.2. Пусть $G = A \oplus B$ и π — проекция группы G на A. Непосредственно проверяется, что идеал $(X^2 - X)$ кольца $\mathbb{Z}[X]$ является аннулятором модуля ${}^{\pi}G$.

Определение 1.3. Для произвольного модуля ${}^{\alpha}G$, где $\alpha \in \mathrm{E}(G)$, определим

$$\operatorname{tor}({}^{\alpha}G) = \bigl\{g \in G \bigm| \exists f(X) \in \mathbb{Z}[X],\ f(X) \neq 0,\ \bigl(f(\alpha)\bigr)(g) = 0\bigr\}$$

и

$$\operatorname{Tor} G = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{E}(G)} \operatorname{tor}({}^{\alpha}G).$$

Легко видеть, что $\operatorname{tor}({}^{\alpha}G)$ является инвариантным сервантным подмодулем модуля ${}^{\alpha}G$ и $\operatorname{Tor} G$ есть сервантная подгруппа группы G.

Определение 1.4. Назовём группу G полиномиально периодической, если $\operatorname{Tor} G = G$.

Пример 1.5. Пусть G — жёсткая группа, т. е. $\mathrm{E}(G)$ изоморфно подкольцу поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел [6, с. 148]. Поскольку в этом случае для любого $\alpha \in \mathrm{E}(G)$ модуль ${}^{\alpha}G$ является скалярным, то ${}^{\alpha}G$ есть периодический $\mathbb{Z}[X]$-модуль и тогда $\operatorname{tor}({}^{\alpha}G) = G$, следовательно, $\operatorname{Tor} G = G$.

Лемма 1.6. *Любая группа G конечного ранга есть полиномиально периодическая группа.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $0 \neq a \in G$, и пусть $\mathrm{r}(G) = n$. Возможны два случая.

Случай 1. Пусть для некоторого элемента $0 \neq \alpha \in \mathrm{E}(G)$ существует такое натуральное число i, что $\alpha^i(a) = 0$. Тогда ненулевой многочлен X^i аннулирует элемент a модуля ${}^{\alpha}G$ и, следовательно, $a \in \operatorname{tor}({}^{\alpha}G)$.

Случай 2. Пусть элемент $0 \neq \alpha \in \mathrm{E}(G)$ такой, что для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется $\alpha^i(a) \neq 0$. Из конечности ранга группы G ($\mathrm{r}(G) = n$) следует, что множество $a, \alpha(a), \ldots, \alpha^{n-1}(a), \alpha^n(a)$ ненулевых элементов группы G линейно зависимо. Тогда существуют целые числа $k_0^{(a)}, k_1^{(a)}, \ldots, k_n^{(a)}$, не все равные нулю одновременно, такие что имеет место равенство

$$k_0^{(a)} + k_1^{(a)}\alpha(a) + \ldots + k_n^{(a)}\alpha^n(a) = 0. \tag{1}$$

Так как G — группа без кручения, то по меньшей мере два из коэффициентов $k_i^{(a)}$ в (1) отличны от нуля. Тогда существует целочисленный многочлен

$$f^{(a)}(X) = k_0^{(a)} + k_{i_1}^{(a)} X^{i_1} + \ldots + k_{i_r}^{(a)} X^{i_r}$$

по меньшей мере первой степени, для которого $f^{(a)}(X) \cdot a = 0$ в модуле ${}^{\alpha}G$. Следовательно, $a \in \mathrm{tor}({}^{\alpha}G)$.

Таким образом, для любого $\alpha \in \mathrm{E}(G)$ имеем $a \in \mathrm{tor}({}^{\alpha}G)$, тогда $a \in \mathrm{Tor}\, G$. Следовательно, $G = \mathrm{Tor}\, G$. □

Лемма 1.7. *Если G — полиномиально периодическая группа, то G строго сервантно корректна.*

Доказательство. Пусть α — такой произвольный эндоморфизм группы G, что α — мономорфизм и $\mathrm{Im}\,\alpha$ — сервантная подгруппа группы G, изоморфная группе G. Покажем, что $\mathrm{Im}\,\alpha = G$.

Пусть существует элемент $g \in G \setminus \mathrm{Im}\,\alpha$, тогда, поскольку по условию ${}^{\alpha}G$ — периодический модуль, существует элемент $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$, такой что $f(X) \cdot g = 0$. Если $f(X) = n_0 + n_1 X + \ldots + n_k X^k$, то возможны два случая.

Случай 1. $n_0 \neq 0$. Тогда

$$n_0 g + n_1\alpha(g) + \ldots + n_k\alpha^k(g) = 0,$$

причём хотя бы один из коэффициентов $n_1, n_2, \ldots, n_k$ отличен от нуля, так как G — группа без кручения. Отсюда

$$0 \neq n_0 g = -n_1\alpha(g) - \ldots - n_k\alpha^k(g) \in \mathrm{Im}\,\alpha.$$

Поскольку $\mathrm{Im}\,\alpha$ — сервантная подгруппа группы G без кручения, то из $n_0 g \in \in \mathrm{Im}\,\alpha$ следует, что $g \in \mathrm{Im}\,\alpha$, противоречие.

Случай 2. $n_0 = 0$. Пусть n_i — первый ненулевой коэффициент, т. е. $f(X) = = n_i X^i + \ldots + n_k X^k$. Тогда

$$f(X) = X^i(n_i + n_{i+1}X + \ldots + n_k X^{k-i}),$$

следовательно,

$$0 = f(X)g = [\alpha^i(n_i + n_{i+1}\alpha + \ldots + n_k\alpha^{k-i})](g) = \\ = \alpha^i\big(n_i g + n_{i+1}\alpha(g) + \ldots + n_k\alpha^{k-i}(g)\big).$$

Так как α — мономорфизм, имеем

$$n_i g + n_{i+1}\alpha(g) + \ldots + n_k\alpha^{k-i}(g) = 0,$$

т. е. случай 2 сводится к случаю 1. □

Обратное утверждение неверно.

Пример 1.8. Пусть J_p — аддитивная группа целых p-адических чисел. Известно, что кольцо эндоморфизмов $\mathrm{E}(J_p)$ группы J_p изоморфно кольцу $\mathbb{Q}_p^*$ целых p-адических чисел [6, с. 256]. Так как J_p есть $\mathbb{Q}_p^*$-модуль без кручения, то для любого ненулевого эндоморфизма α группы J_p имеем, что из $\alpha(g) = 0$ следует $g = 0$, т. е. α — мономорфизм.

Пусть $\alpha \in \mathrm{E}(J_p)$ — умножение на целое p-адическое число π. Если π является алгебраическим числом, то существует целочисленный многочлен $f(X) = k_0 + k_1 X + \ldots + k_n X^n$, такой что $f(\pi) = 0$. Тогда ${}^{\alpha}(J_p)$ — периодический $\mathbb{Z}[X]$-модуль и $\operatorname{tor}\bigl({}^{\alpha}(J_p)\bigr) = J_p$.

