

Представления первой степени абелевых групп

А. М. СЕБЕЛЬДИН

Нижегородский государственный педагогический университет
e-mail: amseb@mail.ru

А. Л. СИЛЛА

Университет Конакри, Гвинея
e-mail: syllaalfalamine@yahoo.fr

УДК 512.541

Ключевые слова: представление абелевой группы, степень представления.

Аннотация

В статье даётся полное описание группы $\text{Hom}(G, \text{Aut } V)$, где V — векторное пространство размерности 1 на конечном поле $\mathbb{F}_q$, поле всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$, поле всех действительных чисел $\mathbb{R}$, поле всех комплексных чисел $\mathbb{C}$. Описание приведено в каждом из этих четырёх случаев для произвольной абелевой группы G .

Abstract

A. M. Sebedin, A. L. Sylla, Representations of the first degree of Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 3, pp. 185—191.

A complete description of $\text{Hom}(G, \text{Aut } V)$, where V is a vector space of dimension 1 on a finite field $\mathbb{F}_q$, on the rational field $\mathbb{Q}$, on the field of real numbers $\mathbb{R}$, and on the field of complex numbers $\mathbb{C}$ is given. The description is given in each of these four cases for any Abelian group G .

Для векторного пространства V на коммутативном поле K обозначим через $\text{Aut } V$ группу всех автоморфизмов пространства V и рассмотрим группу $\text{Hom}(G, \text{Aut } V)$ всех гомоморфизмов из G в $\text{Aut } V$, где G — произвольная абелева группа.

Тройка (φ, G, V) является представлением группы G , $\dim_K V$ — степень представления.

Для нас описать представления (φ, G, V) группы G означает найти группу $\text{Hom}(G, \text{Aut } V)$. В этой работе мы рассматриваем только представления степени 1. В этом случае $\text{GL}(1, K) \cong K^*$.

Случай I. $K = \mathbb{F}_q$ — конечное поле. Известно, что в этом случае K^* — мультипликативная циклическая группа порядка $m = |K| - 1 = q - 1$. Поэтому

$$K^* \cong \mathbb{Z}(m) \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}(m)} \mathbb{Z}(p^{\nu(p, m)}),$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 3, с. 185—191.

© 2007 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

где $\mathbb{Z}(m)$ — аддитивная группа кольца вычетов $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, т. е.

$$\mathbb{Z}(m) = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +), \quad \mathbb{P}(m) = \{p \in \mathbb{P} : p \mid m\}, \quad m = \prod_{p \in \mathbb{P}(m)} p^{\nu(p,m)},$$

$\nu(p, m) \in \mathbb{N}$ обозначает степень p в каноническом разложении m , $\mathbb{N}$ и $\mathbb{P}$ — совокупности всех целых неотрицательных чисел и всех простых чисел соответственно.

Предложение 1. Пусть A — абелева группа, $B = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B_n$ — её p -базисная подгруппа, где

$$B_0 = \bigoplus_{\alpha(A,0)} \mathbb{Z}, \quad B_n = \bigoplus_{\alpha(A,n)} \mathbb{Z}(p^n).$$

Тогда

$$\text{Hom}(A, \mathbb{Z}(p^k)) \cong \prod_{\alpha(A,0)} \mathbb{Z}(p^k) \bigoplus \prod_{s \in k^*} \mathbb{Z}(p^s) \bigoplus \prod_{t \in k^{**}} \prod_{\alpha(A,t)} \mathbb{Z}(p^k),$$

