Подпрямые суммы абелевых групп без кручения ранга 1

В. Б. ТРУХМАНОВ
Арзамасский государственный педагогический институт им. А. П. Гайдара

УДК 512.541

Ключевые слова: специальная группа, образующий элемент, индуцирующая группа.

Аннотация

В работе изучаются абелевы группы без кручения ранга два — подпрямые суммы двух делимых рациональных групп, т. е. групп, изоморфных группе $\mathbb{Q}$, с индуцирующей группой $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Определяется и исследуется класс специальных групп. Показано, что существует взаимно-однозначное соответствие между множеством специальных групп и множеством обратимых элементов кольца универсальных чисел.

Abstract

V. B. Trukhmanov, On subdirect sums of Abelian torsion-free groups of rank 1, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 3, pp. 209—221.

In this paper, we study torsion-free Abelian groups of rank 2, which are subdirect sums of two divisible rational groups, with the inducing group $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. The class of special groups is defined and investigated. It is shown that there is a one-to-one correspondence between the set of all special groups and the multiplicative group of unity elements of the ring of universal numbers.

В [1, 2] Л. Я. Куликов впервые показал, что в теории абелевых групп без кручения исследование подпрямых сумм различных классов групп может привести к важным результатам. Он доказал, что любая счётная ненулевая редуцированная (обобщённо p-примарная) абелева группа без кручения представима в виде подпрямой суммы (обобщённо p-примарных) S-групп и существуют абелевы группы без кручения континуальной мощности, не представимые в виде подпрямой суммы S-групп.

Подгруппа G прямого произведения $\mathbf{A} = \prod\limits_i A_i$ абелевых групп называется подпрямой суммой групп A_i, если для каждого i отображение $\pi_i|_G\colon G \to A_i$, где π_i — проекция прямого произведения $\mathbf{A}$ на прямой сомножитель A_i, является эпиморфизмом [3]. Известно [3], что группа G является подпрямой суммой абелевых групп A и B тогда и только тогда, когда существуют группа F и пара эпиморфизмов $\varphi_A\colon A \to F$ и $\varphi_B\colon B \to F$, таких что для любых элементов a

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 3, с. 209—221.

из группы A и b из группы B выполнено $G = \{(a, b) \mid \varphi_A(a) = \varphi_B(b)\}$. Группу F будем называть группой, индуцирующей подпрямую сумму G групп A и B, а эпиморфизмы φ_A и φ_B будем называть парой эпиморфизмов, определяющих подпрямую сумму G групп A и B для данной индуцирующей группы F. Для индуцирующей группы F и пары эпиморфизмов φ_A и φ_B, определяющих подпрямую сумму G групп A и B, введём обозначения

$$G_A = \{x \in A \mid \varphi_A(x) = 0\}, \quad G_B = \{y \in B \mid \varphi_B(y) = 0\}.$$

Очевидно, что $G_A \oplus G_B$ есть подгруппа группы G.

В данной работе изучаются абелевы группы без кручения ранга два — подпрямые суммы двух делимых рациональных групп, т. е. групп, изоморфных группе $\mathbb{Q}$, с индуцирующей группой $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Определяется и исследуется класс специальных групп (см. определение 2), для которого оказалось возможным теоретико-групповые проблемы свести к теоретико-числовым.

Рациональной группой называется абелева группа, изоморфная подгруппе группы рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Очевидно, что это группа ранга 1. Элементы группы $\mathbb{Q}$ будем обозначать в виде несократимой дроби m/n, где m — целое число, а n — целое положительное число. Если M — некоторое множество, $a \in M$, то через (ma/n) будем обозначать элемент множества $\mathbb{Q}a = \{ma/n \mid m/n \in \mathbb{Q}\}$. Через $\langle a \rangle$ будем обозначать циклическую абелеву группу, порождённую элементом a. Все другие группы в данной работе также абелевы.

Определение 1. Пусть A и B — делимые рациональные группы, G — подпрямая сумма групп A и B с индуцирующей группой $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Упорядоченную пару элементов (a, b), где элемент a принадлежит группе A, элемент b принадлежит группе B, будем называть образующим элементом группы G, если $G_A = \langle a \rangle$, $G_B = \langle b \rangle$.

Заметим, что не каждая подпрямая сумма двух делимых рациональных групп, индуцированная группой $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, обладает образующим элементом. Например, пусть $A = B = \mathbb{Q}$. Рассмотрим группу $U = \mathbb{Q}(1, 1) \oplus R(0, 1)$, где R — группа рациональных чисел, знаменатели которых не являются квадратами. Очевидно, группа U — подпрямая сумма групп A и B, а поскольку $\mathbb{Q}/R \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, её индуцирующей группой является группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Покажем, что группа U не имеет образующего элемента.

Действительно, так как $R(0, 1) = \{(0, r) \mid r \in R\}$, то из определения группы U_B следует, что $R \subseteq U_B$. А поскольку группа R не является циклической, то и группа U_B не является циклической, а это и означает, что в группе U отсутствует образующий элемент.