Если π является трансцендентным числом, то любой целочисленный многочлен от π — это некоторое ненулевое целое p-адическое число. Тогда $\operatorname{tor}\bigl({}^{\alpha}(J_p)\bigr) = 0$.

Заметим, что существование трансцендентных целых p-адических чисел следует из существования континуума p-адических чисел, которые алгебраически независимы над полем рациональных чисел, а также из того, что некоторая степень p-адического числа есть целое p-адическое число.

Таким образом, существует эндоморфизм α группы J_p, для которого $\operatorname{tor}\bigl({}^{\alpha}(J_p)\bigr) = 0$. Следовательно,

$$\operatorname{Tor} J_p = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{E}(J_p)} \operatorname{tor}\bigl({}^{\alpha}(J_p)\bigr) = 0,$$

т. е. J_p не является полиномиально периодической группой.

С другой стороны, J_p есть строго сервантно корректная группа. Действительно, пусть A — сервантная подгруппа группы J_p, такая что $A \neq J_p$. Тогда из алгебраической компактности группы J_p следует, что A есть прямое слагаемое группы J_p, что противоречит неразложимости группы J_p.

Тем не менее для некоторых классов абелевых групп без кручения понятия строгой сервантной корректности и полиномиальной периодичности оказываются равносильными. В частности, это имеет место для групп конечного ранга и жёстких групп, как следствие утверждений, приведённых выше. Теорема 1.9 устанавливает равносильность этих понятий и для вполне разложимых групп.

Пусть G — вполне разложимая абелева группа без кручения, и пусть

$$G = \bigoplus_{i \in I} G_i \text{ —} \tag{2}$$

фиксированное разложение группы G в прямую сумму групп G_i ранга 1 без кручения. Обозначим через $\Omega(G)$ множество всех различных типов прямых слагаемых G_i ранга 1 из разложения (2), через $G^{(t)}$ — однородную компоненту группы G типа $t \in \Omega(G)$, которая является прямой суммой всех тех прямых слагаемых G_i из разложения (2), которые имеют тип t, и через $r(t)$ — мощность множества прямых слагаемых G_i типа t из разложения (2), т. е. имеем

$$G^{(t)} = \bigoplus_{i \in I^{(t)}} G_i,$$

где G_i для $i \in I^{(t)}$ есть прямые слагаемые ранга 1 и типа t из разложения (2), $I = \bigcup\limits_{t\in\Omega(G)} I^{(t)}$ и $|I^{(t)}| = r(t)$ для любого $t \in \Omega(G)$.

Используем эти обозначения в следующей теореме.

Теорема 1.9. *Пусть G — вполне разложимая группа, тогда следующие утверждения равносильны*:

а) *G — полиномиально периодическая группа*;

б) *G — строго сервантно корректная группа*;

в) *$\Omega(G)$ удовлетворяет условию максимальности и для любого $t \in \Omega(G)$ выполняется $r(t) < \infty$.*

Доказательство. Импликация а) $\Longrightarrow$ б) следует из леммы 1.7, импликация б) $\Longrightarrow$ в) следует из [4, с. 389, 390]. Докажем импликацию в) $\Longrightarrow$ а).

Пусть выполнено условие в). Покажем, что тогда $\operatorname{Tor} G = G$, т. е. для любого $\alpha \in \mathrm{E}(G)$ имеет место $\operatorname{tor}({}^{\alpha}G) = G$. Предположим противное, пусть существует такой эндоморфизм $\alpha \in \mathrm{E}(G)$, что $\operatorname{tor}({}^{\alpha}G) \neq G$. Тогда найдётся элемент g, такой что $g \in G$ и $g \notin \operatorname{tor}({}^{\alpha}G)$. Отсюда получаем

$$\alpha(g) \notin \operatorname{tor}({}^{\alpha}G), \ldots,\ \alpha^k(g) \notin \operatorname{tor}({}^{\alpha}G), \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Покажем, что $g, \alpha(g), \ldots, \alpha^k(g), \ldots$ — линейно независимое множество элементов группы G. Действительно, пусть

$$n_0 g + n_1\alpha(g) + \ldots + n_s\alpha^s(g) = 0.$$

Если $n_i \neq 0$ для единственного $i = 0, 1 \ldots, s$, то получаем противоречие с тем, что G — группа без кручения. Если $n_i \neq 0$ для двух или более индексов $i = 0, 1, \ldots, s$, то получаем целочисленный многочлен $f(X)$ степени не меньше 1, такой что $f(X) \cdot g = 0$ в модуле ${}^{\alpha}G$. Это означает, что $g \in \operatorname{tor}({}^{\alpha}G)$, противоречие.

Определим теперь подмножество $\Phi \subseteq \Omega(G)$ следующим образом:

$$\Phi = \bigl\{t \in \Omega(G) \mid (\exists a)\ \bigl(a \in (G \setminus \operatorname{tor}({}^{\alpha}G)\bigr), \\ (\exists i_s)\ a = a_{i_1} + \ldots + a_{i_s} + \ldots + a_{i_k},\ a_{i_s} \in G_{i_s},\ a_{i_s} \notin \operatorname{tor}({}^{\alpha}G),\ \tau(G_{i_s}) = t\bigr\}.$$

Здесь и далее представления элементов в виде сумм берутся относительно фиксированного разложения

$$G = \bigoplus_{i\in I} G_i.$$

Заметим, что Φ — непустое множество. Действительно, по предположению имеем, что $g \notin \operatorname{tor}({}^{\alpha}G)$. Тогда если

$$g = g_{i_1} + \ldots + g_{i_k}, \quad g_{i_l} \in G_{i_l}, \quad l = 1, \ldots, k,$$

то существует $s \in \{1, \ldots, k\}$, для которого $g_{i_s} \notin \operatorname{tor}({}^{\alpha}G)$. Обозначим тип G_{i_s} через t_0, тогда $t_0 \in \Phi$.

По условию в) множество $\Omega(G)$ удовлетворяет условию максимальности, тогда и подмножество $\Phi \subseteq \Omega(G)$ также удовлетворяет условию максимальности. Пусть $t_{\max}$ есть максимальный тип в Φ. Тогда существует элемент $g' \in G$, такой что

$$g' = g'_{i_1} + \ldots + g'_{i_n} \notin \operatorname{tor}({}^{\alpha}G),$$

причём, скажем,

$$g'_{i_1} \notin \operatorname{tor}({}^{\alpha}G), \quad g'_{i_1} \in G_{i_1} \tag{3}$$

и $\tau(G_{i_1}) = t_{\max}$.

