

# Простые модули над кольцами обобщённых матриц

Е. Ю. ЯРДЫКОВ

Томский государственный университет

УДК 512.553

**Ключевые слова:** кольцо обобщённых матриц, модуль, простой модуль.

## Аннотация

Исследуются простые модули над кольцом обобщённых матриц.

## Abstract

*E. Yu. Yarykov, Simple modules over generalized matrix ring, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 3, pp. 245–247.*

The work is devoted to investigation of simple modules over generalized matrix ring.

Кольца обобщённых и, в частности, треугольных матриц обладают интересными свойствами. Кольцо треугольных матриц часто используют для построения колец с асимметричными свойствами (например, нётеровых слева, но не нётеровых справа). Любое кольцо, обладающее нетривиальными идемпотентами, изоморфно определённому кольцу матриц. Известно также, что кольцо эндоморфизмов разложимо в прямую сумму модуля также изоморфно некоторому кольцу обобщённых матриц. Несомненно представляет интерес изучение модулей над кольцами обобщённых матриц. Исследованию таких модулей посвящены работы [2–4] и другие. В настоящей заметке даётся описание простых модулей над кольцом обобщённых матриц.

Все рассматриваемые кольца считаем ассоциативными с единицей, модули — унитарными. Терминология и обозначения соответствуют [1].

Пусть  $R$  и  $S$  — кольца,  ${}_R M_S$  и  ${}_S N_R$  — бимодули. Допустим, что существуют бимодульные гомоморфизмы  $\varphi: M \otimes_S N \rightarrow R$  и  $\psi: N \otimes_R M \rightarrow S$ , удовлетворяющие условиям ассоциативности:  $(mn)m' = m(nm')$  и  $(nm)n' = n(mn')$  для всех  $m, m'$  из  $M$  и  $n, n'$  из  $N$ . Здесь мы полагаем  $mn = \varphi(m \otimes n)$  и  $nm = \psi(n \otimes m)$ . Кольцом обобщённых матриц называют множество матриц вида

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \mid r \in R, s \in S, m \in M, n \in N \right\}$$

с операциями, заданными как в обычном кольце матриц (см. [2–4]).

Пусть существуют левый  $R$ -модуль  $X$ , левый  $S$ -модуль  $Y$  и гомоморфизмы  $R$ -модулей  $f: {}_R(M \otimes_S Y) \rightarrow {}_R X$  и  $S$ -модулей  $g: {}_S(N \otimes_R X) \rightarrow {}_S Y$ , такие что выполнены равенства ассоциативности:  $m(nx) = (mn)x$ ,  $n(my) = (nm)y$  для

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 3, с. 245–247.

© 2007 Центр новых информационных технологий МГУ,  
Издательский дом «Открытые системы»

всех  $m \in M$ ,  $n \in N$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ , где  $nx = g(n \otimes x)$ ,  $my = f(m \otimes y)$ . Известно, что тогда группа столбцов  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  образует левый  $K$ -модуль относительно естественного умножения матриц на столбцы. Верно и обратное. Именно, если  $A$  — левый  $K$ -модуль, то  $A$  изоморфен некоторому модулю столбцов.

Пусть дан модуль  $A = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  над кольцом  $K$ . Тогда подмножество  $A'$  является подмодулем модуля  $A$  тогда и только тогда, когда существуют подмодуль  $X'$   $R$ -модуля  $X$  и подмодуль  $Y'$   $S$ -модуля  $Y$ , такие что  $A' = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ , причём  $MY' \subseteq X'$  и  $NX' \subseteq Y'$ , где  $MY'$  — образ композиции отображений  $M \otimes Y' \rightarrow M \otimes Y \rightarrow X$ , а  $NX'$  — образ композиции  $N \otimes X' \rightarrow N \otimes X \rightarrow Y$ .

Кроме того, пусть  $A = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  — левый  $K$ -модуль,  $A' = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$  — его подмодуль. Тогда группа столбцов  $\begin{pmatrix} X/X' \\ Y/Y' \end{pmatrix}$  и отображения  $\bar{f}: M \otimes_S Y/Y' \rightarrow X/X'$ ,  $\bar{g}: N \otimes_R X/X' \rightarrow Y/Y'$ , действующие по правилам

$$\bar{f}(m \otimes \bar{y}) = \bar{f}(m \otimes y + Y') = f(m \otimes y) + X'$$

для всех  $m \in M$ ,  $y \in Y$ ,

$$\bar{g}(n \otimes \bar{x}) = \bar{g}(n \otimes x + X') = g(n \otimes x) + Y'$$

для всех  $n \in N$ ,  $x \in X$ , задают левый  $K$ -модуль, изоморфный фактор-модулю модуля  $A$  по подмодулю  $A'$ , т. е.  $A/A' \cong \begin{pmatrix} X/X' \\ Y/Y' \end{pmatrix}$ .

Рассмотрим вопрос о строении простых модулей над кольцом  $K$ . Пусть  $I = \varphi(M \otimes N) = MN$  и  $J = \psi(N \otimes M) = NM$  — идеалы следа кольца  $K$  [2].

**Теорема.** Левый  $K$ -модуль  $A = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  является простым тогда и только тогда, когда либо  $X$  и  $Y$  — простые модули и  $IX \neq 0$ ,  $JY \neq 0$ , либо  $X$  простой и  $Y = 0$ , либо, наконец,  $Y$  простой и  $X = 0$ .