Определение 2. Абелеву группу G будем называть специальной группой, если

1) группа G является подпрямой суммой двух делимых рациональных групп с индуцирующей группой $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$;
2) группа G обладает образующим элементом.

Предложение 3. *Пусть A и B — делимые рациональные группы, a, a' — ненулевые элементы группы A, b, b' — ненулевые элементы группы B, G — специальная группа с образующим элементом (a,b). Пара (a',b') также является образующим элементом группы G тогда и только тогда, когда выполняются равенства $a'=\pm a$, $b'=\pm b$.*

Доказательство. Пусть подпрямая сумма G групп A и B с индуцирующей группой $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ имеет образующие элементы (a,b) и (a',b'). Тогда по определению образующего элемента подпрямой суммы имеют место равенства

$$G_A=\langle a\rangle=\langle a'\rangle,\quad G_B=\langle b\rangle=\langle b'\rangle.$$

Из определения циклической группы следует, что элемент a' равен либо a, либо $-a$, а элемент b' равен либо b, либо $-b$.

Обратное утверждение очевидно. □

Теорема 4. *Пусть A и B — делимые рациональные группы, G — специальная группа, a — ненулевой элемент группы A, b — ненулевой элемент группы B. Упорядоченная пара (a,b) является образующим элементом группы G тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

1) *для любого элемента $u\in G$ либо $u=(ta,sb)$, где t и s — целые числа, либо $u=(ma/n,m'a/n)$, где m, n, m' — целые числа, отличные от нуля, причём каждое из чисел m и m' взаимно просто с числом n*;
2) *для любого натурального числа n и любого целого числа k, если элемент $u=(ma/n,m'b/n)$ принадлежит группе G, то и элементы $w_k=(ma/n,(m'+kn)b/n)$ и $v_k=\big((m+kn)a/n,m'b/n\big)$ также принадлежат группе G.*

Доказательство. Пусть пара (a,b), где a — элемент группы A и b — элемент группы B, является образующим элементом специальной группы G. Тогда по определению выполняются равенства $G_A=\langle a\rangle$, $G_B=\langle b\rangle$. Из определения специальной группы также непосредственно вытекает, что если элемент $u=(ta,sb)$ принадлежит группе G, то число t является целым тогда и только тогда, когда число s является целым. Поэтому предположим, что в группе G содержится элемент $u=(ma/n,m'b/n')$, где m, n, m', n' — целые числа, отличные от нуля. Следовательно, элемент $nu=(ma,nm'b/n')$ также принадлежит группе G. Поскольку элемент ma принадлежит группе G_A, то элемент $nm'b/n'$ должен принадлежать группе G_B. Так как числа m' и n' взаимно просты, то это возможно только тогда, когда число n делится на число n'. Аналогично доказывается, что число n' делится на число n. Следовательно, $n=n'$.

Докажем условие 2). Пусть элемент $u=(ma/n,m'b/n)$ принадлежит группе G. Тогда $\varphi_A(ma/n)=\varphi_B(m'b/n)$. Следовательно, так как $\varphi_B(kb)=0$, получаем, что

$$\varphi_B\big((m'+kn)b/n\big)=\varphi_B\big((m'b/n)+kb\big)=$$
$$=\varphi_B(m'b/n)+\varphi_B(kb)=\varphi_B(m'b/n)=\varphi_A(ma/n),$$

а это означает, что элемент $w_k = (ma/n, (m' + kn)b/n)$ является элементом группы G. Аналогично доказывается, что элемент $v_k = \big((m + kn)/n, m'/n\big)$ также принадлежит группе G.

Докажем теорему в обратную сторону. Пусть G — специальная группа, индуцированная группой $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, и пусть выполняются условия 1) и 2). Поскольку G — группа ранга два, то существует рациональное число s, отличное от нуля, такое что элемент $x = (0a, sb)$ принадлежит группе G. По условию 1) число s целое. Следовательно, $G_B \subseteq \langle b\rangle$. Аналогично получаем, что $G_A \subseteq \langle a\rangle$.

Пусть группа G содержит элемент $u = (ma/n, m'b/n)$. Тогда по условию 2) группа G содержит элемент $u_1 = (ma/n, (m' + n)b/n)$, следовательно, группе G принадлежит элемент $nu_1 - nu = (0, b)$. Значит, $b \in G_B$ и тогда $G_B = \langle b\rangle$. Аналогично получаем, что $G_A = \langle a\rangle$. Теорема доказана. □

Если A и B — делимые рациональные группы и G — специальная группа с образующим элементом (a, b), где a — элемент группы A, b — элемент группы B, то для любого натурального числа $n \neq 1$ через $G^*(n)$ будем обозначать такое подмножество группы G, что любой его элемент — либо пара вида $(ma/d, m'b/d)$, где m, m' — любые целые числа, взаимно простые с любым натуральным делителем d числа n, либо пара $(0, 0)$.