Так как эндоморфизмы не понижают типы, то множество

$$g'_{i_1}, \alpha(g'_{i_1}), \ldots, \alpha^n(g'_{i_1}), \ldots$$

содержится в подгруппе $G(t_{\max}) = \{g \in G \mid \tau(g) \geqslant t_{\max}\}$. Если обозначить через $G^*(t_{\max})$ подгруппу, порождённую элементами, типы которых больше или равны $t_{\max}$, то для любого $h \in G^*(t_{\max})$ имеем $h = h_{j_1} + \ldots + h_{j_s}$, $h_{j_k} \in G_{j_k}$, $k = 1, \ldots, s$, причём $\tau(h_{j_k}) = \tau(G_{j_k}) > t_{\max}$ для любого $k = 1, \ldots, s$. Отсюда следует, что $h_{j_k} \in \operatorname{tor}({}^{\alpha}G)$ для любого $k = 1, \ldots, s$. Действительно, если предположить противное, то некоторый h_{j_k} не принадлежит $\operatorname{tor}({}^{\alpha}G)$ и тогда $\tau(G_{j_k}) \in \Phi$, что противоречит максимальности типа $t_{\max}$ в Φ. Следовательно, $G^*(t_{\max}) \subseteq \operatorname{tor}({}^{\alpha}G)$.

Учтём теперь, что по условию в) число прямых слагаемых ранга 1 группы G одного и того же типа конечно. Следовательно, ранг $G(t_{\max})/G^*(t_{\max})$ конечен, откуда следует, что множество смежных классов

$$g'_{i_1} + G^*(t_{\max}),\ \alpha(g'_{i_1}) + G^*(t_{\max}), \ldots,\ \alpha^i(g'_{i_1}) + G^*(t_{\max})$$

для g'_{i_1} из (3) является линейно зависимым. Но тогда существуют такие целые числа $k_0, k_1, \ldots, k_n$, не все равные нулю одновременно, что

$$k_0\big(g'_{i_1} + G^*(t_{\max})\big) + \ldots + k_n\big(\alpha^n(g'_{i_1}) + G^*(t_{\max})\big) \subseteq G^*(t_{\max}).$$

Так как $G(t_{\max})/G^*(t_{\max})$ — группа без кручения, то по меньшей мере два из коэффициентов $k_0, k_1, \ldots, k_n$ отличны от нуля и, следовательно, целочисленный многочлен $f_0(X) = k_0 + k_1X + \ldots + k_nX^n$ имеет степень не меньше 1. Но тогда в модуле ${}^{\alpha}G$ имеем

$$f_0(X)g'_{i_1} \in G^*(t_{\max}) \subseteq \operatorname{tor}({}^{\alpha}G). \tag{4}$$

Если $f_0(X)g'_{i_1} = 0$, то $g'_{i_1} \in \operatorname{tor}({}^{\alpha}G)$, что противоречит выбору элемента g'_{i_1}. Если $f_0(X)g'_{i_1} \neq 0$, то из (4) следует, что существует элемент $0 \neq f_1(X) \in \mathbb{Z}[X]$, такой что $f_1(X) \cdot (f_0(X)g'_{i_1}) = 0$. Тогда многочлен $f(X) = f_1(X) \cdot f_0(X)$ имеет степень не меньше 1 и $f(X) \cdot g'_{i_1} = 0$, что означает, что $g'_{i_1} \in \operatorname{tor}({}^{\alpha}G)$, противоречие с выбором g'_{i_1}. $\square$

2. Полиномиально расщепляемые абелевы группы без кручения

Определение 2.1. Группу G без кручения назовём полиномиально расщепляемой, если $\operatorname{Tor} G$ есть прямое слагаемое группы G.

Следующая теорема показывает, что класс полиномиально расщепляемых групп значительно шире класса полиномиально периодических групп.

Теорема 2.2. *Любая вполне разложимая группа без кручения полиномиально расщепляема.*

Доказательство. Рассмотрим фиксированное прямое разложение вполне разложимой группы G:

$$G = \bigoplus_{i \in I} G_i, \tag{5}$$

где G_i $(i \in I)$ — группы без кручения ранга 1.

Покажем сначала, что

$$\operatorname{Tor} G = \bigoplus_{j \in J} G_j,$$

где $J \subseteq I$ и G_j $(j \in J)$ — это те и только те прямые слагаемые ранга 1 из разложения (5), которые удовлетворяют следующему условию:

> множество Φ_j типов различных прямых слагаемых G_i ранга 1 из разложения (5), которые больше типа G_j, удовлетворяет условию максимальности и множество тех прямых слагаемых G_i из разложения (5), тип которых равен типу G_j, конечно. (6)

Обозначим $\bigoplus\limits_{j \in J} G_j = H$ и покажем сначала, что $H \subseteq \operatorname{Tor} G$. Заметим, что из условия (6) следует, что H — вполне характеристическая подгруппа группы G. Пусть $h \in H$ — произвольный элемент. Покажем, что $h \in \operatorname{Tor} G$. Достаточно убедиться, что для любого эндоморфизма φ группы G и любого элемента $h \in H$ множество вида

$$h,\, \varphi(h), \ldots, \varphi^i(h), \ldots \tag{7}$$

является линейно зависимым. Действительно, в этом случае существует многочлен $0 \neq f_\varphi(X) \in \mathbb{Z}[X]$ степени не ниже 1, такой что $f_\varphi(X) \cdot h = 0$ в ${}^{\varphi}G$, откуда следует, что $h \in \operatorname{tor}({}^{\varphi}G)$ для любого $\varphi \in \mathrm{E}(G)$, что означает $h \in \operatorname{Tor} G$.

Для любого эндоморфизма $\varphi \in \mathrm{E}(G)$ рассмотрим ограничение $\varphi|_H$. Так как H — вполне характеристическая подгруппа группы G, то $\varphi|_H$ — эндоморфизм группы H. Так как H — вполне разложимая группа, удовлетворяющая условию в) теоремы 1.9, то согласно условию а) теоремы 1.9 получаем, что H — полиномиально периодическая группа. Это означает, что для любого эндоморфизма α группы H имеем

$$H = \operatorname{tor}({}^{\alpha}H). \tag{8}$$

В частности, это имеет место и для эндоморфизмов группы H, являющихся ограничениями эндоморфизмов группы G. Но тогда из (8) следует линейная зависимость множеств вида

$$h,\ \varphi|_H(h), \ldots, \varphi^i|_H(h), \ldots,$$

для любых $h \in H$ и $\varphi \in \mathrm{E}(G)$. Поскольку $\varphi|_H(h) = \varphi(h)$ для любых $h \in H$ и $\varphi \in \mathrm{E}(G)$, множества вида (7) являются линейно зависимыми для любых $h \in H$ и $\varphi \in \mathrm{E}(G)$.

