Категория матриц, представляющая две категории абелевых групп

А. А. ФОМИН
Московский педагогический государственный университет

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, модуль, двойственность категорий.

Аннотация

Матрице с τ-адическими элементами ставятся в соответствие одновременно факторно делимая абелева группа и абелева группа без кручения конечного ранга. Эти соответствия являются соответственно эквивалентностью и двойственностью категорий.

Abstract

A. A. Fomin, A category of matrices representing two categories of Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 3, pp. 223—244.

Every τ-adic matrix represents both a quotient divisible group and a torsion free finite-rank group. These representations are an equivalence and a duality of categories, respectively.

1. Введение

Значительный интерес к классу абелевых групп без кручения конечного ранга возник после открытия Л. С. Понтрягиным [20] в 1934 году его двойственности. В 1937—1938 годах А. Г. Курош [19], А. И. Мальцев [1] и Д. Дэрри [7] получили матричное описание групп этого класса. Понятия квазиизоморфизма и квазигомоморфизма были введены в [18] в 1957 году.

Категория $\mathcal{QTF}$ абелевых групп без кручения конечного ранга с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов является классическим предметом исследований. Класс $\mathcal{G}$ смешанных самомалых групп G, для которых фактор-группа по периодической части $G/T(G)$ является делимой конечного ранга, активно изучался в 1990-е годы многими авторами [4, 5, 8, 11, 14, 16, 17, 21]. Понятие факторно делимой группы было введено в [15] в 1998 году. Класс факторно делимых групп включает в себя как класс $\mathcal{G}$, так и классические факторно делимые группы без кручения, введённые Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом в 1961 году [6]. В [15] рассматривалась категория $\mathcal{QD}$ факторно делимых групп с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов. Там же были построены взаимно-обратные функторы двойственности категорий $\mathcal{QD} \xrightarrow{d} \mathcal{QTF}$ и $\mathcal{QTF} \xrightarrow{d'} \mathcal{QD}$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 3, с. 223—244.

В настоящей статье вводится категория $\mathcal{RM}$ матриц специального вида с τ-адическими элементами и доказывается, что она эквивалентна категории $\mathcal{QD}$ и двойственна категории $\mathcal{QTF}$. Таким образом, получается коммутативная диаграмма двойственностей и эквивалентностей категорий

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{RM} \arrow[dl, shift left, "c"] \arrow[dr, shift left, "b"] & \\
\mathcal{QD} \arrow[ur, shift left, "c'"] \arrow[rr, shift left, "d"] & & \mathcal{QTF}. \arrow[ul, shift left, "b'"] \arrow[ll, shift left, "d'"]
\end{tikzcd}$$

Функторы двойственности b и b' можно рассматривать как новую версию описания Куроша—Мальцева—Дэрри. При этом заметим, что наш подход ближе к подходу А. И. Мальцева [1], который отличается от более известного подхода Куроша—Дэрри.

В последнем разделе статьи даётся новая интерпретация функторов двойственности d и d' без использования матриц (теорема 6), также устанавливается связь этой двойственности с двойственностью Л. С. Понтрягина [20].

Отметим, что основные конструкции этой статьи могут быть обобщены на модули над дедекиндовыми кольцами в духе статьи [13].

Автор выражает благодарность профессору Отто Муцбауэру за плодотворное обсуждение предмета и существенный вклад в данную статью.

Всюду в этой статье под словом «группа» понимается абелева группа, записанная аддитивно, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\hat{\mathbb{Z}}_p$ и $\hat{\mathbb{Q}}_p$ обозначают соответственно кольцо целых чисел, поле рациональных чисел, кольцо целых p-адических чисел и поле p-адических чисел. Кольцо $\hat{\mathbb{Z}} = \prod\limits_p \hat{\mathbb{Z}}_p$ является $\mathbb{Z}$-адическим пополнением $\mathbb{Z}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}$ называется кольцом универсальных чисел.

Мы применяем характеристики и типы обычным образом, как в [3], обозначая нулевую характеристику и нулевой тип через 0. Пусть τ и σ — типы, содержащие характеристики (m_p) и (k_p) соответственно. Мы определяем операции

$$\begin{aligned}
\tau \wedge \sigma &= [(m_p) \wedge (k_p)] = [(\min\{m_p,\, k_p\})],\\
\tau \vee \sigma &= [(m_p) \vee (k_p)] = [(\max\{m_p,\, k_p\})],\\
\tau + \sigma &= [(m_p) + (k_p)] = [(m_p + k_p)].
\end{aligned}$$

Если $(m_p) \geqslant (k_p)$, то $\tau - \sigma = [(m_p) - (k_p)] = [(m_p - k_p)]$, мы полагаем при этом, что $\infty - \infty = 0$. Операции $+$ и $-$ считаем слабее операций $\wedge$ и $\vee$, поэтому запись $\tau - \sigma \wedge \delta$ означает $\tau - (\sigma \wedge \delta)$. $T(A)$ и $T_p(A)$ обозначают периодическую часть группы A и её p-примарную компоненту. Если $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset A$, то $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ — подгруппа, порождённая этими элементами, а $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle_*$ — сервантная оболочка, т. е. подгруппа, состоящая из всех элементов группы A, попадающих в подгруппу $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ при домножении на некоторые ненулевые целые числа. В частности, $T(A) \subseteq \langle x_1, \ldots, x_n \rangle_*$. Если к тому же группа A является модулем над кольцом R, то $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle_R$ обозначает R-подмодуль, порождённый этими элементами. Система элементов $x_1, \ldots, x_n$ группы или модуля называется линейно независимой над $\mathbb{Z}$, если из равенства $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ с целыми коэффициентами следует, что $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Остальные обозначения стандартны и соответствуют [3].

2. τ-адические числа

Для характеристики $\chi = (m_p)$ положим $K_p = \mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$, если $m_p < \infty$, и $K_p = \hat{\mathbb{Z}}_p$, если $m_p = \infty$, и определим кольцо $\mathbb{Z}_\chi = \prod\limits_p K_p$. Для элемента $(\alpha_p) \in \mathbb{Z}_\chi$ обозначим через h_p наибольшую степень p, такую что число p^{h_p} делит элемент α_p в кольце K_p, а через g_p — наименьшую степень p, такую что $p^{g_p}\alpha_p = 0$. Если $m_p = \infty$ и $\alpha_p \neq 0$, то $0 \leqslant h_p < \infty$ и $g_p = \infty$. В любом случае $h_p + g_p = m_p$ для всех простых чисел p. Поскольку $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_\chi = \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_\mu$ для эквивалентных характеристик χ и μ, то следующее определение имеет смысл.

Определение 1. Пусть τ — некоторый тип. $\mathbb{Q}$-алгебра $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_\chi$ для характеристики $\chi \in \tau$ называется кольцом τ-адических чисел. Кольцо или $\hat{\mathbb{Z}}$-модуль $\mathbb{Z}_\chi$ называется ассоциированным с $\mathbb{Q}(\tau)$. Элемент $(\alpha_p) \in \mathbb{Z}_\chi$ называется представителем τ-адического числа $\alpha = 1 \otimes (\alpha_p)$. Типы $\mathrm{type}(\alpha) = [(h_p)]$ и $\mathrm{cotype}(\alpha) = [(g_p)]$ называются соответственно типом и котипом (или дуальным типом) τ-адического числа α.

Кольцо $\mathbb{Q}(\tau)$ может рассматриваться как обобщение кольца $\mathbb{Z}_{p^m}$. Тип и котип τ-адического числа правильно определены и являются аналогами соответственно высоты и порядка элемента. В частности, $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{K}$, если $\tau = \mathrm{type}(\mathbb{Q})$.

Каждое τ-адическое число α может быть представлено в виде $\alpha = \frac{r}{s} \otimes (\alpha_p)$, где $0 \neq \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, относительно некоторого ассоциированного кольца $\mathbb{Z}_\chi$. Если $\beta = \frac{r_1}{s_1} \otimes (\beta_p)$ является представлением τ-адического числа β относительно другого ассоциированного кольца, то $\alpha = \beta$ тогда и только тогда, когда $rs_1\alpha_p = r_1s\beta_p$ для всех простых чисел p с $m_p = \infty$ и для почти всех, т. е. всех, кроме конечного числа, простых чисел p с $m_p < \infty$. В частности, кольца K_p также совпадают для этого множества простых чисел. Отсюда видно, что $\mathbb{Q}(\tau)$ зависит от типа, но не от характеристики. Пусть $\chi = (m_p) \in \tau$ — характеристика типа τ. Тогда

$$\mathbb{Z}_\chi = \prod_p K_p = \prod_{m_p<\infty} K_p \oplus \prod_{m_p=\infty} \hat{\mathbb{Z}}_p \subset \mathbb{L} := \prod_{m_p<\infty} K_p \oplus \prod_{m_p=\infty} \hat{\mathbb{Q}}_p.$$

Таким образом, $\mathbb{L}$ получается из $\mathbb{Z}_\chi$ заменой компонент $\hat{\mathbb{Z}}_p$ на $\hat{\mathbb{Q}}_p$. Рассматриваемые как группы, $\mathbb{Z}_\chi$ и $\mathbb{L}$ имеют одинаковую периодическую часть, именно

$$T(\mathbb{Z}_\chi) = T(\mathbb{L}) = \bigoplus_{m_p<\infty} K_p.$$

Множество

$$S = \{(\alpha_p) \in \mathbb{L} \mid \alpha_p \in \hat{\mathbb{Z}}_p \text{ почти для всех } p \text{ с } m_p = \infty\}$$

является подкольцом кольца $\mathbb{L}$, его периодическая часть $T(S) = T(\mathbb{L})$ является идеалом, и $\mathbb{Q}(\tau) = S/T(S)$. Это представление τ-адических чисел без тензорного умножения на $\mathbb{Q}$. При таком представлении любое τ-адическое число, а не только числа вида $1 \otimes (\alpha_p)$, может быть представлено элементом кольца S. Элемент кольца S, содержащийся в смежном классе $S/T(S)$, будет называться представителем τ-адического числа α, тогда все элементы кольца S представляют τ-адические числа. $\hat{\mathbb{Z}}$-модуль S, вообще говоря, не является ассоциированным с $\mathbb{Q}(\tau)$, однако любой представитель τ-адического числа нулевого типа порождает в S $\hat{\mathbb{Z}}$-подмодуль, ассоциированный с $\mathbb{Q}(\tau)$.