Предложение 5. *Пусть A и B — делимые рациональные группы и G — специальная группа с образующим элементом (a, b), где a — элемент группы A, b — элемент группы B. Тогда для любого натурального числа n множество $nG^*(n)$ является подпрямой суммой групп $\langle a\rangle$ и $\langle b\rangle$ с индуцирующей группой $\mathbb{Z}(n)$.*

Доказательство. Покажем сначала, что множество $G^*(n)$ образует группу. Для этого достаточно проверить, что сумма любых двух элементов из $G^*(n)$ снова принадлежит $G^*(n)$. Пусть $u = (ma/d, m'b/d)$ и $u_1 = (m_1a/d_1, m_1'b/d_1)$ — элементы множества $G^*(n)$, и пусть число r — наибольший общий делитель чисел d и d_1, причём $d = rd'$, $d_1 = rd_1'$. Тогда

$$\begin{aligned} u + u_1 &= (ma/d, m'b/d) + (m_1a/d_1, m_1'b/d_1) = \\ &= \big((d_1m + dm_1)a/dd_1, (d_1m' + dm_1')b/dd_1\big) = \\ &= \big((rd_1'm + rd'm_1)a/rd'rd_1', (rd_1'm' + rd'm_1')b/rd'rd_1'\big) = \\ &= \big((d_1'm + d'm_1)a/d'rd_1', (d_1'm' + d'm_1')b/d'rd_1'\big) \in G^*(n), \end{aligned}$$

так как число $d'rd_1'$ является наименьшим общим кратным чисел d и d_1 и, следовательно, натуральным делителем числа n. Таким образом, множество $G^*(n)$ образует группу. Нетрудно видеть, что группа $nG^*(n)$ является подгруппой группы $\langle a\rangle \oplus \langle b\rangle$.

Рассмотрим произвольный элемент ma группы $\langle a\rangle$. Возможны два случая:

1) числа m и n имеют наибольший общий делитель $d \neq 1$, причём $m = dm_1$, $n = dn_1$;
2) числа m и n взаимно просты.

В первом случае, поскольку числа m_1 и n_1 взаимно просты, по теореме 4 найдётся такое число m_1', взаимно простое с числом n_1, что элемент

$u = (m_1a/n_1, m_1'b/n_1)$ содержится в группе G. Поскольку число n_1 является натуральным делителем числа n, то $u \in G^*(n)$. Пусть $m' = dm_1'$. Покажем, что элемент $v = (ma, m'b)$ принадлежит группе $nG^*(n)$. Действительно,

$$v = (ma, m'b) = d(m_1a, m_1'b) = \\ = (n/n_1)(m_1a, m_1'b) = n(m_1a/n_1, m_1'b/n_1) \in nG^*(n).$$

Пусть числа m и n взаимно просты. Тогда по теореме 4 существует число m', взаимно простое с числом n, такое что элемент $v = (ma/n, m'b/n)$ принадлежит подгруппе $G^*(n)$ группы G. Следовательно, элемент $v = nv' = (ma, m'b)$ принадлежит группе $nG^*(n)$.

Таким образом, проекция группы $nG^*(n)$ на группу $\langle a\rangle$ является эпиморфизмом. Аналогично доказывается, что проекция группы $nG^*(n)$ на группу $\langle b\rangle$ также является эпиморфизмом.

Покажем теперь, что группа $nG^*(n)$ является подпрямой суммой циклических абелевых групп $\langle a\rangle$ и $\langle b\rangle$ с индуцирующей группой $\mathbb{Z}(n)$. Действительно, пусть элемент $u = (ma/n, m'b/n)$ принадлежит группе G. Тогда по теореме 4 элементы $w = (ma/n, (m'+n)b/n)$ и $v = \big((m+n)a/n, m'b/n\big)$ также принадлежат группе G, а элементы $w' = (ma/n, (m'+n')b/n)$ и $v' = \big((m+n')a/n, m'b/n\big)$ для любого натурального числа $n' < n$ не принадлежат группе G. Это означает по определению, что если группа $nG^*(n)$ содержит элемент $u_1 = (ma, m'b)$, то она содержит элементы $w_1 = (ma, (m'+n)b)$ и $v_1 = \big((m+n)a, m'b\big)$ и не содержит элементов $w_1' = (ma, (m'+n')b)$ и $v_1' = \big((m+n')a, m'b\big)$ для любого натурального числа $n' < n$, из чего непосредственно следует, что группа $\mathbb{Z}(n)$ является индуцирующей для группы $nG^*(n)$. Предложение доказано. □

Пусть A и B — делимые рациональные группы, G — специальная группа с образующим элементом (a, b), где a — элемент группы A, b — элемент группы B. Тогда для любого простого числа p через G^p будем обозначать подмножество группы G, состоящее из всех пар вида $(ma/p^i, m'b/p^i)$, где $i = 0, 1, 2, \ldots$, а числа m, m' целые, взаимно простые с числом p^i.