Покажем теперь, что $\operatorname{Tor} G \subseteq H$. Предположим противное. Пусть существует такой элемент $x \in \operatorname{Tor} G$, что $x \notin H$. Тогда представим x относительно разложения (5) следующим образом:

$$x = x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_k}, \quad x_{i_s} \in G_{i_s}, \quad s = 1, 2, \ldots, k. \tag{9}$$

Из $x \in H$ следует, что для некоторого $x_{i_s} \in G_{i_s}$, $s = 1, 2, \ldots, k$, имеем $i_s \in J$. По условию (6) это означает, что для G_{i_s} существует бесконечное множество прямых слагаемых G_i ранга 1 из разложения (5), типы которых образуют бесконечную неубывающую последовательность:

$$G_{j_1}, \ldots, G_{j_n}, \ldots, \quad \tau(G_{i_s}) \leqslant \tau(G_{j_1}) \leqslant \ldots \leqslant \tau(G_{j_n}) \leqslant \ldots. \tag{10}$$

Можем предполагать, что элементы $G_{i_1}, G_{i_2}, \ldots, G_{i_k}$ из (9) не входят в множество (10), так как в противном случае можно исключить конечное множество G_{i_r} и перенумеровать оставшиеся G_{j_n}.

Рассмотрим прямое разложение группы G вида

$$G = G_{i_s} \oplus \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} G_{j_n} \right) \oplus G'$$

и построим эндоморфизм φ группы G следующим образом: для любого $g \in G$, если $g = g_1 + g_2 + g_3$, где

$$g_1 \in G^{(1)} = G_{i_s}, \quad g_2 \in G^{(2)} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} G_{j_n}, \quad g_3 \in G^{(3)} = G',$$

то $\varphi(g_1) = \gamma_1(g_1)$, где $\gamma_1 \colon G_{i_s} \to G_{j_1}$ — фиксированное вложение, $\varphi(g_2) = g_2$, $\varphi(g_3) = 0$.

Зададим эндоморфизм ψ группы G следующим образом: для любого $g \in G$, если $g = g_1 + g_2 + g_3$, где $g_i \in G^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, то $\psi(g_1) = g_1$, $\psi(g_3) = 0$, $\psi(g_2) = g_2'$, причём для $g_2 = g_{j_{n_1}} + \ldots + g_{j_{n_l}} \in G^{(2)}$ обозначим

$$g_2' = g_{j_{n_1+1}} + \ldots + g_{j_{n_l+1}} \in G^{(2)}, \quad g_{j_{n_i+1}} = \gamma_{n_i+1}(g_{j_{n_i}}), \quad i = 1, \ldots, l,$$

где $\gamma_{n_i+1} \colon G_{j_{n_i}} \to G_{j_{n_i+1}}$ — фиксированные вложения для $i = 1, \ldots, l$.

Обозначим $\chi = \psi \circ \varphi$, тогда легко видеть, что $x, \chi(x), \ldots, \chi^m(x), \ldots$ — линейно независимое множество. Но тогда $x \notin \operatorname{tor}({}^{\chi}G)$, что противоречит $x \in \operatorname{Tor} G = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{E}(G)} \operatorname{tor}({}^{\alpha}G)$. Таким образом, $\operatorname{Tor} G \subseteq H$, что завершает доказательство, поскольку $\operatorname{Tor} G = \bigoplus_{j \in J} G_j$ — прямое слагаемое группы G. □

Для построения примера полиномиально нерасщепляемой группы рассмотрим векторные группы, т. е. $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$, где G_i $(i \in I)$ — группы без кручения ранга 1. Условимся, следуя [3], называть G_i компонентами векторной группы G, а для любого $g \in G$, если $g = (\ldots, g_i, \ldots) \in \prod\limits_{i\in I} G_i$, $g_i \in G_i$, будем называть g_i координатами элемента g в группе G.

Лемма 2.3. *Пусть* $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$, *где* G_i $(i \in I)$ — *произвольные группы без кручения. Тогда*

$$\operatorname{Tor} G \subseteq \bigoplus_{i\in I} G_i.$$

Доказательство. Достаточно показать, что если элемент

$$g = (\ldots, g_i, \ldots) \in \prod_{i\in I} G_i$$

имеет бесконечное число ненулевых координат, то существует эндоморфизм ψ группы G, такой что $g \notin \operatorname{tor}({}^{\psi}G)$.

Пусть $g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_n}, \ldots$ — некоторое счётное множество ненулевых координат элемента g. Представим группу G в виде

$$G = \prod_{n=1}^{\infty} G_{i_n} \oplus G',$$

$$g = g_0 + g', \quad g_0 = (g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}, \ldots) \in \prod_{n=1}^{\infty} G_{i_n}, \quad g' \in G'. \tag{11}$$

Обозначим через φ эндоморфизм группы $\prod\limits_{n=1}^{\infty} G_{i_n}$, который для любого $x \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} G_{i_n}$ задан следующим образом: если $x = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}, \ldots)$, то $\varphi(x) = (x_{i_1}, 2x_{i_2}, \ldots, nx_{i_n}, \ldots)$.

Рассмотрим множество

$$g_0,\ \varphi(g_0), \ldots,\ \varphi^m(g_0), \ldots, \tag{12}$$

где g_0 из (11). Имеем

$$\begin{aligned}
&\varphi(g_0) = (g_{i_1}, 2g_{i_2}, \ldots, ng_{i_n}, \ldots),\\
&\varphi^2(g_0) = (g_{i_1}, 4g_{i_2}, \ldots, n^2 g_{i_n}, \ldots),\\
&\ldots\\
&\varphi^m(g_0) = (g_{i_1}, 2^m g_{i_2}, \ldots, n^m g_{i_n}, \ldots),\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Предположим, что существует такое натуральное число k, что

$$s_0 g_0 + s_1\varphi(g_0) + \ldots + s_k\varphi^k(g_0) = 0,$$

где $s_0, s_1, \ldots, s_k$ — целые числа. Тогда

$$s_0 + s_1 + \ldots + s_k = 0, \ldots, \ s_0 + ns_1 + \ldots + n^k s_k = 0, \ldots.$$

В частности, получаем, что $s_0, s_1, \ldots, s_k$ — решение однородной системы $k+1$ линейных уравнений с $k+1$ неизвестными над полем $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned}
&x_0 + x_1 + \ldots + x_k = 0,\\
&x_0 + 2x_1 + \ldots + 2^k x_k = 0,\\
&\ldots\\
&x_0 + (k+1)x_1 + \ldots + (k+1)^k x_k = 0.
\end{aligned}$$

Поскольку определитель этой системы отличен от нуля,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & 2^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & k+1 & \ldots & (k+1)^k \end{vmatrix} = 1!\,2!\,\ldots k! \neq 0,$$

то $s_0 = s_1 = \ldots = s_k = 0$ в поле $\mathbb{Q}$, следовательно, и в кольце $\mathbb{Z}$. Тогда множество (12) линейно независимо и $g_0 \notin \operatorname{tor}\Bigl({}^{\varphi}\Bigl(\prod\limits_{n=1}^{\infty} G_{i_n}\Bigr)\Bigr)$.