В дальнейшем мы будем пользоваться элементарными свойствами τ-адических чисел, список которых приводится ниже. Они являются прямыми следствиями определения, многие из них можно найти в [2] и в других статьях. Пусть σ и τ — типы, а $\alpha, \beta, \ldots$ — τ-адические числа.

1. $\operatorname{type}(\alpha) \leqslant \tau$ и $\operatorname{cotype}(\alpha) \leqslant \tau$.
2. $\operatorname{type}(\alpha) + \operatorname{cotype}(\alpha) = \tau$.
3. $\operatorname{cotype}(\alpha) = \tau - \operatorname{type}(\alpha)$.
4. $\operatorname{type}(\alpha) \geqslant \tau - \operatorname{cotype}(\alpha)$.
5. Три утверждения равносильны: $\alpha = 0$, $\operatorname{type}(\alpha) = \tau$ и $\operatorname{cotype}(\alpha) = 0$.
6. α делит β тогда и только тогда, когда $\operatorname{type}(\alpha) \leqslant \operatorname{type}(\beta)$.
7. $\operatorname{type}(\alpha\beta) = \big(\operatorname{type}(\alpha) + \operatorname{type}(\beta)\big) \wedge \tau$.
8. α является обратимым элементом тогда и только тогда, когда $\operatorname{type}(\alpha) = 0$.
9. Для любого конечного множества τ-адических чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ существует их наибольший общий делитель НОД$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
10. Любой наибольший общий делитель τ-адических чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ представляется в виде НОД$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \beta_1\alpha_1 + \ldots + \beta_n\alpha_n$ для подходящих τ-адических чисел $\beta_1, \ldots, \beta_n$.
11. Всякий конечно порождённый идеал кольца $\mathbb{Q}(\tau)$ является главным.
12. Множество $I_\sigma = \{\beta \in \mathbb{Q}(\tau) \mid \operatorname{type}(\beta) \geqslant \sigma\}$ является идеалом кольца $\mathbb{Q}(\tau)$. При этом для любого $\alpha \in \mathbb{Q}(\tau)$ имеет место равенство $\alpha\mathbb{Q}(\tau) = I_{\operatorname{type}(\alpha)}$.
13. $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{K}/I_\tau$, где $I_\tau = \{\gamma \in \mathbb{K} \mid \operatorname{type}(\gamma) \geqslant \tau\}$.
14. $\operatorname{cotype}(\alpha) \leqslant \sigma \wedge \tau$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{type}(\alpha) \geqslant \tau - \sigma \wedge \tau$.

3. Гомоморфизмы и квазигомоморфизмы

Элементы $\mathbb{K}$-модуля $\mathbb{Q} \otimes \operatorname{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}}(M, M')$ называются квазигомоморфизмами из M в M', где M и M' — $\hat{\mathbb{Z}}$-модули.

3.1. Циклические модули

Вначале изучим $\mathbb{K}$-модульные гомоморфизмы из $\mathbb{Q}(\tau)$ в $\mathbb{Q}(\sigma)$, а также квазигомоморфизмы ассоциированных с ними $\hat{\mathbb{Z}}$-модулей для произвольных типов

τ и σ. Для этого рассмотрим идеал

$$I_{\sigma-\sigma\wedge\tau} = \{\beta \in \mathbb{Q}(\sigma) \mid \mathrm{type}(\beta) \geqslant \sigma - \sigma\wedge\tau\} = \{\beta \in \mathbb{Q}(\sigma) \mid \mathrm{cotype}(\beta) \leqslant \sigma\wedge\tau\}$$

в кольце $\mathbb{Q}(\sigma)$.

Лемма 1. *Пусть M и M' являются $\hat{\mathbb{Z}}$-модулями, ассоциированными с $\mathbb{K}$-модулями $\mathbb{Q}(\tau)$ и $\mathbb{Q}(\sigma)$ соответственно, т. е. $M = \mathbb{Z}_\chi$ и $M' = \mathbb{Z}_\mu$, где $\chi \in \tau$ и $\mu \in \sigma$. Тогда при естественных отождествлениях*

$$\mathbb{Q} \otimes \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}}(M, M') = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{Q}(\tau), \mathbb{Q}(\sigma)\big) = I_{\sigma-\sigma\wedge\tau}.$$

Доказательство. Пусть $\chi = (m_p) \in \tau$ и $\mu = (k_p) \in \sigma$, $K_p = \mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$, если $m_p < \infty$, или $K_p = \hat{\mathbb{Z}}_p$, если $m_p = \infty$, и $K'_p = \mathbb{Z}/p^{k_p}\mathbb{Z}$ или $K'_p = \hat{\mathbb{Z}}_p$. Пусть гомоморфизм $f\colon K_p \to K'_p$, определённый как $f(1) = \alpha'_p \in K'_p$, является локальной компонентой некоторого гомоморфизма в $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}}(M, M')$, где $M = \mathbb{Z}_\chi$ и $M' = \mathbb{Z}_\mu$. Порядок элемента α'_p меньше либо равен $p^{\min\{k_p,\, m_p\}}$. Отсюда следует, что α'_p делится на p^{l_p}, где $l_p = k_p - \min\{k_p, m_p\}$. Заметим, что $l_p = \infty$ тогда и только тогда, когда $k_p = \infty$ и $m_p < \infty$. Делимость α'_p на p^∞ означает, что $\alpha'_p = 0$. Таким образом, $\alpha'_p \in p^{l_p}K'_p$.

С другой стороны, если элемент α'_p делится на p^{l_p}, то его порядок α'_p меньше или равен $p^{\min\{k_p, m_p\}}$, и тогда существует такой $\hat{\mathbb{Z}}_p$-модульный гомоморфизм $f\colon K_p \to K'_p$, что $f(1) = \alpha'_p$. Отождествляя f с α'_p, мы получаем равенство

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}_p}(K_p,\, K'_p) = p^{l_p}K'_p.$$

Из этих локальных равенств по всем простым числам p следует, что

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}}(M, M') = \prod_p \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}_p}(K_p, K'_p) = \prod_p p^{l_p}K'_p.$$

Тензорно домножая на $\mathbb{Q}$, мы получаем

$$\mathbb{Q} \otimes \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}}(M, M') = I_{\sigma-\sigma\wedge\tau} \subset \mathbb{Q}(\sigma).$$

Каждый элемент $\mathbb{K}$-модуля $\mathbb{Q} \otimes \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}}(M, M')$ может быть представлен как $r \otimes f$, где $r \in \mathbb{Q}$ и $f \in \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}}(M, M')$. Мы определим $\mathbb{K}$-модульный гомоморфизм

$$\eta\colon \mathbb{Q} \otimes \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}}(M, M') \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{Q}(\tau), \mathbb{Q}(\sigma)\big)$$

как $\eta(r \otimes f)\colon q \otimes x \mapsto rq \otimes f(x)$ для любых $q \otimes x \in \mathbb{Q}(\tau)$, где $q \in \mathbb{Q}$ и $x \in M$. Гомоморфизм η является $\mathbb{K}$-модульным изоморфизмом. Отождествляя элементы по нему, мы получаем окончательно

$$\mathbb{Q} \otimes \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}}(M, M') = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{Q}(\tau), \mathbb{Q}(\sigma)\big). \qquad \square$$

Идеал $I_{\sigma-(\sigma-\sigma\wedge\tau)}$ кольца $\mathbb{K}$ совпадает с ядром любого $\mathbb{K}$-модульного гомоморфизма $g\colon \mathbb{K} \to \mathbb{Q}(\sigma)$, для которого $\mathrm{type}\big(g(1)\big) = \sigma - \sigma\wedge\tau$. Таким образом,

$$\mathrm{Im}\, g = I_{\sigma-\sigma\wedge\tau} \cong \mathbb{K}/I_{\sigma-(\sigma-\sigma\wedge\tau)} = \mathbb{Q}\big(\sigma - (\sigma - \sigma\wedge\tau)\big).$$

Заметим, что $\sigma - (\sigma - \sigma\wedge\tau) \leqslant \sigma\wedge\tau$ и равенство не всегда имеет место.

Определение 2. Пусть $\alpha \in I_{\sigma-\sigma\wedge\tau} \subset \mathbb{Q}(\sigma)$ и $\beta \in \mathbb{Q}(\tau)$. Следуя лемме 1, мы можем определить умножение $\circ$ равенством

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha = f(\beta) \in \mathbb{Q}(\sigma),$$

где $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{Q}(\tau), \mathbb{Q}(\sigma)\big)$ и $f(1) = \alpha$.

Можно дать эквивалентное определение этого умножения. Поскольку $\mathbb{Q}(\sigma) = \mathbb{K}/I_\sigma$ и $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{K}/I_\tau$ по свойству 13 τ-адических чисел, то элементы представляются в виде $\alpha = \alpha_1 + I_\sigma$, $\beta = \beta_1 + I_\tau$, где $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{K}$ — универсальные числа. Тогда $\beta \circ \alpha = \beta_1\alpha_1 + I_\sigma$. При условии, что $\mathrm{type}(\alpha) \geqslant \sigma - \sigma \wedge \tau$, это умножение правильно определено. Отметим следующие свойства умножения $\circ$.