Определение 6. Пусть p — простое число. Абелеву группу G будем называть p-специальной, если

1) группа G является подпрямой суммой групп, изоморфных группе $\mathbb{Q}^p$ рациональных чисел, знаменатели которых есть степени числа p;
2) группа G обладает образующим элементом.

Предложение 7. *Пусть A и B — делимые рациональные группы, G — специальная группа с образующим элементом (a, b), где a — элемент группы A, b — элемент группы B. Тогда для любого простого числа p множество G^p является p-специальной группой с образующим элементом (a, b).*

Доказательство. Пусть p — простое число. Рассмотрим множество G^p. По определению $G^p \subseteq A' \oplus B'$, где $A' = \mathbb{Q}^p a$, $B' = \mathbb{Q}^p b$. Покажем, что множество G^p образует подпрямую сумму групп A' и B' с индуцирующей группой

$\mathbb{Q}^p/\mathbb{Z}$ с образующим элементом (a, b). Сначала докажем, что множество G^p замкнуто относительно операции сложения и, следовательно, образует подгруппу прямой суммы $A' \oplus B'$.

Действительно, рассмотрим два произвольных элемента множества G^p: $u_1 = (ma/p^i, m'b/p^i)$ и $u_2 = (ka/p^j, k'b/p^j)$, пусть $i \leqslant j$. Поскольку число p^i является делителем числа p^j, то по определению группы G элементы u_1 и u_2, а также их сумма принадлежат группе G и, следовательно, множеству G^p. Таким образом, G^p — группа.

Пусть элемент ma/p^i принадлежит группе A. Тогда числа m и p^i взаимно просты, и следовательно, существует число m', взаимно простое с числом p^i, такое что элемент $u_1 = (ma/p^i, m'b/p^i)$ принадлежит группе $G^*(p^i)$ — подгруппе группы G^p. По предложению 5 ни для какого числа m'', не сравнимого с числом m' по модулю p^i в кольце целых чисел, элемент $v = (ma/p^i, m''b/p^i)$ не принадлежит группе $G^*(p^i)$, а следовательно, и группе G^p. Таким образом, проекция группы G^p на группу A является эпиморфизмом. Аналогично получаем, что проекция группы G^p на группу B также является эпиморфизмом. Следовательно, группа G^p есть подпрямая сумма групп A' и B' с индуцирующей группой $\mathbb{Q}^p/\mathbb{Z}$. □

Предложение 8. *Пусть A и B — делимые рациональные группы, G — специальная группа с образующим элементом (a, b), где a — элемент группы A, b — элемент группы B, и пусть H — собственная подгруппа группы G. Группа H является делимой тогда и только тогда, когда $H = \mathbb{Q}(a, b)$ или $H = \mathbb{Q}(a, -b)$.*

Доказательство. Пусть H — делимая группа. Тогда группа H является группой ранга 1. Следовательно, пересечение $H \cap (G_A \oplus G_B)$ — циклическая группа, т. е. существуют такие целые числа k и m, что $H \cap (G_A \oplus G_B) = \langle (ka, mb) \rangle$. Из делимости группы H вытекает, что пары $(a, mb/k)$ и $(ka/m, b)$ должны принадлежать группе H, а значит, и группе G, что по определению группы G возможно, если только $k = \pm m$. Следовательно, $H = \mathbb{Q}(a, \pm b)$. Обратное утверждение очевидно. □

Теорема 9. *Пусть G — специальная группа. Группа G разложима в прямую сумму своих подгрупп тогда и только тогда, когда она содержит в качестве собственной подгруппы делимую рациональную группу, причём в этом случае группа G представима в виде прямой суммы делимой рациональной и циклической групп.*

Доказательство. Докажем сначала достаточность данного условия. Пусть A и B — делимые рациональные группы, G — специальная групп A и B с парой образующих элементов (a, b), где a — элемент группы A, b — элемент группы B, и пусть группа G содержит в качестве собственной подгруппы группу $\mathbb{Q}(a, b)$. Тогда группа $\mathbb{Q}(a, b)$, как делимая подгруппа группы G, выделяется прямым слагаемым группы G.

Пусть пара $(ka/n, mb/n)$, где n — целое положительное число, отличное от единицы, k и m — целые числа, взаимно простые с числом n, является элемен-

том группы G. Поскольку группа $\mathbb{Q}(a,b)$ — подгруппа группы G, то по теореме 4 числа k и m сравнимы по модулю n в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$. Следовательно, существует такое целое число t, что $k = m + nt$. Тогда

$$(ka/n, mb/n) = (ma/n, mb/n) + (nta, 0b) = m(a/n, b/n) + nt(a, 0).$$

С другой стороны,

$$(ka/n, mb/n) = (ka/n, kb/n) - (0a, ntb) = k(a/n, b/n) - nt(0, b).$$

Таким образом, $G \subseteq \mathbb{Q}(a,b) \oplus \mathbb{Z}(0,b)$ и $G \subseteq \mathbb{Q}(a,b) \oplus \mathbb{Z}(a,0)$. Обратные включения очевидны. Следовательно,

$$G = \mathbb{Q}(a,b) \oplus \mathbb{Z}(0,b) = \mathbb{Q}(a,b) \oplus \mathbb{Z}(a,0).$$

Достаточность доказана, докажем необходимость.