Продолжим φ до эндоморфизма ψ группы G следующим образом: если

$$x = x_0 + x' \in G, \quad x_0 \in \prod_{n=1}^{\infty} G_{i_n}, \quad x' \in G',$$

то пусть

$$\psi(x_0) = \varphi(x_0), \quad \psi(x') = 0.$$

Тогда

$$g_0 \notin \operatorname{tor}({}^{\psi}G), \quad g' \in \operatorname{tor}({}^{\psi}G)$$

для g_0, g' из (11), поскольку $\psi(g') = 0$. Отсюда следует, что $g \notin \operatorname{tor}({}^{\psi}G)$, что завершает доказательство. □

Теперь можем построить полиномиально нерасщепляемую группу без кручения.

Пример 2.4. Пусть $\bar{G} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, где G_n — группа без кручения ранга 1 и типа $\tau_n = (0, \ldots, 0, \infty, 0, \ldots)$ с ∞ на n-м месте, $n = 1, 2, \ldots$. По лемме 2.3 имеем

$$\operatorname{Tor} \bar{G} \subseteq \bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Более того, в нашем случае

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n \subseteq \operatorname{Tor} \bar{G}.$$

Действительно, пусть $g \in \bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n$. Тогда для $g = g_{n_1} + \ldots + g_{n_k}$, $g_{n_i} \in G_{n_i}$, $i = 1, \ldots, k$, и любого эндоморфизма φ группы $\bar{G}$ имеем $\varphi(g) \in G_{n_1} \oplus \ldots \oplus G_{n_k}$. Из теоремы 1.9 следует, что группа $\bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n$ является полиномиально периодической, откуда получаем, что $g \in \operatorname{tor}\left({}^{\bar{\varphi}}\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n\right)\right)$, где $\bar{\varphi}$ есть ограничение φ на $\bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n$. Но тогда $g, \varphi(g), \ldots, \varphi^n(g), \ldots$ — линейно зависимое множество в $\bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n$, а следовательно, и в $\bar{G}$. Отсюда вытекает, что $g \in \operatorname{tor}({}^{\varphi}\bar{G})$ для любого эндоморфизма $\varphi \in \mathrm{E}(G)$, тогда $g \in \operatorname{Tor} \bar{G}$. Таким образом,

$$\operatorname{Tor} \bar{G} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Но тогда $\operatorname{Tor} \bar{G}$ не является прямым слагаемым группы $\bar{G}$ согласно [3, следствие из теоремы 1].

Найдём описание полиномиально расщепляемых векторных групп.

Лемма 2.5. *Пусть $G = \prod_{i \in I} G_i$, где G_i — группы без кручения ранга 1 для любого $i \in I$. Подгруппа $\operatorname{Tor} G$ имеет следующий вид*:

$$\operatorname{Tor} G = \bigoplus_{j \in J} G_j, \quad J \subseteq I,$$

где $\{G_j\}_{j \in J}$ — множество всех тех компонент G_j, для которых существует не более конечного числа различных компонент G_i, типы которых больше или равны типу G_j.

Доказательство. Согласно лемме 2.3

$$\operatorname{Tor} G \subseteq H = \bigoplus_{i \in I} G_i.$$

Покажем сначала, что

$$\operatorname{Tor} G \subseteq H' = \bigoplus_{j \in J} G_j.$$

Пусть существует элемент $h \in \operatorname{Tor} G$, такой что $h \notin H'$. Тогда среди ненулевых координат элемента $h = h_{i_1} + h_{i_2} + \ldots + h_{i_k}$, $h_{i_1} \in G_{i_1}, \ldots, h_{i_k} \in G_{i_k}$, существует хотя бы одна координата, скажем $h_{i_1} \in G_{i_1}$, для которой $i_1 \notin J$, т. е. $h_{i_1} \notin H'$. Из определения множества индексов J тогда следует, что для компоненты G_{i_1} существует бесконечное множество компонент, скажем $G_{l_1}, \ldots, G_{l_n}, \ldots$, типы которых больше или равны типу G_{i_1}. Можем считать, что компоненты $G_{i_1}, \ldots, G_{i_k}$ не входят в это множество (в противном случае отбросим конечное множество компонент, входящих в это множество, и перенумеруем компоненты).

Рассмотрим прямое разложение группы G вида

$$G = G_{i_1} \oplus \prod_{n=1}^{\infty} G_{l_n} \oplus G'.$$

Зададим эндоморфизм φ группы G следующим образом: для любого $g \in G$, $g = g_1 + g_2 + g_3$, где $g_1 \in G_{i_1}$, $g_2 \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} G_{l_n}$ и $g_3 \in G'$, пусть

$$\varphi(g_1) = \langle \gamma_{l_1}(g_1), \ldots, \gamma_{l_n}(g_1), \ldots \rangle,$$

где $\gamma_{l_n} \colon G_{i_1} \to G_{l_n}$ — вложения для $n = 1, 2, \ldots$ (учтём, что тип компоненты G_{l_n} больше или равен типу G_{i_1} для $n = 1, 2, \ldots$), $\varphi(g_2) = g_2$ и $\varphi(g_3) = 0$.

Зададим эндоморфизм ψ группы G следующим образом: если $g = g_1 + g_2 + g_3 \in G$, как выше, то пусть $\psi(g_1) = 0$ для $g_1 \in G_{i_1}$, $\psi(g_2) = \langle g_{l_1}, 2g_{l_2}, \ldots, ng_{l_n}, \ldots \rangle$ для $g_2 = \langle g_{l_1}, g_{l_2}, \ldots, g_{l_n}, \ldots \rangle \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} G_{l_n}$, $\psi(g_3) = 0$ для $g_3 \in G'$.

Обозначим $\chi = \psi\varphi$. Тогда $h, \chi(h), \ldots, \chi^m(h), \ldots$ — линейно независимое множество. Действительно, имеем

$$\begin{aligned}
&\chi(h) = \psi\big(\varphi(h)\big) = \psi\big(\varphi(h_{i_1})\big) = (\gamma_{l_1}(h_{i_1}), 2\gamma_{l_2}(h_{i_1}), \ldots, n\gamma_{l_n}(h_{i_1}), \ldots),\\
&\chi^2(h) = \psi\Big(\varphi\big(\chi(h)\big)\Big) = (\gamma_{l_1}(h_{i_1}), 4\gamma_{l_2}(h_{i_1}), \ldots, n^2\gamma_{l_n}(h_{i_1}), \ldots),\\
&\ldots\\
&\chi^m(h) = (\gamma_{l_1}(h_{i_1}), 2^m\gamma_{l_2}(h_{i_1}), \ldots, n^m\gamma_{l_n}(h_{i_1}), \ldots),\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Аналогично доказательству леммы 2.3 получаем, что $\varphi(h), \chi(h), \chi^2(h), \ldots, \chi^m(h), \ldots$ (а следовательно, и $\chi(h), \chi^2(h), \ldots, \chi^m(h), \ldots$) есть линейно независимое множество. Поскольку множество $\chi(h), \chi^2(h), \ldots, \chi^m(h), \ldots$ содержится в группе $\prod\limits_{n=1}^{\infty} G_{l_n}$, а $h \in G_{i_1} \oplus G'$, то $h, \chi(h), \ldots, \chi^m(h), \ldots$ — линейно независимое множество. Отсюда следует, что $h \notin \operatorname{tor}({}^{\chi}G)$, что противоречит тому, что $h \in \operatorname{Tor} G = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathrm{E}(G)} \operatorname{tor}({}^{\alpha}G)$. Таким образом, $\operatorname{Tor} G \subseteq H$.