1. $I_{\sigma-\sigma\wedge\tau}$ является модулем над кольцом $\mathbb{Q}(\tau)$ с умножением на скаляры $\circ$.
2. $\mathrm{type}(\alpha \circ \beta) = \big(\mathrm{type}(\alpha) + \mathrm{type}(\beta)\big) \wedge \sigma$.
3. Пусть $\beta_1 \in \mathbb{Q}(\tau_1)$, $\beta_2 \in \mathbb{Q}(\tau_2)$, $\beta_3 \in \mathbb{Q}(\tau_3)$ и $\mathrm{type}(\beta_1) \geqslant \tau_1 - \tau_1 \wedge \tau_2$, $\mathrm{type}(\beta_2) \geqslant \tau_2 - \tau_2 \wedge \tau_3$. Тогда $\mathrm{type}(\beta_1 \circ \beta_2) \geqslant \tau_1 - \tau_1 \wedge \tau_3$ и $\beta_1 \circ (\beta_2 \circ \beta_3) = (\beta_1 \circ \beta_2) \circ \beta_3$.

3.2. Конечно представимые модули

Напомним, что $\mathbb{K}$-модуль M называется *конечно представимым* (или конечно связанным), если существует точная последовательность

$$\mathbb{K}^r \longrightarrow \mathbb{K}^s \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

для некоторых натуральных чисел r и s.

Теорема 1 ([10]). *Конечно представимые $\mathbb{K}$-модули — это в точности модули вида $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} \mathbb{Q}(\tau_i)$, где $\tau_1, \ldots, \tau_m$ — некоторые типы.*

С помощью леммы 1 легко описать гомоморфизмы конечно представимых $\mathbb{K}$-модулей.

Определение 3. Произвольная конечная последовательность типов $\Upsilon = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$ называется обобщённым типом. Через M_Υ обозначается множество матриц $A = \|\alpha_{ij}\|$ размера $m \times n$, где n — произвольное натуральное число, таких что i-я строка $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$ матрицы A состоит из τ_i-адических чисел для каждого $i = 1, \ldots, m$.

Пусть $\Sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ — другой обобщённый тип. Мы определим множество $\mathrm{M}_\Sigma^\Upsilon$ как подмножество множества M_Σ, состоящее из матриц $\Delta = \|\beta_{ij}\|$ размера $k \times m$, таких что $\mathrm{type}(\beta_{ij}) \geqslant \sigma_i - \sigma_i \wedge \tau_j$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Умножение $\mathrm{M}_\Sigma^\Upsilon \times \mathrm{M}_\Upsilon \to M_\Sigma$ определяется как $\Delta A = (\gamma_{ij}) \in \mathrm{M}_\Sigma$, матрица размера $k \times n$, для которой

$$\gamma_{ij} = \beta_{i1} \circ \alpha_{1j} + \ldots + \beta_{im} \circ \alpha_{mj}.$$

Это обычное произведение матриц, при котором элементы матриц перемножаются с использованием операции $\circ$. Благодаря ассоциативности умножения $\circ$ (свойство 3) умножение матриц также ассоциативно в следующем смысле. Если

$A \in \mathrm{M}_{\Upsilon}$, $\Delta \in \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Upsilon}$ и $\Delta_1 \in \mathrm{M}_{\Omega}^{\Sigma}$, где Υ, Σ, Ω — обобщённые типы, то $(\Delta_1\Delta)A = \Delta_1(\Delta A)$.

Заменив в прямой сумме $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} \mathbb{Q}(\tau_i)$ каждое слагаемое $\mathbb{Q}(\tau_i)$ на ассоциированный с ним $\hat{\mathbb{Z}}$-модуль, мы получим $\hat{\mathbb{Z}}$-модуль, который называется $\hat{\mathbb{Z}}$-модулем, ассоциированным с конечно представимым $\mathbb{K}$-модулем $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} \mathbb{Q}(\tau_i)$.

Теорема 2. *Пусть* $M = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \mathbb{Q}(\tau_i)$ *и* $N = \bigoplus\limits_{j=1}^{k} \mathbb{Q}(\sigma_j)$ — *конечно представимые* $\mathbb{K}$-*модули,* M' *и* N' — *соответствующие им ассоциированные* $\hat{\mathbb{Z}}$-*модули,* $\Upsilon = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$ *и* $\Sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ — *соответствующие обобщённые типы. Тогда*

$$\mathbb{Q} \otimes \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}}(M', N') = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, N) = \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Upsilon}.$$

Доказательство. Пусть $M' = M_1' \oplus \ldots \oplus M_m'$ и $N' = N_1' \oplus \ldots \oplus N_k'$, где M_j' и N_i' — $\hat{\mathbb{Z}}$-модули, ассоциированные с соответствующими прямыми слагаемыми $\mathbb{K}$-модулей M and N. Тогда, проводя отождествления, как в лемме 1, мы получим

$$\mathbb{Q} \otimes \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}}(M', N') = \mathbb{Q} \otimes \prod_{i,j} \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}}(M_j', N_i') = \prod_{i,j} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{Q}(\tau_j), \mathbb{Q}(\sigma_i)\big) =$$
$$= \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, N) = \prod_{i,j} I_{\sigma_i - \sigma_i \wedge \tau_j} = \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Upsilon}. \quad \square$$

Изоморфизм теоремы 2 можно выразить в более явной форме. Для этого мы выберем естественные базисы так, что $M = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} y_i\mathbb{Q}(\tau_i)$ и $N = \bigoplus\limits_{j=1}^{k} v_j\mathbb{Q}(\sigma_j)$. Каждая матрица $\Delta \in \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Upsilon}$ соответствует $\mathbb{K}$-модульному гомоморфизму $\varphi\colon M \to N$, который определяется матричным равенством

$$(\varphi y_1, \ldots, \varphi y_m) = (v_1, \ldots, v_k)\Delta.$$

Пусть $x = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_m y_m \in M$, или в матричной форме $x = (y_1, \ldots, y_m)[x]$, где $[x] = (\alpha_i)$ — столбец координат элемента x относительно базиса $y_1, \ldots, y_m$. Тогда

$$\varphi x = (\varphi y_1, \ldots, \varphi y_m)[x] = (v_1, \ldots, v_k)\Delta[x].$$

Обозначая столбец координат элемента φx относительно базиса $v_1, \ldots, v_k$ через $[\varphi x]$, мы получаем $[\varphi x] = \Delta[x]$.

3.3. Дефект матрицы

Теперь рассмотрим специальный случай, когда обобщённый тип $\Upsilon = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$ является произвольным, а обобщённый тип $\Sigma = (\tau)$ состоит из единственного типа τ. Пусть $\Delta = (\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Upsilon}$, т. е. $\mathrm{type}(\beta_i) \geqslant \tau - \tau \wedge \tau_i$, и $A \in \mathrm{M}_{\Upsilon}$. Строка τ-адических чисел

$$\Delta A = \beta_1 \circ (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}) + \ldots + \beta_m \circ (\alpha_{m1}, \ldots, \alpha_{mn})$$

называется *τ-комбинацией* строк матрицы A с коэффициентами $\beta_1, \ldots, \beta_m$.

Назовём τ-комбинацию *простой*, если её коэффициенты взаимно просты в совокупности, т. е. НОД$(\beta_1, \dots, \beta_m) = 1$. *Дефектом* матрицы $A \in \mathrm{M}_\Upsilon$ называется наибольший тип τ, для которого существует простая τ-комбинация строк этой матрицы, равная нулевой строке.

Обозначим через $I \in \mathrm{M}_\Upsilon$ единичную матрицу, т. е. $I = \|\delta_{ij}\|$ имеет размер $m \times m$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ii} = 1 \in \mathbb{Q}(\tau_i)$ для всех i.

Теорема 3. *Для обобщённого типа $\Upsilon = (\tau_1, \dots, \tau_m)$ и матрицы $A \in \mathrm{M}_\Upsilon$ следующие условия равносильны.*

1. *A имеет нулевой дефект.*
2. *Столбцы матрицы A порождают $\mathbb{K}$-модуль $M = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \mathbb{Q}(\tau_i)$.*
3. *A обратима справа, т. е. существует матрица B с универсальными элементами, для которой $AB = I \in \mathrm{M}_\Upsilon$.*
4. *Для любого типа τ выполнено следующее: если τ-комбинация строк матрицы A равна нулевой строке, то все коэффициенты этой τ-комбинации равны нулю.*

Доказательство. Мы рассматриваем столбцы $x'_1, \dots, x'_n$ матрицы A как элементы $\mathbb{K}$-модуля $M = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \mathbb{Q}(\tau_i)$. Столбцы $y_1, \dots, y_m$ матрицы $I \in \mathrm{M}_\Upsilon$ образуют естественный базис $\mathbb{K}$-модуля

$$M = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Q}(\tau_i) = \bigoplus_{i=1}^{m} y_i \mathbb{Q}(\tau_i),$$

так что $x'_i = \alpha_{1i} y_1 + \ldots + \alpha_{mi} y_m$, $i = 1, \dots, n$.

Убедимся в справедливости импликации $1 \Longrightarrow 2$. Как показано в [10, п. 1.1], $\mathbb{K}$-модули $\langle x'_1, \dots, x'_n \rangle_\mathbb{K}$, $M / \langle x'_1, \dots, x'_n \rangle_\mathbb{K}$ являются конечно представимыми. Предположим, что второй из них отличен от нуля. Тогда по теореме 1 имеем изоморфизм

$$M / \langle x'_1, \dots, x'_n \rangle_\mathbb{K} \cong \bigoplus_{j=1}^{k} u_j \mathbb{Q}(\sigma_j),$$

где $u_1, \dots, u_k$ — некоторый базис этого модуля и $\sigma_1 \neq 0$.