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $A = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  — простой левый  $K$ -модуль. Предположим, что  $X, Y \neq 0$ .

Если  $X$  не простой модуль, то существует ненулевой подмодуль  $X'$  в  $X$ , а следовательно,  $\begin{pmatrix} X' \\ NX' \end{pmatrix}$  — ненулевой подмодуль в  $A$ . Так как  $A$  простой, то  $\begin{pmatrix} X' \\ NX' \end{pmatrix}$  совпадает с  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ , а значит,  $X' = X$ . Таким образом,  $X$  — простой  $R$ -модуль. Аналогично  $Y$  — простой  $S$ -модуль.

Далее рассмотрим подмодули  $\begin{pmatrix} X \\ NX \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} MY \\ Y \end{pmatrix}$ . Они в силу простоты  $A$  совпадают с  $A$ . Следовательно,  $X = MY$ ,  $Y = NX$ . Если теперь в первое равенство подставить второе и наоборот, получим равенства  $X = M(NX)$ ,  $Y = N(MY)$ . Воспользуемся равенствами ассоциативности, справедливыми для модуля  $A = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ , получим, что  $X = IX$ ,  $Y = JY$ . Итак,  $IX \neq 0$  и  $JY \neq 0$ .

Пусть теперь  $X \neq 0$ , а  $Y = 0$ , т. е. имеем  $K$ -модуль  $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ . Если существует подмодуль  $X'$  в  $X$ , то понятно, что  $\begin{pmatrix} X' \\ 0 \end{pmatrix}$  — подмодуль в  $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ . Но модуль  $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$  простой. Следовательно,  $X' = 0$  или  $X' = X$ , значит,  $X$  простой.

Случай, когда  $X = 0$ , а  $Y \neq 0$ , доказывается аналогично.

Достаточность. Пусть дан модуль  $A = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  и известно, что модули  $X$ ,  $Y$  простые и  $IX \neq 0$ ,  $JY \neq 0$ . Покажем, что  $A$  простой.

Чтобы в  $A$  существовали подмодули, необходимо, чтобы существовали подмодули в  $X$  и  $Y$ . Таким образом, эти подмодули могут быть только следующего вида:  $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix}$ . Эти случаи исключаются тем, что  $IX \neq 0, JY \neq 0$ . А именно, чтобы подмножество  $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$  являлось подмодулем, нужно, чтобы  $NX = 0$ . Но нам дано, что  $IX = (MN)X = M(NX) \neq 0$ . Аналогично для  $\begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix}$ .

Теперь рассмотрим случай, когда модуль  $A$  имеет вид  $A = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ . Дано, что модуль  $X$  простой, покажем, что модуль  $A$  простой.

Если данный модуль  $A$  имеет подмодули, то они, очевидно, имеют вид  $\begin{pmatrix} X' \\ 0 \end{pmatrix}$ , где  $X'$  — подмодуль в  $X$ . Но  $X$  простой, значит,  $X' = 0$  или  $X' = X$ . Получаем, что  $A = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$  является простым.

Случай, когда модуль  $A$  имеет вид  $A = \begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix}$  и  $Y$  простой, разбирается аналогично. Теорема доказана.  $\square$

**Следствие 1.** Предположим, что  $I = R$  и  $J = S$ . Тогда  $K$ -модуль  $A = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  является простым тогда и только тогда, когда  $X$  и  $Y$  простые.

**Следствие 2.** Если кольцо  $K$  такое, что  $I = J = 0$ , то  $K$ -модуль  $A = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  является простым тогда и только тогда, когда  $X$  простой и  $Y = 0$ , либо  $Y$  простой и  $X = 0$ .

**Следствие 3.** Пусть дан  $K$ -модуль  $A = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ , такой что  $X \neq 0$  и  $Y \neq 0$ ,  $A' = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$  — подмодуль в  $A$ . Тогда  $A'$  простой в  $A$  тогда и только тогда, когда либо  $X'$  и  $Y'$  простые и  $IX' \neq 0, JY' \neq 0$ , либо  $X'$  простой и  $Y' = 0$ , либо  $Y'$  простой и  $X' = 0$ .

**Следствие 4.** Пусть дан  $K$ -модуль  $A = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ , такой что  $X \neq 0$  и  $Y \neq 0$ ,  $A' = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$  — подмодуль в  $A$ . Тогда  $A'$  максимальный в  $A$  тогда и только тогда, когда либо  $X'$  максимальный в  $X$  и  $Y'$  максимальный в  $Y$  и  $IX \not\subset X', JY \not\subset Y'$ , либо  $X'$  максимальный в  $X$  и  $Y' = Y$ , либо  $Y'$  максимальный и  $X' = X$ .

## Литература

- [1] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.
- [2] Müller M. Rings of quotient of generalized matrix rings // Comm. Algebra. — 1987. — Vol. 15. — P. 1991—2015.
- [3] Nicholson W. K., Watters J. F. Classess of simple modules and triangular rings // Comm. Algebra. — 1992. — Vol. 20. — P. 141—153.
- [4] Rowen L. Ring Theory. Vol. 1. — New York: Academic Press, 1988.

Статья поступила в редакцию в мае 2006 г.