где

$$k^* = \{1, \dots, k-1\}, \quad k^{**} = \mathbb{N}^* \setminus k^*, \quad \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Доказательство. Так как группа $\mathbb{Z}(p^k)$ алгебраически компактна, то

$$\begin{aligned} \text{Hom}(A, \mathbb{Z}(p^k)) &\cong \text{Hom}(B, \mathbb{Z}(p^k)) \cong \text{Hom}\left(\bigoplus_{\alpha(A,0)} \mathbb{Z}, \mathbb{Z}(p^k)\right) \oplus \\ &\oplus \text{Hom}\left(\bigoplus_{s \in k^*} \bigoplus_{\alpha(A,s)} \mathbb{Z}(p^s), \mathbb{Z}(p^k)\right) \oplus \text{Hom}\left(\bigoplus_{t \in k^{**}} \bigoplus_{\alpha(A,t)} \mathbb{Z}(p^t), \mathbb{Z}(p^k)\right). \end{aligned}$$

Согласно [2, § 43] имеем

$$\begin{aligned} \text{Hom}(A, \mathbb{Z}(p^k)) &\cong \text{Hom}(B, \mathbb{Z}(p^k)) \cong \\ &\cong \prod_{\alpha(A,p,0)} \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(p^k)) \bigoplus \prod_{s \in k^*} \prod_{\alpha(A,s)} \text{Hom}(\mathbb{Z}(p^s), \mathbb{Z}(p^k)) \oplus \\ &\oplus \prod_{t \in k^{**}} \prod_{\alpha(A,t)} \text{Hom}(\mathbb{Z}(p^t), \mathbb{Z}(p^k)) \cong \\ &\cong \prod_{\alpha(A,p,0)} \mathbb{Z}(p^k) \bigoplus \prod_{s \in k^*} \mathbb{Z}(p^s) \bigoplus \prod_{t \in k^{**}} \prod_{\alpha(A,t)} \mathbb{Z}(p^k). \end{aligned} \quad \square$$

Применяя предложение 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть K — конечное поле,

$$m = |K| - 1 = \prod_{p \in \mathbb{P}(m)} p^{\nu(p,m)},$$

A — абелева группа, $B(p) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B_n(p)$ — её p -базисные подгруппы, где

$$B_0(p) = \bigoplus_{\alpha(A,p,0)} \mathbb{Z}, \quad B_n(p) = \bigoplus_{\alpha(A,p,n)} \mathbb{Z}(p_n).$$

Тогда

$$\text{Hom}(A, K^*) \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}(m)} K_p,$$

где

$$K_p = \prod_{\alpha(A, p, 0)} \mathbb{Z}(p^{\nu(p, m)}) \bigoplus \prod_{s \in \nu(p, m)^* \alpha(A, p, s)} \mathbb{Z}(p^s) \oplus \prod_{t \in \nu(p, m)^{**} \alpha(A, p, t)} \mathbb{Z}(p^{\nu(p, m)}). \quad \square$$

СЛУЧАЙ II. $K = \mathbb{Q}$ — поле всех рациональных чисел. Найдём сначала $\mathbb{Q}^*$. Если $a = r/s \in \mathbb{Q}^*$, то

$$a = \varepsilon(a) \prod_{p \in \mathbb{P}(a)} p^{\nu(p, a)},$$

где $\nu(p, a) \in \mathbb{Z}^*$, $\mathbb{P}(a) = \mathbb{P}(r) \cup \mathbb{P}(s)$, $\varepsilon(a) = 1$, если $a > 0$, и $\varepsilon(a) = -1$, если $a < 0$. Можно записать также

$$a = \varepsilon(a) \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu(p, a)},$$

где $\nu(p, a) \in \mathbb{Z}$.

Предложение 2. Пусть $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа всех целых чисел. Тогда имеет место изоморфизм

$$\mathbb{Q}^* \cong \mathbb{Z}(2) \oplus \bigoplus_{\aleph_0} \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\varphi: \mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbb{Z}(2) \oplus \bigoplus_{\aleph_0} \mathbb{Z},$$

задаваемое правилом

$$\varphi(a) = (a(\varepsilon), \dots, \nu(p, a), \dots)_{p \in \mathbb{P}},$$

где $a(\varepsilon) = 0_{\mathbb{Z}(2)}$, если $\varepsilon(a) = 1$, и $a(\varepsilon) = 1_{\mathbb{Z}(2)}$, если $\varepsilon(a) = -1$. Видно, что φ — биекция ($\text{card } \mathbb{P} = \aleph_0$). Сохранение операций проверяется без труда. $\square$