Применяя проекцию, получаем $\mathbb{K}$-модульный гомоморфизм $\varphi\colon M \to u_1 \mathbb{Q}(\sigma_1)$, который по теореме 2 определяет σ_1-комбинацию с коэффициентами $\Delta = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$. Эта комбинация строк матрицы A равна нулевой строке, $\Delta A = 0$, поскольку $\varphi(x'_1) = \ldots = \varphi(x'_n) = 0$.

С другой стороны, так как гомоморфизм φ сюръективен, то

$$\varphi(\beta_1 y_1 + \ldots + \beta_m y_m) = u_1,$$

поэтому $(\gamma_1 \circ \beta_1 + \ldots + \gamma_m \circ \beta_m) u_1 = u_1$ и $\gamma_1 \circ \beta_1 + \ldots + \gamma_m \circ \beta_m = 1$. Таким образом, σ_1-комбинация $\Delta = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ является простой, и поэтому дефект матрицы A не меньше σ_1. Это противоречие показывает, что $M / \langle x'_1, \dots, x'_n \rangle_\mathbb{K} = 0$ и $M = \langle x'_1, \dots, x'_n \rangle_\mathbb{K}$.

Проверим импликацию $2 \Longrightarrow 3$. Равенства

$$y_j = x_1'\beta_{1j} + \ldots + x_n'\beta_{nj}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

с универсальными коэффициентами означают, что матрица $B = \|\beta_{ij}\|$ удовлетворяет условию 3.

Докажем импликацию $3 \Longrightarrow 4$. Пусть некоторая τ-комбинация строк матрицы A с коэффициентами $\Delta = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathrm{M}_\tau^\Upsilon$ равна нулевой строке, т. е. $\Delta A = (0, \ldots, 0)$. Тогда

$$0 = \Delta(AB) = \Delta I = \Delta = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m).$$

Таким образом, все коэффициенты равны нулю.

Убедимся в справедливости импликации $4 \Longrightarrow 1$. Если тип τ является дефектом матрицы A, то существует простая τ-комбинация её строк, равная нулевой строке. По условию 4 все её коэффициенты равны нулю, поэтому $\tau = 0$. $\square$

Заметим, что модификация этого доказательства показывает, что дефект любой матрицы $A \in \mathrm{M}_\Upsilon$ существует, и он равен типу $\sigma_1 \vee \ldots \vee \sigma_k$ в наших обозначениях. Будем называть матрицу $A \in \mathrm{M}_\Upsilon$ *редуцированной*, если её дефект равен нулю.

Следствие 1. *Элементы каждой строки редуцированной матрицы взаимно просты в совокупности.*

Доказательство. Если все элементы одной строки делятся на число ненулевого типа, то это же остаётся верным после домножения матрицы справа на любую матрицу, что противоречит утверждению 3 теоремы 3. $\square$

4. Эквивалентности и двойственности

Напомним, что категории $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются *эквивалентными* (*двойственными*), если существуют ковариантные (контравариантные) функторы $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и $f'\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, такие что $ff' \sim \mathrm{id}_\mathcal{B}$ и $f'f \sim \mathrm{id}_\mathcal{A}$. Запись $f'f \sim \mathrm{id}_\mathcal{A}$ означает, что для любого объекта A категории $\mathcal{A}$ существует изоморфизм $g_A\colon A \to f'\bigl(f(A)\bigr)$, такой что для любого морфизма $h\colon A \to B$ категории $\mathcal{A}$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g_A"'] & B \arrow[d, "g_B"] \\ f'\bigl(f(A)\bigr) \arrow[r, "f'(f(h))"'] & f'\bigl(f(B)\bigr). \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

4.1. Категории $\mathcal{M}$ и $\mathcal{RM}$

Обозначим через $\operatorname{Mat}\mathbb{Q}$ множество всех прямоугольных матриц произвольных размеров с рациональными элементами. Пусть $\Upsilon = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$ — обобщённый тип. Так как кольцо $\mathbb{Q}(\tau)$ является $\mathbb{Q}$-алгеброй для любого типа τ, то любая матрица $A \in \mathrm{M}_\Upsilon$ размера $m \times n$ может быть домножена справа на матрицу $L \in \operatorname{Mat}\mathbb{Q}$ размера $n \times l$ и произведение также будет принадлежать множеству M_Υ.

Определение 4. Объектами категории $\mathcal{M}$ являются матрицы из объединения $\bigcup\limits_{\Upsilon} \mathrm{M}_\Upsilon$ по всем обобщённым типам Υ. Пусть $A \in \mathrm{M}_\Upsilon$ и $B \in \mathrm{M}_\Sigma$ — объекты категории $\mathcal{M}$, где Υ и Σ — обобщённые типы. Морфизмами из A в Bявляются пары матриц (Δ, L), где $\Delta \in \mathrm{M}_\Sigma^\Upsilon$ и $L \in \operatorname{Mat}\mathbb{Q}$, для которых $\Delta A = BL$. Произведение морфизма $(\Delta, L)\colon A \to B$ на морфизм $(\Delta_1, L_1)\colon B \to C$ в категории $\mathcal{M}$ определяется как $(\Delta_1, L_1)(\Delta, L) = (\Delta_1\Delta, L_1L)\colon A \to C$. Тождественным морфизмом объекта A является пара единичных матриц подходящего размера. Категория $\mathcal{RM}$ является полной подкатегорией категории $\mathcal{M}$, состоящей из всех редуцированных матриц.

Нам понадобятся ещё три категории. Категория $\mathcal{QTF}$ является классической. Её объекты — это абелевы группы без кручения конечного ранга, а морфизмы — квазигомоморфизмы.

Категория $\mathcal{QD}$ была введена в [15]. Её объектами являются факторно делимые группы. Факторно делимая группа G — это абелева группа без ненулевых делимых периодических подгрупп, которая содержит свободную подгруппу конечного ранга F, такую что фактор-группа G/F является периодической и делимой. Ранг F называется рангом факторно делимой группы G, а свободный базис F называется базисом факторно делимой группы G. Морфизмами категории $\mathcal{QD}$ являются квазигомоморфизмы групп.

Третья категория $\mathcal{L}$ была введена в [10]. Объектами этой категории являются линейные отображения $g\colon U \to M$ из конечномерных векторных пространств U над полем рациональных чисел в конечно представимые модули M над кольцом универсальных чисел, которые рассматриваются как векторные пространства над $\mathbb{Q}$, такие что образ U относительно g порождает M как $\mathbb{K}$-модуль. Морфизмами из объекта $g\colon U \to M$ в объект $g_1\colon U_1 \to M_1$ являются пары (f, φ), где $f\colon U \to U_1$ — линейное отображение, а $\varphi\colon M \to M_1$ — $\mathbb{K}$-модульный гомоморфизм, такие что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U_1 \\ {\scriptstyle g}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g_1} \\ M & \xrightarrow[\varphi]{} & M_1. \end{array}$$

Теорема 4. *Категория $\mathcal{RM}$ эквивалентна категории $\mathcal{QD}$ и двойственна категории $\mathcal{QTF}$.*

Доказательство. Пусть A — объект категории $\mathcal{RM}$, в частности $A \in \mathrm{M}_\Upsilon$, где $\Upsilon = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$, и $A = (x'_1, \ldots, x'_n)$ — запись матрицы по столбцам. Эти столбцы являются элементами $\mathbb{K}$-модуля $M = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} y_i\mathbb{Q}(\tau_i)$, и они порождают M

над $\mathbb{K}$, поскольку матрица A является редуцированной. Таким образом, линейное отображение

$$g\colon U = \bigoplus_{j=1}^{n} x_j\mathbb{Q} \to M,$$

заданное равенствами

$$g(x_1) = x_1', \ldots,\ g(x_n) = x_n',$$

является объектом категории $\mathcal{L}$.

Рассмотрим произвольный морфизм $(\Delta, L)\colon A \to B$ категории $\mathcal{RM}$, где матрице $B = (z_1', \ldots, z_l')$ аналогичным образом соответствует объект

$$g_1\colon U_1 = \bigoplus_{i=1}^{l} z_i\mathbb{Q} \to M_1 = \bigoplus_{i=1}^{k} v_i\mathbb{Q}(\sigma_i).$$

Тогда матрица $\Delta \in \mathrm{M}_\Sigma^\Upsilon$ определяет $\mathbb{K}$-модульный гомоморфизм $\varphi\colon M \to M_1$ при помощи равенства

$$(\varphi x_1', \ldots, \varphi x_n') = (\Delta x_1', \ldots, \Delta x_n'),$$

а матрица L определяет линейное отображение $f\colon U \to U_1$ при помощи равенства

$$\big(f(x_1), \ldots, f(x_n)\big) = (z_1, \ldots, z_l)L.$$

При этом получаем

$$\Big(\varphi\big(g(x_1)\big), \ldots, \varphi\big(g(x_n)\big)\Big) = (\Delta x_1', \ldots, \Delta x_n') = \Delta A = BL = (z_1', \ldots, z_l')L.$$

С другой стороны, применяя линейное отображение g_1 к равенству

$$\big(f(x_1), \ldots, f(x_n)\big) = (z_1, \ldots, z_l)L$$

в U_1, мы имеем

$$\Big(g_1\big(f(x_1)\big), \ldots, g_1\big(f(x_n)\big)\Big) = (z_1', \ldots, z_l')L.$$

Отсюда $\varphi g = g_1 f$, и поэтому пара (f, φ) является морфизмом категории $\mathcal{L}$.