Пусть группа $\mathbb{Q}(a,b)$ не является подгруппой группы G, но группа G разложима в прямую сумму своих подгрупп, $G = U \oplus V$. Тогда для любого простого числа p каждая подгруппа G^p группы G, во-первых, разложима в прямую сумму, $G^p = U^p \oplus V^p$, а во-вторых, группа $\mathbb{Q}^p(a,b)$ не является её подгруппой.

Поскольку $\mathbb{Z}(a,b) \subseteq G^p$, возможны два случая: либо группа $\mathbb{Z}(a,b)$ является подгруппой одного прямого слагаемого группы G^p, например $\mathbb{Z}(a,b) \subseteq U^p$, причём, очевидно, $\mathbb{Z}(a,b) \neq U^p$, либо группы $\mathbb{Z}(a,0)$ и $\mathbb{Z}(0,b)$ являются подгруппами различных прямых слагаемых группы G^p, например $\mathbb{Z}(a,0) \subseteq U^p$, $\mathbb{Z}(0,b) \subseteq V^p$. Так как группы U^p и V^p — это группы без кручения ранга 1, то в первом случае группа G^p содержит подгруппу $\mathbb{Q}^p(a,b)$, а это противоречит условию теоремы. Во втором случае $G^p \supseteq \mathbb{Q}^p a \oplus \mathbb{Q}^p b$, а это противоречит определению группы G^p. Таким образом, наше предположение о разложимости группы G^p, а значит и группы G, неверно. Следовательно, группа G неразложима. Теорема доказана. □

Лемма 10. *Пусть A и B — делимые рациональные группы, G — специальная группа. Тогда для любого целого положительного числа k и любых целых взаимно простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$ выполняется следующее условие: если сумма*

$$p_1^{-1}(n_1 a, m_1 b) + p_2^{-1}(n_2 a, m_2 b) + \ldots + p_k^{-1}(n_k a, m_k b),$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_k, m_1, m_2, \ldots, m_k$ — целые числа, причём для каждого номера $i = 1, 2, \ldots, k$ выполняются условия $1 \leqslant n_i < p_i$, $1 \leqslant m_i < p_i$, принадлежит группе G, то и каждый из элементов

$$p_1^{-1}(n_1 a, m_1 b),\ p_2^{-1}(n_2 a, m_2 b), \ldots,\ p_k^{-1}(n_k a, m_k b)$$

принадлежит группе G.

Доказательство. Проведём индукцию по числу k. Пусть $k = 2$, т. е. сумма пар

$$(x_1 a/p_1, y_1 b/p_1) + (x_2 a/p_2, y_2 b/p_2) = \big((x_1 p_2 + x_2 p_1)a/p_1 p_2, (y_1 p_2 + y_2 p_1)b/p_1 p_2\big)$$

принадлежит группе G. Если одна из пар $(x_1 a/p_1, y_1 b/p_1)$ и $(x_2 a/p_2, y_2 b/p_2)$ принадлежит группе G, то, очевидно, и другая пара также принадлежит группе G.

Поэтому предположим, что ни одна из пар $(x_1a/p_1, y_1b/p_1)$ и $(x_2a/p_2, y_2b/p_2)$ не принадлежит подпрямой сумме G групп A и B с индуцирующей группой $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Тогда по определению подпрямой суммы групп существуют такие целые числа y_1', y_2', что $1 \leqslant y_1' < p_1, 1 \leqslant y_2' < p_2$ и пары $(x_1a/p_1, y_1'b/p_1)$ и $(x_2a/p_2, y_2'b/p_2)$ принадлежат группе G. Значит, и сумма пар

$$(x_1a/p_1, y_1'b/p_1) + (x_2a/p_2, y_2'b/p_2) = \big((x_1p_2 + x_2p_1)a/p_1p_2, (y_1'p_2 + y_2'p_1)b/p_1p_2\big)$$

принадлежит группе G. Тогда по теореме 4 числа $y_1p_2 + y_2p_1$ и $y_1'p_2 + y_2'p_1$ сравнимы по модулю p_1p_2 в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$. Следовательно, в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ имеет место сравнение

$$(y_1 - y_1')p_2 + (y_2 - y_2')p_1 \equiv 0\,(p_1p_2).$$

Но поскольку для чисел y_1, y_1', y_2, y_2' выполняются условия

$$1 \leqslant |y_1 - y_1'| < p_1, \quad 1 \leqslant |y_2 - y_2'| < p_2,$$

то сумма $(y_1 - y_1')p_2 + (y_2 - y_2')p_1$ равна либо нулю, либо p_1p_2. Тогда в первом случае получаем, что