Покажем теперь, что $H' \subseteq \operatorname{Tor} G$. Заметим, что H' — вполне характеристическая подгруппа группы G. Пусть $h \in H'$. Покажем, что $h \in \operatorname{Tor} G$. Достаточно доказать, что для любого эндоморфизма φ группы G множество $h, \varphi(h), \ldots, \varphi^n(h), \ldots$ является линейно зависимым. Рассмотрим для эндоморфизма φ группы G его ограничение $\varphi|_{H'}$ на подгруппе H'. Так как H' — вполне характеристическая подгруппа группы G, то $\varphi|_{H'}$ — эндоморфизм группы H'. Поскольку H' — вполне разложимая группа без кручения, удовлетворяющая условию в) теоремы 1.9, то согласно условию а) теоремы 1.9 получаем, что H' является полиномиально периодической группой. Тогда $h, \varphi|_{H'}(h), \ldots, \varphi|_{H'}^n(h), \ldots$ — линейно зависимое множество. Поскольку

$\varphi|_{H'}(h) = \varphi(h)$ для любого $h \in H'$, то $h, \varphi(h), \dots, \varphi^n(h), \dots$ есть линейно зависимое множество для любых $h \in H'$ и $\varphi \in \mathrm{E}(G)$, что означает, что $h \in \operatorname{Tor} G$. $\square$

Теорема 2.6. *Пусть* $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$, *где* G_i $(i \in I)$ — *группы без кручения ранга* 1, $H = \bigoplus\limits_{i\in I} G_i$, $H' = \bigoplus\limits_{j\in J} G_j$ (*где* J *определено, как в лемме* 2.5). *Тогда следующие утверждения равносильны*:

а) G — *полиномиально расщепляемая группа*;
б) $\operatorname{Tor} G$ — *группа конечного ранга*;
в) *множество* $\Phi(G)$ *всех тех компонент* G_j *группы* G $(j \in J)$, *для которых существует не более конечного числа различных компонент* G_l $(l \in I)$, *типы которых больше или равны типу* G_j, *является конечным множеством*;
г) *множество* $\Psi(G)$ *всех тех компонент* G_i *группы* G $(i \in I)$, *для которых любая неубывающая цепь типов различных компонент группы* G, *начинающаяся с типа компоненты* G_i, *обрывается через конечное число шагов, есть конечное множество.*

Доказательство. Докажем импликацию а) $\Longrightarrow$ б). По лемме 2.5
$$\operatorname{Tor} G = H' = \bigoplus_{j\in J} G_j,$$
где множество $\{G_j\}_{j\in J} = \Phi(G)$ есть множество всех тех компонент G_j группы G, для которых существует не более конечного числа различных компонент G_l $(l \in I)$, типы которых больше или равны типу компоненты G_j. Если G — полиномиально расщепляемая группа, то $\operatorname{Tor} G$ — прямое слагаемое группы G. Следовательно, согласно [2, с. 102] группа $\operatorname{Tor} G$ есть прямая сумма делимой группы без кручения и конечного числа компонент G_j $(j \in J)$ ранга 1. По определению множества J делимая часть группы $\operatorname{Tor} G$ имеет конечный ранг. Таким образом, если $\operatorname{Tor} G$ — прямое слагаемое группы G, то $\operatorname{Tor} G$ имеет конечный ранг.

Эквивалентность б) $\Longleftrightarrow$ в) следует из леммы 2.5.

Импликации в) $\Longrightarrow$ б) и б) $\Longrightarrow$ а) очевидны. Поэтому справедлива импликация в) $\Longrightarrow$ а)

Докажем эквивалентность в) $\Longleftrightarrow$ г). Так как импликация г) $\Longrightarrow$ в) очевидна, осталось показать справедливость импликации в) $\Longrightarrow$ г).

Заметим, что $\Phi(G) \subseteq \Psi(G)$. Покажем, что если $\Phi(G)$ — конечное множество, то $\Psi(G) = \Phi(G)$, откуда следует, что $\Psi(G)$ — конечное множество. Обозначим через $\Gamma(G)$ множество всех различных типов компонент из $\Psi(G)$. Согласно определению $\Psi(G)$ множество $\Gamma(G)$ удовлетворяет условию максимальности и среди компонент из $\Psi(G)$ существует не более конечного числа компонент одного типа. Тогда ясно, что все компоненты из $\Psi(G)$, типы которых являются максимальными типами в $\Gamma(G)$, принадлежат $\Phi(G)$. Далее, пусть G_{i_0} — произвольная компонента из $\Psi(G)$ типа τ_i и пусть все компоненты из $\Psi(G)$ типа, большего τ_{i_0}, принадлежат $\Phi(G)$. По условию в) $\Phi(G)$ — конечное множество. Тогда существует не более конечного числа различных компонент G_l ($l \in I$), типы которых больше или равны типу τ_{i_0}. Следовательно, по определению $\Phi(G)$ имеем $G_{i_0} \in \Phi(G)$. Таким образом, получаем $\Phi(G) = \Psi(G)$, что завершает доказательство теоремы. □

Следствие 2.7. *Пусть G — векторная группа. Группа G полиномиально периодическая тогда и только тогда, когда ранг группы G конечен.*

Пример 2.8. Пусть $\bar{G}$ — группа из примера 2.4, т. е. $\bar{G} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, где G_n — группы без кручения ранга 1 типа $\tau_n = (0, \ldots, 0, \infty, 0, \ldots)$ с ∞ на n-м месте, $n = 1, 2, \ldots$. Поскольку ранг группы $\bar{G}$ бесконечен, то по следствию 2.7 группа $\bar{G}$ не является полиномиально периодической. Покажем, что $\bar{G}$ является строго сервантно корректной группой.

Пусть $\varphi \in \mathrm{E}(\bar{G})$ — такой моноэндоморфизм, что $\operatorname{Im}\varphi$ является сервантной подгруппой группы $\bar{G}$. Тогда очевидно, что $\varphi(G_n) \subseteq G_n$, более того, $\varphi(G_n)$ является сервантной подгруппой в G_n для любого $n = 1, 2, \ldots$. Поскольку G_n для $n = 1, 2, \ldots$ есть группа без кручения ранга 1, получаем, что $G_n = \varphi(G_n)$ для $n = 1, 2, \ldots$. Это означает, что φ действует на каждой компоненте G_n, $n = 1, 2, \ldots$, как её автоморфизм. Учтём теперь, что любой автоморфизм группы G_n без кручения ранга 1 есть умножение на рациональное число $\pm p^{\pm k_n}$, $k_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим эндоморфизм ψ группы $\bar{G}$, действующий на каждой группе G_n, $n = 1, 2, \ldots$, как умножение на $\pm p^{\mp k_n}$. Тогда $\varphi\psi = 1_{\bar{G}}$, $\psi\varphi = 1_{\bar{G}}$. Следовательно, φ есть автоморфизм группы $\bar{G}$ и тогда $\bar{G}$ является строго сервантно корректной, но не полиномиально периодической группой.