Легко проверить, что построенный выше функтор $\mathcal{RM} \to \mathcal{L}$ является эквивалентностью категорий. Поскольку категория $\mathcal{L}$ двойственна категории $\mathcal{QTF}$ по [10], а категория $\mathcal{QTF}$ двойственна категории $\mathcal{QD}$ по [15], мы получаем наш результат, так как композиция двух двойственностей есть эквивалентность. $\square$

4.2. Представление двух групп одной матрицей

Мы определим два функтора $c\colon \mathcal{M} \to \mathcal{QD}$ и $b\colon \mathcal{M} \to \mathcal{QTF}$, такие что их ограничения на подкатегорию $\mathcal{RM}$ являются соответственно эквивалентностью и двойственностью категорий, как сказано в теореме 4.

Пусть A — объект категории $\mathcal{M}$, т. е. $A \in \mathrm{M}_\Upsilon$, где $\Upsilon = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$. Сначала мы заменим каждый тип τ_i на характеристику $\chi_i \in \tau_i$. Поскольку умножение матрицы A на ненулевое рациональное число является изоморфизмом категории $\mathcal{M}$, то мы можем без потери общности считать, что каждый элемент матрицы A имеет вид $\alpha'_{ij} = 1 \otimes \alpha_{ij}$, где элементы $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}_{\chi_i}$ являются представителями τ_i-адических чисел. Мы заменяем все элементы α'_{ij} на α_{ij}. Различный выбор представителей приводит, вообще говоря, к различным парам групп, факторно делимой и без кручения конечного ранга, но эти различия не выходят за рамки квазиравенства.

Теперь мы рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & x_1 & x_2 & \ldots & x_n & & \\ y_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m & \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} & = & 0 \\ & \| & \| & \ldots & \| & & \\ & x'_1 & x'_2 & \ldots & x'_n. & & \end{array} \tag{4.2}$$

Подчеркнём, что эта диаграмма уже однозначно определяет, как будет показано ниже, такие факторно делимую группу $c(A)$ и группу без кручения конечного ранга $b(A)$ вместе с их базисами $x_1, \ldots, x_n \in b(A)$ и $x_1^*, \ldots, x_n^* \in c(A)$, что $c(A)$ и $b(A)$ являются взаимно-двойственными в смысле двойственности $d\colon \mathcal{QD} \to \mathcal{QTF}$ или $d'\colon \mathcal{QTF} \to \mathcal{QD}$, построенной в [15], и базисы также взаимно-двойственны в смысле [15]. Именно, диаграмма (4.2) одновременно определяет две системы равенств:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{21}y_2 + \ldots + \alpha_{m1}y_m, \\ x'_2 &= \alpha_{12}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \ldots + \alpha_{m2}y_m, \\ &\ldots \\ x'_n &= \alpha_{1n}y_1 + \alpha_{2n}y_2 + \ldots + \alpha_{mn}y_m \end{aligned} \tag{4.3}$$

и

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0, \\ &\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0, \\ &\ldots \\ &\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Систему (4.3) мы будем называть $\mathcal{QD}$-ситуацией, а систему (4.4) — $\mathcal{QTF}$-ситуацией.

$\hat{\mathbb{Z}}$-модуль $M = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} y_i\mathbb{Z}_{\chi_i}$ ассоциирован с $\mathbb{K}$-модулем $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} y_i\mathbb{Q}(\tau_i)$. $\mathcal{QD}$-ситуация (4.3) показывает, что $x'_1, \ldots, x'_n \in M$. Тогда $K = \langle x'_1, \ldots, x'_n\rangle_{\hat{\mathbb{Z}}}$ является подмодулем $\hat{\mathbb{Z}}$-модуля M. Сервантная оболочка $H = \langle x'_1, \ldots, x'_n\rangle_*$ в аддитивной группе K является искомой группой $c(A)$ с базисом $x_1^* = x'_1, \ldots,\ x_n^* = x'_n$, если элементы $x'_1, \ldots, x'_n$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Если $\mathrm{rk}(x'_1, \ldots, x'_n) = r$, где $r < n$, и, скажем, $x'_1, \ldots, x'_r$ линейно независимы, то

$$c(A) = H \oplus u_{r+1}\mathbb{Q} \oplus \ldots \oplus u_n\mathbb{Q}$$

и базисом $c(A)$ служит множество

$$x_1^* = x_1', \ldots,\ x_r^* = x_r',\ x_{r+1}^* = x_{r+1}' + u_{r+1}, \ldots,\ x_n^* = x_n' + u_n.$$

Рассмотрим $\mathcal{QTF}$-ситуацию (4.4). Мы обозначим $\chi_i = (m_p)$ и $\alpha_{ij} = (\alpha_p^{ij}) \in \in \mathbb{Z}_{\chi_i}$. Группа $b(A)$ определяется как подгруппа группы $\bigoplus\limits_{j=1}^{n} x_j\mathbb{Q}$, порождённая всеми элементами вида

1) $x_1, \ldots, x_n$;
2) $p^{-m_p}(a_{i1}^p x_1 + \ldots + a_{in}^p x_n)$, где a_{ij}^p — целые числа, удовлетворяющие условию
$$a_{ij}^p \equiv \alpha_{ij}^p \ (\mathrm{mod}\ p^{m_p}) \quad \text{при} \quad m_p < \infty;$$
3) $p^{-k}(a_{i1}^{pk} x_1 + \ldots + a_{in}^{pk} x_n)$, где a_{ij}^{pk} — целые числа, удовлетворяющие условию
$$a_{ij}^{pk} \equiv \alpha_{ij}^p \ (\mathrm{mod}\ p^k), \quad 0 < k \in \mathbb{Z}, \quad \text{при} \quad m_p = \infty.$$

Базисом группы $b(A)$ является $x_1, \ldots, x_n$.

Пусть $B \in \mathrm{M}_\Sigma$ — другая матрица категории $\mathcal{M}$ с обобщённым типом $\Sigma = = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ и $(\Delta, L)\colon A \to B$ — морфизм категории $\mathcal{M}$. Как и выше, B определяет факторно делимую группу $c(B)$ с базисом $z_1^*, \ldots, z_l^*$ и группу без кручения конечного ранга $b(B)$ с базисом $z_1, \ldots, z_l$ согласно диаграмме

$$\begin{array}{cccccccc}
 & z_1 & z_2 & \ldots & z_l & & \\
v_1 & \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1l} & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
v_k & \beta_{k1} & \beta_{k2} & \ldots & \beta_{kl} & = & 0 \\
 & \| & \| & \ldots & \| & & \\
 & z_1' & z_2' & \ldots & z_l'. & &
\end{array}$$

Тогда матрица $\Delta \in \mathrm{M}_\Sigma^\Upsilon$ имеет размер $k \times m$, а матрица $L \in \mathrm{Mat}\mathbb{Q}$ имеет размер $l \times n$. Мы определяем квазигомоморфизмы $f = b(\Delta,\, L)\colon b(B) \to b(A)$ и $f^* = = c(\Delta,\, L)\colon c(A) \to c(B)$ на базисах с помощью следующих матричных равенств:

$$\begin{pmatrix} f(z_1) \\ \vdots \\ f(z_l) \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \bigl(f^*(x_1^*), \ldots, f^*(x_n^*)\bigr) = (z_1^*, \ldots, z_l^*)L.$$

Обратные функторы $c'\colon \mathcal{QD} \to \mathcal{RM}$ и $b'\colon \mathcal{QTF} \to \mathcal{RM}$ были построены в [15]. На самом деле матрицы являются промежуточными звеньями в конструкции двойственности $d\colon \mathcal{QD} \to \mathcal{QTF}$ или $d'\colon \mathcal{QTF} \to \mathcal{QD}$, так что $d = bc'$ и $d' = cb'$. Более подробную информацию о функторах b и b' можно найти в [9,10], о функторах c и c' — в [12]. Здесь мы просто выделяем матрицы как специальную категорию $\mathcal{RM}$ или $\mathcal{M}$, а также расширяем функторы b и c до всей категории $\mathcal{M}$, что будет полезным для приложений. Таким образом, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{RM} \arrow[dl, shift left, "c"] \arrow[dr, shift left, "b"] & \\ \mathcal{QD} \arrow[ur, shift left, "c'"] \arrow[rr, shift left, "d"] & & \mathcal{QTF}. \arrow[ul, shift left, "b'"] \arrow[ll, shift left, "d'"] \end{tikzcd}$$

Коммутативность диаграммы означает, что любой путь по стрелкам изоморфен кратчайшему пути в смысле диаграммы (4.1). Кратчайшим путём из категории в себя является тождественный функтор.