$$(y_1 - y_2')p_2 = (y_2' - y_2)p_1.$$

Следовательно, поскольку по условию числа p_1 и p_2 взаимно просты, то разность $y_1 - y_1'$ делится на число p_1, а разность $y_2' - y_2$ делится на число p_2. Во втором случае, как нетрудно видеть, получаются точно такие же выводы. Таким образом, в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ имеют место сравнения

$$y_1 \equiv y_1'\,(p_2), \quad y_2 \equiv y_2'\,(p_1),$$

и значит, пары $(x_1a/p_1, y_1b/p_1)$ и $(x_2a/p_2, y_2b/p_2)$ принадлежат подпрямой сумме G групп A и B с индуцирующей группой $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Предположим, что для любого числа пар-слагаемых, меньшего числа k, лемма выполняется. Тогда, взяв сумму пар

$$(x_1a/p_1, y_1b/p_1) + (x_2a/p_2, y_2b/p_2) + \ldots + (x_ka/p_k, y_kb/p_k)$$

и разбив её произвольным образом на сумму двух слагаемых, мы, используя предположение индукции и изложенные выше рассуждения, легко сможем показать, что каждая из пар

$$(x_1a/p_1, y_1b/p_1),\ (x_2a/p_2, y_2b/p_2), \ldots,\ (x_ka/p_k, y_kb/p_k)$$

принадлежит группе G. Следовательно, по принципу индукции мы можем сделать вывод, что лемма выполняется для любого числа пар-слагаемых. □

Теорема 11. *Пусть G — специальная группа. Тогда имеет место равенство*

$$G = \sum_{p \in P} G^p,$$

причём для любых различных простых чисел p и q справедливо равенство

$$G_p \cap G_q = G_A \oplus G_B,$$

где группы G_A и G_B — ядра подпрямой суммы G групп A и B.

Доказательство. Пусть A и B — делимые рациональные группы и G — специальная группа с образующим элементом (a, b), где a — элемент группы A, b — элемент группы B. Легко видеть, что для любого простого числа p группа G^p является подгруппой группы G. Следовательно,

$$G \supseteq \sum_{p \in P} G^p.$$

Если пара $(ka/n, mb/n)$, где числа k и m целые, взаимно простые с числом n, принадлежит группе G, то по теореме 4 она может быть представлена в виде

$$(ka/n, mb/n) = (k'a/n, m'b/n) + (sa, tb),$$

где s и t — целые числа, а k' и m' — наименьшие целые положительные числа, такие что k' сравнимо с k, а m' сравнимо с m по модулю n в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$, а пара $(k'a/n, m'b/n)$ может быть представлена в виде

$$(x_1 a/p_1^{t_1}, y_1 b/p_1^{t_1}) + (x_2 a/p_2^{t_2}, y_2 b/p_2^{t_2}) + \ldots + (x_r a/p_r^{t_r}, y_k b/p_k^{t_r}),$$

где по лемме 10 каждое слагаемое принадлежит группе G. Следовательно,

$$G \subseteq \sum_{p \in P} G^p.$$

Таким образом,

$$G = \sum_{p \in P} G^p.$$

Второе равенство в утверждении теоремы очевидно. Теорема доказана. □

Определение 12. Пусть G — специальная группа. Последовательность целых положительных чисел $(m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots)$ будем называть характеристической последовательностью группы G^p для данного образующего элемента (a, b), если для каждого номера i число m_i является наименьшим положительным числом, таким что элемент $(a/p^{-i}, m_i b/p^{-i})$ принадлежит p-специальной подгруппе G^p группы G, где p — простое число.

Предложение 13. *Пусть G — специальная группа. Последовательность целых положительных чисел $(m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots)$ является характеристической для некоторой p-специальной подгруппы G^p группы G тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

1) $0 < m_i < p^i$ *для каждого номера* $i = 1, 2, \ldots$;
2) $m_i \equiv m_{i-1}\ (p_{i-1})$ *для каждого номера* $i = 2, 3, \ldots$.

Утверждение непосредственно следует из определений подпрямой суммы и характеристической последовательности и теоремы 4.

Следствие 14. *Пусть G — специальная группа. Характеристическая последовательность группы G^p сходится к некоторому целому p-адическому числу — единичному элементу кольца целых p-адических чисел.*

Доказательство непосредственно следует из определения целого p-адического числа, а также из условия, что в данной последовательности отсутствуют нули.

Итак, на основании доказанных предложений мы можем сформулировать основную теорему.