3. Строго сервантно корректные векторные группы

Согласно лемме 1.7 любая полиномиально периодическая группа без кручения является строго сервантно корректной группой. Пример 2.8 показывает, что для произвольных векторных групп класс полиномиально периодических групп строго содержится в классе строго сервантно корректных групп. Оказывается, что для полиномиально расщепляемых векторных групп эти классы совпадают.

Теорема 3.1. *Пусть G — векторная полиномиально расщепляемая группа. Группа G строго сервантно корректна тогда и только тогда, когда G — полиномиально периодическая группа.*

Доказательство. Достаточность очевидна по лемме 1.7.

Докажем необходимость. Ввиду следствия 2.7 достаточно доказать, что если G — полиномиально расщепляемая группа бесконечного ранга, то G не является строго сервантно корректной группой. Из теоремы 2.2 следует, что полиномиально расщепляемая векторная группа $G = \prod\limits_{i \in I} G_i$ бесконечного ранга содержит прямое слагаемое вида $H_0 = \prod\limits_{k=1}^{\infty} G_k$, где типы компонент G_k удовлетворяют соотношениям

$$\tau(G_1) \leqslant \tau(G_2) \leqslant \ldots \leqslant \tau(G_k) \leqslant \ldots.$$

Покажем, что группа H_0 содержит собственную сервантную подгруппу H_0', изоморфную H_0, откуда и будет следовать необходимость.

Пусть $J = \{\alpha \mid \alpha \subseteq N\}$, где N — натуральный ряд чисел, есть индексное множество обратного спектра $\{G_\alpha; \pi_\alpha^\beta\}$, где $G_\alpha = \sum_{k\in\alpha}^{\oplus} G_k$ для любого $\alpha \in J$, π_α^β — проектирование G_β на G_α для $\beta \geqslant \alpha$, J — направленное частично упорядоченное множество ($\alpha \leqslant \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha \subseteq \beta$). Известно [5, с. 77], что

$$\varprojlim_J \{G_\alpha; \pi_\alpha^\beta\} \cong \prod_{k=1}^{\infty} G_k.$$

Рассмотрим следующий обратный спектр. Обозначим через J' подмножество J, состоящее из тех конечных множеств натуральных чисел, которые имеют вид $\{k, k+1, k+2, \ldots, k+r-1, k+r\}$ для $k, r = 1, 2, \ldots$. Ясно, что J' — кофинальное подмножество в J. Тогда

$$\varprojlim_{J'} \{G_\alpha; \pi_\alpha^\beta\} \cong \varprojlim_J \{G_\alpha; \pi_\alpha^\beta\}.$$

Для любого натурального числа k рассмотрим $G_k \oplus G_{k+1}$. Как было показано в [4, с. 391], имеем $G_k \oplus G_{k+1} = G_k' \oplus G_{k+1}$, где $G_k' = \langle g_k + g_{k+1}\rangle_*$, $0 \neq g_k \in G_k$, $0 \neq g_{k+1} \in G_{k+1}$. Ясно, что $G_k \cong G_k'$ для любого $k = 1, 2, \ldots$. Обозначим $G_\alpha' = \sum_{k\in\alpha}^{\oplus} G_k'$ для любого $\alpha \in J'$, тогда $\{G_\alpha'; \mu_\alpha^\beta; J'\}$ образует обратный спектр, где $\alpha, \beta \in J'$, μ_α^β — проектирование G_β' на G_α' для $\beta \geqslant \alpha$. Понятно, что

$$\varprojlim_{J'} \{G_\alpha'; \mu_\alpha^\beta\} \cong \varprojlim_{J'} \{G_\alpha; \pi_\alpha^\beta\},$$

так как $G_\alpha' \cong G_\alpha$ для любого $\alpha \in J'$ и диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} G_\beta' & \xrightarrow{\phi_\beta} & G_\beta \\ {\scriptstyle \mu_\alpha^\beta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_\alpha^\beta} \\ G_\alpha' & \xrightarrow{\phi_\alpha} & G_\alpha\,, \end{array}$$

где ϕ_α, ϕ_β — изоморфизмы, $\beta \geqslant \alpha$ и $\alpha, \beta \in J'$, коммутативны.

Пусть $f\colon J' \to J'$ — отображение, заданное правилом $f\colon \alpha \mapsto \alpha \cup \{(\max \alpha) + 1\}$ для любого $\alpha \in J'$. Непосредственно проверяется, что f — инъективное отображение, сохраняющее частичный порядок и направленность, заданные на J'. Обозначим $J'' = \operatorname{Im} f$. Тогда f — изоморфизм частично упорядоченных направленных множеств J' и J''. Рассмотрим обратный спектр $\{G_\delta; \nu_\delta^\gamma; J''\}$, где

$$\nu_\delta^\gamma = \begin{cases} \pi_\delta^\gamma, & \text{если } \max \delta = \max \gamma, \\ \pi_{f^{-1}(\delta)}^\gamma, & \text{если } \max \delta \neq \max \gamma. \end{cases}$$

(Непосредственно проверяется, что $\nu_\delta^\gamma = 1_{G_\gamma}$, если $\gamma = \delta$ и $\nu_{\delta''}^{\delta'}\nu_{\delta'}^\gamma = \nu_{\delta''}^\gamma$ для $\gamma \geqslant \delta' \geqslant \delta''$.) Аналогично [5, с. 77] показывается, что

$$\varprojlim_{J''}\{G_\delta; \nu_\delta^\gamma\} \cong \prod_{k=1}^{\infty} G_k$$

(заметим, что J'' есть кофинальное подмножество в J', а следовательно, и в J).

Нам потребуется ещё один обратный спектр, а именно $\{G_\delta; \varepsilon_\delta^\gamma; J''\}$, где для $\gamma \geqslant \delta$

$$\varepsilon_\delta^\gamma = \begin{cases} \pi_{f^{-1}(\delta)}^\gamma, & \text{если } \max\delta = \max\gamma,\ \gamma \neq \delta, \\ 1_{G_\delta}, & \text{если } \gamma = \delta, \\ 0 & \text{в противном случае, т. е. } \max\gamma \neq \max\delta. \end{cases}$$

Вычислим $\varprojlim_{J''}\{G_\delta; \varepsilon_\delta^\gamma; J''\}$. По определению этот обратный предел есть подгруппа $\prod_{\delta\in J''} G_\delta$, координаты элементов которой удовлетворяют соотношениям вида $\varepsilon_\delta^\gamma g_\gamma = g_\delta$. Из задания $\varepsilon_\delta^\gamma$ следует, что координаты элементов этого обратного предела отличны от нуля тогда и только тогда, когда δ — минимальные элементы в J'' (т. е. пары чисел вида $(k, k+1)$). Следовательно,

$$\varprojlim_{J''}\{G_\delta; \varepsilon_\delta^\gamma; J''\} = \prod_{k=1}^{\infty} F_k,$$

где $F_k = G_k \oplus G_{k+1}$ для любого $k = 1, 2, \ldots$.