4.3. Эквивалентные матрицы в категории $\mathcal{M}$

Матрицы $A \in \mathrm{M}_\Upsilon$ и $B \in \mathrm{M}_\Sigma$ обобщённых типов $\Upsilon = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$ и $\Sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ соответственно называются *эквивалентными*, если матрица B может быть получена из матрицы A за конечное число «элементарных» преобразований следующих четырёх видов:

1) *перестановка строк*;
2) *добавление или удаление τ-адической комбинации других строк*. Обобщённым типом матрицы B является последовательность $(\tau_1, \ldots, \tau_m, \tau)$. Первые m строк матрицы B совпадают со строками матрицы A, а последняя $(m+1)$-я строка матрицы B является τ-адической комбинацией строк матрицы A. Это преобразование есть переход от A к B или от B к A;
3) *сокращение строки на общий делитель*. Пусть i-я строка матрицы A представлена в виде $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}) = (\alpha \circ \alpha'_{i1}, \ldots, \alpha \circ \alpha'_{in})$, где $\alpha \in \mathbb{Q}(\tau_i)$, $\mathrm{type}(\alpha) = \tau \leqslant \tau_i$ и $\alpha'_{i1}, \ldots, \alpha'_{in} \in \mathbb{Q}(\tau_i - \tau)$. Тогда $(\alpha'_{i1}, \ldots, \alpha'_{in})$ является i-й строкой матрицы B, а остальные строки B совпадают с соответствующими строками матрицы A. Обобщённый тип матрицы B равен $(\tau_1, \ldots, \tau_i - \tau, \ldots, \tau_m)$;
4) *домножение строки на τ-адическое число*. Пусть τ — тип, удовлетворяющий равенству $\tau_i = \tau - \sigma$ для некоторого типа σ. Пусть $\alpha \in \mathbb{Q}(\tau)$ и $\mathrm{type}(\alpha) = \sigma$. Тогда $\mathrm{type}(\alpha) \geqslant \tau - \tau_i$, и поэтому умножение $(\alpha \circ \alpha_{i1}, \ldots, \alpha \circ \alpha_{in})$ правильно определено. Преобразование заключается в замене строки $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$ типа τ_i на строку $(\alpha \circ \alpha_{i1}, \ldots, \alpha \circ \alpha_{in})$ типа τ.

Элементарные преобразования вида 1) и 2) обратимы. Элементарные преобразования вида 3) и 4) взаимно-обратимы. Поэтому эквивалентность матриц действительно является отношением эквивалентности.

Теорема 5. *Пусть $A \in \mathrm{M}_\Upsilon$ и $B \in \mathrm{M}_\Sigma$ — эквивалентные матрицы. Тогда $c(A) = c(B)$ и $b(A) = b(B)$. Каждая матрица $A \in \mathrm{M}_\Upsilon$ эквивалентна некоторой редуцированной матрице $B \in \mathrm{M}_\Sigma$.*

Доказательство. Легко проверить, что элементарные преобразования не меняют группу $b(A)$. Следовательно, они также не меняют и группу $c(A)$.

Второе утверждение теоремы основывается на соответствии между τ-адическими соотношениями группы $b(A)$ и локально циклическими подгруппами группы $b(A)/\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, которое устанавливается в следующем разделе. Именно, для прямого разложения (5.6) мы получаем редуцированную матрицу (5.8). Матрица (5.8) может быть приписана к матрице A, после чего матрица A удаляется. Все осуществляемые преобразования элементарные. $\square$

5. Связь с двойственностью Понтрягина

Пусть C — локально циклическая периодическая группа, т. е. C изоморфна подгруппе группы $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Группа C может быть представлена в виде $C \cong R/\mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z} \subset R \subset \mathbb{Q}$. Характеристика 1 в R называется *характеристикой* локально циклической группы C.

Мы выбираем образующий элемент $y(m)$ в каждой циклической группе $C[m]$, где $0 < \frac{1}{m} \in R$, таким образом, чтобы $\frac{m}{k}y(m) = y(k)$ для каждого положительного делителя k числа m. Множество элементов

$$y = \left\{ y(m) \;\middle|\; \frac{1}{m} \in R \right\} \tag{5.1}$$

мы будем называть *образующим множеством* группы C. Образующее множество (5.1) элементов локально циклической группы C задаёт гомоморфизм

$$y^0 \colon C \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad \text{при котором} \quad y^0\big(y(m)\big) = \frac{1}{m} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \tag{5.2}$$

Лемма 2. *Пусть C — локально циклическая группа характеристики χ с образующим множеством элементов y. Тогда $\operatorname{Hom}(C, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = y^0\mathbb{Z}_\chi$ — циклический модуль над кольцом $\hat{\mathbb{Z}}$. Более того,*

$$\operatorname{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}}(\operatorname{Hom}(C, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong C.$$

Доказательство. $\hat{\mathbb{Z}}$-модульные гомоморфизмы $f\colon y^0\mathbb{Z}_\chi \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами $f(y^0)$ вида $\frac{k}{m} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, где $\frac{1}{m} \in R$. $\square$

Поскольку теперь нашей целью является новая интерпретация двойственности $d'\colon \mathcal{QTF} \to \mathcal{QD}$, нам понадобятся конструкции, применявшиеся в [15]. Для удобства читателей мы повторяем их ниже.

Пусть A — группа без кручения конечного ранга с максимальной линейно независимой системой элементов $x_1, \ldots, x_n$ и $F = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Получаем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow A \longrightarrow A/F \longrightarrow 0. \tag{5.3}$$

Пусть $z + F \in (A/F)[m]$, $z \in A$. Тогда $z = \frac{a_1x_1 + \ldots + a_nx_n}{m}$. Целые коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ определены элементом $z + F$ однозначно по модулю m. Таким образом, элемент $z+F$ однозначно определён соотношением в $\mathbb{Z}_m$-модуле A/mA

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0, \tag{5.4}$$

где $\alpha_i = a_i + m\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_m$, $i = 1, \ldots, n$. Чтобы избежать слишком сложных обозначений, здесь и ниже мы одинаково обозначаем элементы x_i и их образы в группе A/mA.

Тензорно домножая последовательность (5.3) на $\mathbb{Z}_m$, получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}_m, A/F) \longrightarrow \mathbb{Z}_m \otimes F \longrightarrow \mathbb{Z}_m \otimes A \longrightarrow \mathbb{Z}_m \otimes (A/F) \longrightarrow 0.$$

Применяя хорошо известные изоморфизмы, получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow (A/F)[m] \xrightarrow{f_m} x_1\mathbb{Z}_m \oplus \ldots \oplus x_n\mathbb{Z}_m \longrightarrow A/mA.$$

Заметим, что $f_m(z+F)$ — это в точности соотношение (5.4).

Наконец, если k — положительный делитель числа m, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & (A/F)[m] & \xrightarrow{f_m} & x_1\mathbb{Z}_m \oplus \ldots \oplus x_n\mathbb{Z}_m & \longrightarrow & A/mA \\
 & & \Big\downarrow \xi_k^m & & \Big\downarrow \varphi_k^m & & \Big\downarrow \psi_k^m \\
0 & \longrightarrow & (A/F)[k] & \xrightarrow[f_k]{} & x_1\mathbb{Z}_k \oplus \ldots \oplus x_n\mathbb{Z}_k & \longrightarrow & A/kA,
\end{array}$$

где

$$\xi_k^m(y) = \frac{m}{k}y, \quad y \in (A/F)[m],$$
$$\varphi_k^m\big((a_1 + m\mathbb{Z})x_1 + \ldots + (a_n + m\mathbb{Z})x_n\big) = (a_1 + k\mathbb{Z})x_1 + \ldots + (a_n + k\mathbb{Z})x_n,$$
$$a_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$\psi_k^m(z + mA) = z + kA, \quad z \in A.$$

Вертикальные стрелки образуют обратный спектр по всем парам положительных целых чисел (k, m), в которых k является делителем m и оба числа $\frac{1}{k}$ и $\frac{1}{m}$ принадлежат R, где $\mathbb{Z} \subset R \subset \mathbb{Q}$ и $\operatorname{char}_R(1) = \chi$. Применяя обратные пределы, мы получаем точную последовательность $\mathbb{Z}_\chi$-модульных (а также $\hat{\mathbb{Z}}$-модульных) гомоморфизмов

$$0 \longrightarrow (A/F)[\chi] \xrightarrow{f} x_1\mathbb{Z}_\chi \oplus \ldots \oplus x_n\mathbb{Z}_\chi \longrightarrow \hat{A}_\chi. \tag{5.5}$$

$\mathbb{Z}_\chi$-модуль $\hat{A}_\chi$ — это пополнение группы A в «χ-адической» топологии с базой окрестностей нуля $\{mA \mid \frac{1}{m} \in R\}$. Соответствие $C \mapsto C[\chi]$ — это функтор из категории периодических групп в категорию $\mathbb{Z}_\chi$-модулей, обобщающий функтор $C \mapsto C[m]$.

Предположим, что группа A/F содержит локально циклическую подгруппу C характеристики χ. Образующее множество (5.1) элементов группы C, т. е. $y = \{y(m) \mid \frac{1}{m} \in R\}$, может рассматриваться как элемент модуля $(A/F)[\chi]$.

Этот элемент переходит при гомоморфизме f последовательности (5.5) в некоторый элемент $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, который переходит в нуль в силу точности последовательности (5.5). Таким образом, образующему множеству y группы C соответствует соотношение $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$, имеющее место в $\mathbb{Z}_\chi$-модуле $\hat{A}_\chi$.

Теперь мы рассмотрим произвольное прямое разложение

$$A/F = C_1 \oplus \ldots \oplus C_m, \tag{5.6}$$

где $C_1, \ldots, C_m$ являются локально циклическими подгруппами, имеющими характеристики $\chi_1, \ldots, \chi_m$ соответственно. Выбирая образующие множества

$$y_1, \ldots, y_m \tag{5.7}$$

для локально циклических групп $C_1, \ldots, C_n$ соответственно, мы получим соотношения

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} x_1 + \ldots + \alpha_{1n} x_n = 0 \quad \text{в} \;\; \hat{A}_{\chi_1}, \\ &\ldots \\ &\alpha_{m1} x_1 + \ldots + \alpha_{mn} x_n = 0 \;\; \text{в} \;\; \hat{A}_{\chi_m}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Коэффициентами i-го равенства являются элементы кольца $\mathbb{Z}_{\chi_i}$.

Матрица системы (5.8) это в точности $b'(A) \in \mathcal{RM}$, если каждый её элемент тензорно домножить на рациональную единицу. Поскольку сумма (5.6) является прямой, дефект этой матрицы равен нулю.