Теорема 15. *Для любого простого числа p существует взаимно-однозначное соответствие между множеством всех p-специальных групп с фиксированным образующим элементом и мультипликативной группой обратимых элементов кольца целых p-адических чисел $\hat{\mathbb{Z}}_p$. Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством всех специальных групп с фиксированным образующим элементом и мультипликативной группой обратимых элементов кольца универсальных чисел $\prod\limits_{p\in P}\hat{\mathbb{Z}}_p$.*

Предложение 16. *Пусть G — специальная группа, и пусть последовательность целых положительных чисел $(m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots)$ является характеристической для группы G^p, где p — простое число. Последовательность целых положительных чисел $(m'_1, m'_2, \ldots, m'_i, \ldots)$ также является характеристической для группы G^p тогда и только тогда, когда $m_i + m'_i = p^i$ для каждого номера $i = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. Пусть A и B — делимые рациональные группы и G — специальная группа с образующими элементами (a, b) и $(a, -b)$, где a, a' — элементы группы A, b, b' — элементы группы B. Пусть для некоторого целого положительного числа i пара $(a/p^i, m_i b/p^i)$, где p — простое число, m_i — целое положительное число, удовлетворяющее условию $1 \leqslant m_i < p^i$, принадлежит группе G^p. Тогда по предложению 3 пара $(a/p^i, m'_i(-b)/p^i)$, где $m'_i = p^i - m_i$, также принадлежит группе G^p, причём m'_i удовлетворяет условию $1 \leqslant m'_i < p_i$. Отсюда и следует данное предложение. □

Заметим, что если G — специальная группа и μ_i — характеристическая последовательность подгруппы G^{p_i} группы G, где p_i — i-е простое число, то, как нетрудно заметить, система последовательностей $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i, \ldots\}$ является инвариантом группы G.

Предложение 17. *Пусть G — специальная группа. Группа G содержит в качестве подгруппы делимую рациональную группу тогда и только тогда, когда для каждого номера i характеристическая последовательность μ_i подгруппы G^{p_i} есть $(1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$. Другими словами, группа G содержит в качестве подгруппы делимую рациональную группу тогда и только тогда, когда соответствующее ей универсальное число является единицей кольца универсальных чисел.*

Доказательство. Специальная группа G — это группа ранга 2. Следовательно, если существует делимая подгруппа специальной группы, то она единственная и является группой ранга 1, изоморфной группе $\mathbb{Q}$. Откуда вытекает, что если пара (a, b) — образующий элемент группы G, то для каждого номера i

пара $(a/p_i, b/p_i)$ является элементом группы G^{p_i}. Значит, последовательность $(1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ является характеристической для группы G^{p_i}.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть G — специальная группа с образующим элементом (a, b), и пусть для любого номера i характеристическая последовательность группы G^{p_i} есть $(1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$. Тогда группа G для каждого i-го простого числа p_i и для каждого целого положительного числа j содержит подмножество элементов вида $(a/p_i^j, b/p_i^j)$, которое, очевидно, образует делимую подгруппу D группы G.

Покажем, что если D' также является делимой подгруппой некоторой специальной группы G с образующим элементом (a, b), то $D' = D$. Действительно, пусть для i-го простого числа p_i и для целого положительного числа k элемент $u = (a/p_i, kb/p_i)$ принадлежит группе D'. Так как D' — группа ранга 1, изоморфная группе $\mathbb{Q}$, то $D' = \mathbb{Q}u$. Тогда если $k \neq 1$, то элемент $u/k = (a/kp_i, b/p_i)$ принадлежит группе D', но не принадлежит по теореме 4 группе G. Следовательно, либо D' не является подгруппой группы G, либо $k = 1$, а тогда $D' = D$.

Далее предположим, что для некоторых целых положительных чисел i и j в характеристической последовательности μ_i группы G^{p_i} $\mu_i(j) = k \neq 1$. Следовательно, группа G содержит элемент $(a/p_i, kb/p_i)$, причём число k не сравнимо с 1 по модулю p_i в кольце целых чисел. Пусть группа G содержит делимую подгруппу D. Тогда группа G содержит элемент $(a/p_i, b/p_i)$. Но по теореме 4 числа k и 1 должны быть сравнимы в кольце целых чисел по модулю p_i, что противоречит приведённому выше условию и определению характеристической последовательности. Приходим к выводу, что группа G в этом случае не содержит делимой подгруппы.

Предложение доказано. □

Лемма 18. *Пусть A и B — делимые рациональные группы, G и G' — специальные (p-специальные) группы с фиксированным образующим элементом (a, b), где a — элемент группы A, b — элемент группы B. Если группы G и G' изоморфны и отображение $f\colon G \to G'$ — соответствующий изоморфизм, то $f(G_A \oplus G_B) = (G_A \oplus G_B)$.*

Доказательство. Пусть G и G' — специальные (p-специальные) группы с фиксированным образующим элементом (a, b), φ_A и φ'_A — определяющие эпиморфизмы для групп G и G' соответственно, отображающие группу A на группу $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Так как $A = \mathbb{Q}a$ ($A = \mathbb{Q}_p a$), то $G_A = G'_A = \langle a \rangle$, т. е. $\varphi_A(G_A) = \varphi'_A(G'_A) = 0$. Если элемент x принадлежит группе G_A, то

$$\varphi'_A\big(f(x)\big) = f\big(\varphi_A(x)\big) = f(0) = 0. \tag{1}$$

Следовательно, $f(x) \in G'_A = G_A$.