Зададим теперь гомоморфизм $\bar\varphi$ обратных спектров $\{G'_\alpha; \mu_\alpha^\beta; J'\}$ и $\{G_\delta; \nu_\delta^\gamma; J''\}$ следующим образом: для любого $\alpha \in J'$ пусть φ_α есть вложение $G'_\alpha = \sum_{k\in\alpha}^{\oplus} G'_k$ в $G_{f(\alpha)} = G_\alpha \oplus G_{(\max\alpha)+1}$, где $G_\alpha = \sum_{k\in\alpha}^{\oplus} G_k$ (т. е. $\operatorname{Im}\varphi_\alpha = G_\alpha$). Тогда для любых $\beta \geqslant \alpha$ коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} G'_\beta & \xrightarrow{\varphi_\beta} & G_{f(\beta)} \\ {\scriptstyle \mu_\alpha^\beta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \nu_{f(\alpha)}^{f(\beta)}} \\ G_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & G_{f(\alpha)}\,. \end{array}$$

Поскольку f — изоморфизм направленных множеств J' и J'', то $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in J'}$ задают гомоморфизм $\bar\varphi$ указанных обратных спектров. По [5, теорема 12.2] существует гомоморфизм

$$\varphi\colon \varprojlim_{J'}\{G'_\alpha; \mu_\alpha^\beta\} \to \varprojlim_{J''}\{G_\delta; \nu_\delta^\gamma\}.$$

Поскольку φ_α — мономорфизм для любого $\alpha \in J'$, то φ — мономорфизм.

Рассмотрим для любого $\alpha \in J'$ точную последовательность

$$0 \longrightarrow G'_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} G_{f(\alpha)} \xrightarrow{\psi_{f(\alpha)}} G_{f(\alpha)},$$

где φ_α было введено выше, а $\psi_{f(\alpha)}$ — проектирование $G_{f(\alpha)} = G_\alpha \oplus G_{(\max\alpha)+1}$ на $G_{\max(f(\alpha))} = G_{(\max\alpha)+1}$. Непосредственно проверяется, что для любых $\beta \geqslant \alpha$ из J' имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & G'_\beta & \xrightarrow{\varphi_\beta} & G_{f(\beta)} & \xrightarrow{\psi_{f(\beta)}} & G_{f(\beta)} \\
\big\downarrow & & \mu^\beta_\alpha\big\downarrow & & \big\downarrow\nu^{f(\beta)}_{f(\alpha)} & & \big\downarrow\varepsilon^{f(\beta)}_{f(\alpha)} \\
0 & \longrightarrow & G'_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & G_{f(\alpha)} & \xrightarrow{\psi_{f(\alpha)}} & G_{f(\alpha)}
\end{array}$$

с точными строками. Тогда по [5, теорема 12.3] имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow G' \xrightarrow{\varphi} G'' \xrightarrow{\Psi} G''', \tag{13}$$

где

$$G' = \varprojlim_{J'}\{G'_\alpha; \mu^\beta_\alpha\}, \quad G'' = \varprojlim_{J''}\{G_\delta; \nu^\gamma_\delta\}, \quad G''' = \varprojlim_{J''}\{G_\delta; \varepsilon^\gamma_\delta\}.$$

Покажем сначала, что $\operatorname{Im}\varphi \neq G''$. Для этого достаточно проверить, что $\operatorname{Ker}\psi \neq G''$, т. е. что $\psi \neq 0$. По [5, теорема 12.2] для любого $\delta \in J''$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
G'' & \xrightarrow{\pi_\delta} & G_\delta \\
\psi\big\downarrow & & \big\downarrow\psi_\delta \\
G''' & \xrightarrow{\rho_\delta} & G_\delta,
\end{array}$$

где π_δ, ρ_δ — канонические отображения. Из задания ψ_δ следует, что для некоторого $\delta \in J''$ имеем $\psi_\delta\pi_\delta \neq 0$ (в противном случае все π_δ равны 0, т. е. $G'' = 0$, противоречие). Отсюда, так как $\rho_\delta\psi = \psi_\delta\pi_\delta$, получаем, что $\psi \neq 0$.

Далее, $\operatorname{Im}\varphi$ есть сервантная подгруппа группы G''. Действительно, $\operatorname{Im}\psi$ есть ненулевая подгруппа группы без кручения $G''' = \prod\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, где $F_k = G_k \oplus G_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Из точности последовательности (13) имеем $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\varphi$. Тогда

$$G''/\operatorname{Im}\varphi = G''/\operatorname{Ker}\psi \cong \operatorname{Im}\psi$$

есть группа без кручения, откуда следует, что $\operatorname{Im}\varphi$ — сервантная подгруппа группы G''.

Наконец, $\operatorname{Im}\varphi \cong G''$. Действительно,

$$\operatorname{Im}\varphi \cong G' \cong \prod_{k=1}^{\infty} G'_k \cong \prod_{k=1}^{\infty} G_k \cong G''.$$

Таким образом, группа G'' содержит собственную сервантную изоморфную подгруппу. Поскольку $G'' \cong \prod\limits_{k=1}^{\infty} G_k = H_0$, то это же справедливо и для группы H_0, что и завершает доказательство теоремы. □

Литература

[1] Борсук К. Теория ретрактов. — М.: Мир, 1971.

[2] Граев М. И. К теории полных прямых произведений групп // Мат. сб. — 1945. — Т. 17. — С. 85—104.

[3] Мишина А. П. О прямых слагаемых полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга 1 // Сиб. мат. журн. — 1962. — Т. 3. — С. 244—249.

[4] Росошек С. К. Модули без кручения над дедекиндовыми кольцами // Мат. заметки. — 1974. — Т. 16. — С. 387—394.

[5] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974. — Т. 1.

[6] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1977. — Т. 2.

[7] Borsuk K. On the topology of retracts // Ann. Math. — 1947. — Vol. 48. — P. 1082—1094.

[8] Connell I. Some ring theoretic Schröder—Bernstein theorems // Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 132. — P. 335—351.

[9] Crawley P. Solution of Kaplansky's test problems for primary Abelian groups // J. Algebra. — 1965. — Vol. 2. — P. 413—431.

[10] Sasiada E. Negative solution of Kaplansky's first test problem for Abelian groups // Bull. Acad. Polon. Sci. — 1961. — Vol. 9. — P. 331—334.

[11] Trnkova V., Koubek V. The Cantor—Bernstein theorem for functors // Comment. Math. Univ. Carolin. — 1973. — Vol. 14. — P. 197—204.

Статья поступила в редакцию в мае 2006 г.