Даже без домножения $-\otimes\mathbb{Q}$ матрица (5.8) задаёт $\mathcal{QD}$-ситуацию по столбцам. Эта $\mathcal{QD}$-ситуация определяет факторно делимую группу $d'(A)$, как это показано в разделе 4.2, что и завершает конструкцию $d'(A)$.

Пусть теперь выбраны разложение (5.6) и образующие множества (5.7). Каждое образующее множество y_i задаёт гомоморфизм $y_i^0 \colon C_i \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ как в (5.2). Мы определим гомоморфизм $y_i^0 \colon A/F \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ для любого $i = 1, \ldots, m$ следующим образом. Пусть $z = c_1 + \ldots + c_m \in C_1 \oplus \ldots \oplus C_m = A/F$. Тогда $y_i^0(z) = y_i^0(c_i) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. По лемме 2 мы получим прямое разложение

$$\operatorname{Hom}(A/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = y_1^0 \mathbb{Z}_{\chi_1} \oplus \ldots \oplus y_m^0 \mathbb{Z}_{\chi_m},$$

где $\chi_1, \ldots, \chi_m$ — характеристики групп $C_1, \ldots, C_m$ соответственно.

Заметим, что если рассматривать группу $\operatorname{Hom}(A/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ как топологическую относительно её $\mathbb{Z}$-адической топологии, то получится в точности понтрягинская группа характеров для дискретной группы A/F. Эта группа характеров является компактной в $\mathbb{Z}$-адической топологии, которая совпадает с компактно-открытой топологией в нашем конкретном случае.

Для любого элемента x_i максимальной линейно независимой системы элементов $x_1, \ldots, x_n$ группы A мы также определим гомоморфизм $x_i^0 \colon A/F \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ следующим образом. Пусть $z + F \in A/F$ и $z = \frac{a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n}{m}$, где целые коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ однозначно по модулю m определены элементом $z + F \in A/F$. Мы полагаем

$$x_i^0(z + F) = \frac{a_i}{m} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \tag{5.9}$$

Следующая лемма доказывается прямым вычислением.

Лемма 3. *В $\hat{\mathbb{Z}}$-модуле*

$$\mathrm{Hom}(A/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = y_1^0\mathbb{Z}_{\chi_1} \oplus \ldots \oplus y_m^0\mathbb{Z}_{\chi_m}$$

имеют место равенства

$$x_i^0 = \alpha_{1i}y_1^0 + \alpha_{2i}y_2^0 + \ldots + \alpha_{mi}y_m^0$$

для любого $i = 1, \ldots, n$, где коэффициенты α_{ij} являются элементами матрицы (5.8). □

Лемма 3 показывает, что $\mathcal{QD}$-ситуация реализуется как раз на элементах $x_1^0, \ldots, x_n^0$ и $y_1^0, \ldots, y_m^0$. Рассматривая топологическую группу $\mathrm{Hom}(A/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ алгебраически, т. е. забывая топологию, мы получаем факторно делимую группу $d'(A)$ как сервантную оболочку элементов $x_1^0, \ldots, x_n^0$ в аддитивной группе $\mathrm{Hom}(A/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $d'(A) = \langle x_1^0, \ldots, x_n^0\rangle_*$, добавляя, возможно, делимую группу без кручения конечного ранга, как это показано в разделе 4.2.

С другой стороны, пусть дана произвольная факторно делимая группа A^* с базисом $x_1^*, \ldots, x_n^*$. Это означает, что множество элементов $x_1^*, \ldots, x_n^*$ линейно независимо над $\mathbb{Z}$ и фактор-группа $A^*/\langle x_1^*, \ldots, x_n^*\rangle$ является делимой периодической группой.

Нам понадобится следующая простая, но интересная лемма.

Лемма 4. *Пусть G — произвольная группа с редуцированной периодической частью и $z_1, \ldots, z_k \in G$ — её максимальная линейно независимая над $\mathbb{Z}$ система элементов. Группа G является факторно делимой группой с базисом $z_1, \ldots, z_k$ тогда и только тогда, когда образы $z_1^0, \ldots, z_k^0$ элементов $z_1, \ldots, z_k$ при $\mathbb{Z}$-адическом пополнении $G \to \hat{G}$ порождают модуль $\hat{G}$ над кольцом $\hat{\mathbb{Z}}$, т. е. $\langle z_1^0, \ldots, z_k^0\rangle_{\hat{\mathbb{Z}}} = \hat{G}$.* □

По лемме 4 группа A^* может быть представлена как сервантная подгруппа группы $M \oplus D$, где M — аддитивная группа конечно представимого модуля над кольцом $\hat{\mathbb{Z}}$, а именно $M = \hat{A}^*$, и D — делимая группа без кручения, которая совпадает с первой ульмовской подгруппой группы A^*, как это показано в [15],

$$A^* = \langle x_1^*, \ldots, x_n^*\rangle_* \subset M \oplus D.$$

Проекция $M \oplus D \to M$, ограниченная на A^*, является $\mathbb{Z}$-адическим пополнением группы A^*. Напомним, что любой конечно представимый $\hat{\mathbb{Z}}$-модуль M представляется в виде $M \cong y_1\mathbb{Z}_{\chi_1} \oplus \ldots \oplus y_m\mathbb{Z}_{\chi_m}$ для некоторых характеристик $\chi_1, \ldots, \chi_m$ (подробнее см. [10]).

По лемме 2

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong C_1 \oplus \ldots \oplus C_m,$$

где $C_1, \ldots, C_m$ — локально циклические группы с характеристиками $\chi_1, \ldots, \chi_m$ соответственно.

Теперь мы можем определить группу $A = d(A^*)$ как подгруппу группы V,

$$F = x_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus x_n\mathbb{Z} \subset A \subset x_1\mathbb{Q} \oplus \ldots \oplus x_n\mathbb{Q} = V,$$

следующим образом. Пусть $\gamma_1 = \frac{a_1}{m} + \mathbb{Z}, \ldots, \gamma_n = \frac{a_n}{m} + \mathbb{Z}$ — произвольные элементы группы $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Обозначим

$$z = \gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_n x_n = \frac{a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n}{m} \in V.$$

Элемент z, вообще говоря, определён неоднозначно, но однозначно с точностью до F, т. е. $z + F$ определён однозначно как элемент группы V/F, подгруппа $\langle z, x_1, \ldots, x_n \rangle$ группы V также не зависит от выбора целых чисел $a_1, \ldots, a_n$. Мы наконец определяем группу $A = d(A^*)$ с помощью множества порождающих элементов:

$$A = \langle f(x_1^0)x_1 + \ldots + f(x_n^0)x_n \mid f \in \operatorname{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rangle.$$

Так как группа A/F является конечной прямой суммой локально циклических групп, то из леммы 2 следует, что

$$\operatorname{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}}(\operatorname{Hom}(A/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong A/F. \tag{5.10}$$

$\hat{\mathbb{Z}}$-модуль $M = \operatorname{Hom}(A/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \hat{A}^*$ содержит элементы $x_1^0, \ldots, x_n^0$, которые одновременно являются гомоморфизмами $A/F \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, определёнными в (5.9), и образами базисных элементов $x_1^*, \ldots, x_n^* \in A^*$ при $\mathbb{Z}$-адическом пополнении $A^* \to \hat{A}^*$. $\hat{\mathbb{Z}}$-модульный гомоморфизм $f\colon M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ переходит при изоморфизме (5.10) в элемент $f(x_1^0)x_1 + \ldots + f(x_n^0)x_n + F \in A/F$. Это показывает, что $d\big(d'(A)\big) = A$ и $d'\big(d(A^*)\big) = A^*$ для двойственных групп A и A^* с двойственными базисами $x_1, \ldots, x_n \in A$ и $x_1^*, \ldots, x_n^* \in A^*$.

В следующей теореме подводится итог всему сказанному выше.

Теорема 6. *Любой конечный набор* (*возможно, с повторениями*) *элементов $x_1^0, \ldots, x_n^0$ любого конечно представимого $\hat{\mathbb{Z}}$-модуля M, порождающий этот модуль над кольцом $\hat{\mathbb{Z}}$, $M = \langle x_1^0, \ldots, x_n^0 \rangle_{\hat{\mathbb{Z}}}$, определяет две абелевы группы A и A^* со множеством элементов $x_1, \ldots, x_n \in A$ и $x_1^*, \ldots, x_n^* \in A^*$ следующим образом.*

Группа без кручения A расположена между свободной и делимой группами,

$$\mathbb{Z}x_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}x_n \subset A \subset \mathbb{Q}x_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}x_n,$$

и порождена всеми элементами вида $f(x_1^0)x_1 + \ldots + f(x_n^0)x_n$, где f пробегает все $\hat{\mathbb{Z}}$-модульные гомоморфизмы $f\colon M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, т. е.

$$A = \langle f(x_1^0)x_1 + \ldots + f(x_n^0)x_n \mid f \in \operatorname{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rangle.$$

Произвольные элементы $d_1, \ldots, d_n$ выбираются в некоторой делимой группе без кручения D так, чтобы множество элементов $x_1^* = x_1^0 + d_1, \ldots, x_n^* = x_n^0 + d_n$ группы $M \oplus D$ было линейно независимым над $\mathbb{Z}$. Тогда факторно делимая группа A^* определяется как сервантная оболочка этих элементов в группе $M \oplus D$, т. е.

$$A^* = \langle x_1^*, \ldots, x_n^* \rangle_* \subset M \oplus D.$$

Для любой группы без кручения конечного ранга A с максимальной линейно независимой системой элементов $x_1, \ldots, x_n$ (факторно делимой группы

A^* с базисом $x_1^*, \ldots, x_n^*$) существует конечно представимый $\hat{\mathbb{Z}}$-модуль M с системой образующих $x_1^0, \ldots, x_n^0$, такой что группа A (группа A^*) определяется указанным выше способом. Соответствия $A^* = d'(A)$ и $A = d(A^*)$ являются функторами, определяющими двойственность между категориями $\mathcal{QD}$ и $\mathcal{QTF}$, введённую в [15]. □

Так как любой конечно порождённый подмодуль конечно представимого $\hat{\mathbb{Z}}$-модуля сам является конечно представимым $\hat{\mathbb{Z}}$-модулем (см. [10]), то мы получаем следующий вариант теоремы 6.