Теорема 2. Пусть A — абелева группа, $B(2) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B_n(2)$ — её 2-базисная подгруппа, где

$$B_0 = \bigoplus_{\alpha(A, 0)} \mathbb{Z}, \quad B_n = \bigoplus_{\alpha(A, n)} \mathbb{Z}(2^n).$$

Тогда

$$\text{Hom}(A, \mathbb{Q}^*) \cong \text{Hom}(A, \mathbb{Z}(2)) \oplus \text{Hom}\left(A, \bigoplus_{\aleph_0} \mathbb{Z}\right),$$

где

$$\text{Hom}(A, \mathbb{Z}(2)) \cong \prod_{\alpha(A, 0)} \mathbb{Z}(2) \bigoplus \prod_{n \in \mathbb{N}^* \alpha(A, n)} \mathbb{Z}(2)$$

и группа $\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{\aleph_0} \mathbb{Z}\right)$ сепарабельная однородная без кручения типа τ_0 .

Доказательство. Изоморфизм

$$\operatorname{Hom}(A, \mathbb{Q}^*) \cong \operatorname{Hom}(A, \mathbb{Z}(2)) \oplus \operatorname{Hom}\left(A, \bigoplus_{\aleph_0} \mathbb{Z}\right)$$

вытекает из предложения 2 и [2, § 43]. Изоморфизм

$$\operatorname{Hom}(A, \mathbb{Z}(2)) \cong \prod_{\alpha(A,0)} \mathbb{Z}(2) \oplus \prod_{n \in \mathbb{N}^*} \alpha(A, n) \mathbb{Z}(2)$$

следует из предложения 1. Согласно [1] существует максимальная подгруппа G группы A , такая что

$$\operatorname{Hom}\left(G, \bigoplus_{\aleph_0} \mathbb{Z}\right) = 0.$$

Так как периодическая группа содержит прямое коциклическое слагаемое, получаем, что группа G содержит периодическую часть $T(A)$ группы A . Таким образом, группа A/G без кручения. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow A/G \longrightarrow 0.$$

По [2, § 44] имеем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}\left(A/G, \bigoplus_{\aleph_0} \mathbb{Z}\right) \longrightarrow \operatorname{Hom}\left(A, \bigoplus_{\aleph_0} \mathbb{Z}\right) \longrightarrow \operatorname{Hom}\left(G, \bigoplus_{\aleph_0} \mathbb{Z}\right) = 0.$$

Поэтому

$$\operatorname{Hom}\left(A/G, \bigoplus_{\aleph_0} \mathbb{Z}\right) \cong \operatorname{Hom}\left(A, \bigoplus_{\aleph_0} \mathbb{Z}\right).$$

Применяя [3, § 87] и [4], получаем, что группа $\operatorname{Hom}\left(A, \bigoplus_{\aleph_0} \mathbb{Z}\right)$ сепарабельная однородная без кручения типа τ_0 . $\square$

Замечание 1. Ранг группы $\operatorname{Hom}\left(A, \bigoplus_{\aleph_0} \mathbb{Z}\right)$ не превосходит $2^{r(A/G)\aleph_0}$.

Замечание 2 ([3, § 87]). Группа $\operatorname{Hom}\left(A, \bigoplus_{\aleph_0} \mathbb{Z}\right)$ является сервантной подгруппой группы $\left(\prod_{r(A/G)} \mathbb{Z}\right)(\tau_0)$.

Случай III. $K = \mathbb{R}$ — поле всех действительных чисел. Найдем сначала $\mathbb{R}^*$.