Если же элемент $f(x)$ не принадлежит группе $G'_A = G_A$, то, поскольку отображение f является изоморфизмом, из равенств (1) следует, что элемент x также не принадлежит группе G_A.

Аналогично доказывается, что элемент y принадлежит группе G_B тогда и только тогда, когда элемент $f(y)$ принадлежит группе G_B. □

Теорема 19. *Пусть A и B — делимые рациональные группы, G_1 и G_2 — специальные (p-специальные) группы с фиксированным образующим элементом (a, b), где a — элемент группы A, b — элемент группы B, которым соответствуют универсальные (p-адические) числа ρ_1 и ρ_2 (δ_1 и δ_2). Группы G_1 и G_2 изоморфны тогда и только тогда, когда $\rho_1 = \pm\rho_2$ ($\delta_1 = \pm\delta_2$).*

Доказательство. Сначала пусть G_1 и G_2 — p-специальные группы с фиксированным образующим элементом (a, b), которым соответствуют p-адические числа δ_1 и δ_2, и пусть отображение $f\colon G_1 \to G_2$ — изоморфизм. Тогда по лемме 18 имеем

$$(G_2)_A = f\big((G_1)_A\big) = (G_1)_A = \langle a\rangle, \quad (G_2)_B = f\big((G_1)_B\big) = (G_1)_B = \langle b\rangle.$$

Следовательно,

$$f(a) = \pm a, \quad f(b) = \pm b.$$

Тогда для любых целых чисел k и m имеем

$$\begin{aligned} f\big((ka, mb)\big) &= f\big((ka, 0) + (0, mb)\big) = f\big(k(a, 0) + m(0, b)\big) = \\ &= f\big(k(a, 0)\big) + f\big(m(0, b)\big) = kf\big((a, 0)\big) + mf\big((0, b)\big) = \\ &= k(\pm a, 0) + m(0, \pm b) = (\pm ka, 0) + (0, \pm mb) = (\pm ka, \pm mb). \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть p — простое число, и пусть для любых целых чисел k, m, взаимно простых с числом p, и натуральных i, j выполняется равенство

$$f\big((ka/p^i, mb/p^i)\big) = (k'a/p^j, m'b/p^j),$$

причём числа k' и m' также взаимно просты с числом p. Тогда

$$\begin{aligned} f\big((ka, mb)\big) &= f\big(p^i(ka/p^i, mb/p^i)\big) = \\ &= p^i f\big((ka/p^i, mb/p^i)\big) = p^i(k'a/p^j, m'b/p^j) = (k'a/p^{i-j}, m'b/p^{i-j}). \end{aligned}$$

Но по равенству (2) получаем, что

$$k'/p^{i-j} = \pm k, \quad m'/p^{i-j} = \pm m.$$

Следовательно, $i = j$, $k' = \pm k$, $m' = \pm m$. Тогда если отображение $f\colon G_1 \to G_2$ — изоморфизм, то для любого простого числа p, целого числа m, взаимно простого с числом p, и натурального числа i образ элемента $(a/p^i, mb/p^i)$ при изоморфизме f равен одному из значений

$$(a/p^i, mb/p^i),\ (-a/p^i, -mb/p^i),\ (-a/p^i, mb/p^i),\ (a/p^i, -mb/p^i).$$

Отсюда следует, что в первом и втором случаях $\delta_1 = \delta_2$, а в третьем и четвёртом случаях $\delta_1 = -\delta_2$.

Докажем утверждение в обратную сторону. Если $\delta_1 = -\delta_2$, то отображение $f\colon G_1 \to G_2$, определяемое условием $f\big((ra, tb)\big) = (ra, -tb)$, для любых

рациональных чисел r и t, принадлежащих группе $\mathbb{Q}^p$, очевидно, является изоморфизмом. Если же $\delta_1 = \delta_2$, то группы G_1 и G_2 совпадают.

Пусть G_1 и G_2 — специальные группы. Тогда из приведённых выше в данном доказательстве рассуждений следует, что группы G_1 и G_2 изоморфны тогда и только тогда, когда для любого простого числа p изоморфны группы G_1^p и G_2^p, причём изоморфизм данных групп продолжается до изоморфизма групп G_1 и G_2. Таким образом, мы можем сделать вывод, что если группы G_1 и G_2 изоморфны, то для соответствующим им универсальных чисел ρ_1 и ρ_2 выполняется равенство $\rho_1 = \pm\rho_2$.

Обратное утверждение для специальных групп доказывается аналогично соответствующему утверждению для p-специальных групп.

Теорема доказана. □

Литература

[1] Куликов Л. Я. Подпрямые разложения счётных абелевых групп без кручения // X Всесоюзн. алгебр. коллоквиум. — Новосибирск, 1969. — С. 18—19.

[2] Куликов Л. Я. О подпрямых суммах абелевых групп без кручения первого ранга // XII Всесоюзн. алгебр. коллоквиум. — Свердловск, 1973. — С. 30.

[3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974. — Т. 1.

Статья поступила в редакцию в мае 2006 г.