Следствие 2. *Любой конечный набор элементов* (*возможно, с повторениями*) *любого конечно представимого $\hat{\mathbb{Z}}$-модуля определяет взаимно-двойственную пару абелевых групп*: *группу без кручения конечного ранга и факторно делимую группу.*

В обозначениях теоремы 6 имеет место следующее утверждение.

Следствие 3. *Следующие три условия равносильны.*

1. $M = \langle x_1^0, \ldots, x_k^0\rangle_{\hat{\mathbb{Z}}} \oplus \langle x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0\rangle_{\hat{\mathbb{Z}}}$.
2. $A = B \oplus C$ *и* $x_1, \ldots, x_k \in B$, $x_{k+1}, \ldots, x_n \in C$.
3. $A^* = B^* \oplus C^*$ *и* $x_1^*, \ldots, x_k^* \in B$, $x_{k+1}^*, \ldots, x_n^* \in C$.

Рассмотрим подробнее следствие 2 в простейшем случае, когда дан один элемент x^0 некоторого конечно представимого $\hat{\mathbb{Z}}$-модуля M. Для каждого простого числа p обозначим через m_p наименьшее неотрицательное целое число, такое что $p^{m_p}x_0$ делится в модуле M на любую степень p. Если такого числа не существует, то полагаем $m_p = \infty$. Характеристику (m_p) будем называть кохарактеристикой элемента x^0, $\operatorname{cochar}(x^0) = (m_p) = \chi$.

Легко видеть, что

$$N = \langle x^0\rangle_{\hat{\mathbb{Z}}} = \hat{\mathbb{Z}}x_0 = \mathbb{Z}_\chi x^0 \cong \mathbb{Z}_\chi.$$

Тогда A является группой без кручения ранга 1 с максимальной линейно независимой системой x. При этом $A = R_\chi x \cong R_\chi$, где $\mathbb{Z} \subset R_\chi \subset \mathbb{Q}$ и характеристика единицы в R_χ равна χ.

Группа A^* является факторно делимой ранга 1 с базисом x^*. Здесь возможны два случая. Если характеристика χ относится к ненулевому типу, то $A^* = \langle x^0\rangle_* \subset N$, $x^* = x^0$. В этом случае группа A^* изоморфна группе $R^\chi = \langle 1\rangle_* \subset \mathbb{Z}_\chi$. Если характеристика $\chi = (m_p)$ относится к нулевому типу, то она определяет целое число $m = \prod\limits_p p^{m_p}$. Тогда $\mathbb{Z}_\chi = \mathbb{Z}_m$. Обозначим $R^\chi = \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Q}$. В этом случае $x^* = x^0 + d$, и мы получаем, что $A^* = \mathbb{Z}_m + \mathbb{Q}d \cong R^\chi$. В обоих случаях используем обозначение $A^* = R^\chi x^*$.

Определение 5. Конечный набор элементов $x_1, \ldots, x_n$ модуля над кольцом $\hat{\mathbb{Z}}$ будем называть линейно независимым над $\hat{\mathbb{Z}}$, если из равенства

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \hat{\mathbb{Z}},$$

следует, что

$$\alpha_1 x_1 = \ldots = \alpha_n x_n = 0.$$

Подчеркнём отличие этого определения от понятия линейной независимости над $\mathbb{Z}$, которое применяется в данной статье. Например, набор нулей является линейно независимым над $\hat{\mathbb{Z}}$, но не над $\mathbb{Z}$.

Следствие 4. *Если конечный набор элементов конечно представимого $\hat{\mathbb{Z}}$-модуля является линейно независимым над $\mathbb{Z}$, то соответствующая ему факторно делимая группа A^* является редуцированной, а группа без кручения конечного ранга A является коредуцированной, т. е. не имеет свободных прямых слагаемых.* □

Следствие 5. *Следующие три условия равносильны.*

1. *Набор элементов $x_1^0, \ldots, x_n^0$ конечно представимого $\hat{\mathbb{Z}}$-модуля является линейно независимым над $\hat{\mathbb{Z}}$, кохарактеристики этих элементов равны соответственно $\chi_1, \ldots, \chi_n$.*
2. $A = R_{\chi_1} x_1 \oplus \ldots \oplus R_{\chi_n} x_n$.
3. $A^* = R^{\chi_1} x_1^* \oplus \ldots \oplus R^{\chi_n} x_n^*$. □

В заключение выделим два крайних случая следствия 5, используя те же обозначения.

Следствие 6. *Если $\chi_1 = \ldots = \chi_n = (\infty, \infty, \ldots)$, то A — делимая группа без кручения ранга n и A^* — свободная группа ранга n.* □

Следствие 7. *Если $x_1^0 = \ldots = x_n^0 = 0$, то A — свободная группа ранга n и A^* — делимая группа без кручения ранга n.* □

Литература

[1] Мальцев А. И. Абелевы группы конечного ранга без кручения // Мат. сб. — 1938. — Т. 4. — С. 45—68.

[2] Фомин А. А. Абелевы группы с одним τ-адическим отношением // Алгебра и логика. — 1989. — Т. 28. — С. 83—104.

[3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974, 1977.

[4] Albrecht U., Goeters H. P., Wickless W. The flat dimension of mixed Abelian groups as E-modules // Rocky Mountain J. Math. — 1995. — Vol. 25. — P. 569—590.

[5] Albrecht U., Hausen J. Mixed Abelian groups with the summand intersection property // Abelian Groups and Modules. Proc. Int. Conf. Colorado Springs, CO, USA, August 7—12, 1995 / D. M. Arnold, ed. — New York: Marcel Dekker, 1996. — (Lect. Notes Pure Appl. Math.; Vol. 182). — P. 123—132.

[6] Beaumont R., Pierce R. Torsion-free rings // Illinois J. Math. — 1961. — Vol. 5. — P. 61—98.

[7] Derry D. Über eine Klasse von abelschen Gruppen // Proc. London Math. Soc. — 1937. — Vol. 43. — P. 490—506.

[8] Files S., Wickless W. The Baer—Kaplansky theorem for a class of global mixed Abelian groups // Rocky Mountain J. Math. — 1996. — Vol. 26. — P. 593—613.

[9] Fomin A. A. The category of quasi-homomorphisms of Abelian torsion free groups of finite rank // Algebra, Proc. Int. Conf. Memory A. I. Mal'cev, Novosibirsk/USSR 1989. Pt. 1. — Providence: Amer. Math. Soc., 1992. — (Contemp. Math.; Vol. 131). — P. 91—111.

[10] Fomin A. A. Finitely presented modules over the ring of universal numbers // Abelian Group Theory and Related Topics. Conf., August 1—7, 1993, Oberwolfach, Germany / R. Göbel, ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 1994. — (Contemp. Math.; Vol. 171). — P. 109—120.

[11] Fomin A. A. Some mixed Abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Abelian Groups and Modules, Trends in Mathematics. — Basel: Birkhäuser, 1999. — P. 87—100.

[12] Fomin A. A. Quotient divisible mixed groups // Abelian Groups, Rings and Modules. Proc. AGRAM 2000 Conf., Perth, Australia, July 9—15, 2000 / A. V. Kelarev, ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 2001. — (Contemp. Math.; Vol. 273). — P. 117—128.

[13] Fomin A., Mutzbauer O. Torsion-free Abelian α-irreducible groups of finite rank // Comm. Algebra. — 1994. — Vol. 22. — P. 3741—3754.

[14] Fomin A. A., Wickless W. J. Categories of mixed and torsion-free finite rank Abelian groups // Abelian Groups and Modules. Proc. Padova Conf., Padova, Italy, June 23—July 1, 1994 / A. Facchini, ed. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1995. — (Math. Appl., Dordr.; Vol. 343). — P. 185—192.

[15] Fomin A. A., Wickless W. Quotient divisible Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — Vol. 126. — P. 45—52.

[16] Fomin A. A., Wickless W. Self-small mixed Abelian groups G with $G/T(G)$ finite rank divisible // Comm. Algebra. — 1998. — Vol. 26. — P. 3563—3580.

[17] Glaz S., Wickless W. Regular and principal projective endomorphism rings of mixed Abelian groups // Comm. Algebra. — 1994. — Vol. 22. — P. 1161—1176.

[18] Jonsson B. On direct decompositions of torsion-free Abelian groups // Math. Scand. — 1957. — Vol. 7. — P. 230—235.

[19] Kurosh A. G. Primitive torsionsfreie abelsche Gruppen vom endlichen Range // Ann. Math. — 1937. — Vol. 38. — P. 175—203.

[20] Pontryagin L. S. The theory of topological commutative groups // Ann. Math. — 1934. — Vol. 35. — P. 361—388.

[21] Wickless W. J. A functor from mixed groups to torsion-free groups // Abelian Group Theory and Related Topics. Conf., August 1—7, 1993, Oberwolfach, Germany / R. Göbel, ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 1994. — (Contemp. Math.; Vol. 171). — P. 407—417.

Статья поступила в редакцию в мае 2006 г.