Предложение 3. Пусть $\mathbb{Q}$ — аддитивная группа всех рациональных чисел. Тогда имеет место изоморфизм

$$\mathbb{R}^* \cong \mathbb{Z}(2) \oplus \bigoplus_{\aleph} \mathbb{Q}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbb{R}^+$ — действительные положительные числа. Для любого $r \in \mathbb{R}^+$ уравнение $xn = r$ разрешимо для любого $n \in \mathbb{N}^*$. Таким образом,

группа $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ делимая. Учтывая, что $\text{card } \mathbb{R}^+ = \aleph$ и что $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ — группа без кручения, имеем

$$(\mathbb{R}^+, \cdot) \cong \bigoplus_{\aleph} \mathbb{Q},$$

где $\mathbb{Q}$ — аддитивная группа всех рациональных чисел. Поэтому

$$\mathbb{R}^* \cong \mathbb{Z}(2) \oplus \bigoplus_{\aleph} \mathbb{Q}. \quad \square$$

Теорема 3. Пусть A — абелева группа, $B(2) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B_n(2)$ — её 2-базисная подгруппа, где

$$B_0 = \bigoplus_{\alpha(A,0)} \mathbb{Z}, \quad B_n = \bigoplus_{\alpha(A,n)} \mathbb{Z}(2^n).$$

Тогда

$$\text{Hom}(A, \mathbb{Q}^*) \cong \text{Hom}(A, \mathbb{Z}(2)) \oplus \text{Hom}\left(A, \bigoplus_{\aleph} \mathbb{Q}\right),$$

где

$$\text{Hom}(A, \mathbb{Z}(2)) \cong \prod_{\alpha(A,0)} \mathbb{Z}(2) \oplus \prod_{n \in \mathbb{N}^*} \prod_{\alpha(A,n)} \mathbb{Z}(2)$$

и $\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{\aleph} \mathbb{Q}\right)$ является делимой группой без кручения ранга $\alpha(A)^{\aleph}$, если ранг без кручения $\alpha(A)$ группы A бесконечен, и ранга $\alpha(A)\aleph$, если кардинал $\alpha(A)$ конечен.

Доказательство. Строение $\text{Hom}(A, \mathbb{Z}(2))$ описано в теореме 2. Если ранг без кручения группы A равен нулю, т. е. если A периодическая, то по [2, § 43]

$$\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{\aleph} \mathbb{Q}\right) = 0.$$

Если A не является периодической, то $\alpha(A) \neq 0$. Поэтому

$$\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{\aleph} \mathbb{Q}\right) \cong \text{Hom}\left(A, \prod_{\aleph_0} \mathbb{Q}\right) \cong \prod_{\aleph_0} \text{Hom}(A, \mathbb{Q}).$$

Применяя [2, § 43], имеем

$$\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{\aleph} \mathbb{Q}\right) \cong \prod_{\aleph_0} \prod_{\alpha(A)} \mathbb{Q} \cong \prod_{\alpha(A)} \prod_{\aleph_0} \mathbb{Q} \cong \prod_{\alpha(A)} \bigoplus_{\aleph} \mathbb{Q},$$

откуда

$$\text{r}\left(\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{\aleph} \mathbb{Q}\right)\right) = \alpha(A)^{\aleph},$$

если ранг $\alpha(A)$ бесконечен, и

$$\mathrm{r}\left(\mathrm{Hom}\left(A, \bigoplus_{\aleph} \mathbb{Q}\right)\right) = \alpha(A)\aleph,$$

если кардинал $\alpha(A)$ конечен. $\square$

СЛУЧАЙ IV. $K = \mathbb{C}$ — поле всех комплексных чисел. Найдём сначала $\mathbb{C}^*$.

Предложение 4. Пусть $\mathbb{Q}$ — аддитивная группа всех рациональных чисел, $\mathbb{Z}(p^\infty)$ — квазициклическая группа. Имеет место изоморфизм

$$\mathbb{C}^* \cong \prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}(p^\infty) \oplus \bigoplus_{\aleph} \mathbb{Q}.$$

Доказательство. Числа, которые находятся на окружности $\mathbb{C}_1$ радиуса 1, образуют подгруппу, изоморфную $\prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}(p^\infty)$. Для любого $a + bi \in \mathbb{C}^*$ уравнение $x^n = a + bi$ разрешимо для любого $n \in \mathbb{N}^*$, в том числе для $n = p^k$ ($p \in \mathbb{P}$, $k \in \mathbb{N}$). Таким образом, группа $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ делимая. Учтывая, что $\mathrm{card}(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{C}_1) = \aleph$ и что группа $(\{1\} \cup \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{C}_1, \cdot)$ является подгруппой группы $\mathbb{C}^*$ без кручения, имеем

$$(\{1\} \cup \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{C}_1, \cdot) \cong \bigoplus_{\aleph} \mathbb{Q}. \quad \square$$

Пусть A — абелева группа, $B(p) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B_n(p)$ — её нижние p -базисные подгруппы, где

$$B_0(p) = \bigoplus_{\alpha(A,p,0)} \mathbb{Z}, \quad B_n(p) = \bigoplus_{\alpha(A,p,n)} \mathbb{Z}(p^n),$$

$\beta(p)$ — ранг p -компоненты группы $A/B(p)$, $\gamma(p)$ — ранг без кручения группы $A/B(p)$.

Теорема 4. Для любой группы A имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(A, \mathbb{C}^*) \cong \prod_{p \in \mathbb{P}} \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z}(p^\infty)) \oplus \mathrm{Hom}\left(A, \bigoplus_{\aleph} \mathbb{Q}\right),$$

где

$$\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z}(p^\infty)) \cong \prod_{\alpha(A,p,0)} \mathbb{Z}(p^\infty) \oplus \prod_{\alpha(A,p,n)} \mathbb{Z}(p^n) \oplus \prod_{\beta(p)} \mathbb{J}_p \oplus \prod_{\gamma(p)\aleph_0} \mathbb{Q}$$

и группа $\mathrm{Hom}\left(A, \bigoplus_{\aleph} \mathbb{Q}\right)$ является делимой группой без кручения, причём её ранг равен $\alpha(A)\aleph$, если ранг $\alpha(A)$ бесконечен, и равен $\alpha(A)\aleph$, если кардинал $\alpha(A)$ конечен.

Доказательство. Первый изоморфизм вытекает из предложения 4, строение группы $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z}(p^\infty))$ описано в [2, теорема 47.1]. Если группа A периодическая, то очевидно, что $\mathrm{Hom}\left(A, \bigoplus_{\aleph} \mathbb{Q}\right) = 0$. Пусть теперь $\alpha(A)$ — ненулевой

кардинал. Тогда по [2, § 43] имеем

$$\operatorname{Hom}\left(A, \bigoplus_{\aleph} \mathbb{Q}\right) \cong \prod_{\aleph_0} \prod_{\alpha(A)} \mathbb{Q} \cong \prod_{\alpha(A)} \prod_{\aleph_0} \mathbb{Q} \cong \prod_{\alpha(A)} \bigoplus_{\aleph} \mathbb{Q},$$

откуда следует, что

$$r\left(\operatorname{Hom}\left(A, \bigoplus_{\aleph} \mathbb{Q}\right)\right) = \alpha(A)^{\aleph},$$

если ранг $\alpha(A)$ бесконечен, и

$$r\left(\operatorname{Hom}\left(A, \bigoplus_{\aleph} \mathbb{Q}\right)\right) = \alpha(A)\aleph,$$

если кардинал $\alpha(A)$ конечен. □

Литература

- [1] Гриншпон С. Я. О равенстве нулю группы гомоморфизмов абелевых групп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1998. — № 9. — С. 42—46.
- [2] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974. — Т. 1.
- [3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1977. — Т. 2.
- [4] Sebeldin A. M. Isomorphisme naturel des groupes des homomorphismes des groupes abéliens // Ann. de L'IPGANC, Sér. A. — 1982. — Vol. 8. — P. 155—158.

Статья поступила в редакцию в мае 2006 г.

