

Автоморфизмы групп Шевалле типов B_2 и G_2 над локальными кольцами*

Е. И. БУНИНА

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

УДК 512.54

Ключевые слова: группа Шевалле, локальное кольцо, автоморфизм, полупростая алгебра Ли.

Аннотация

В работе доказано, что любой автоморфизм присоединённой группы Шевалле типов B_2 или G_2 стандартен, т. е. является композицией «внутреннего», кольцевого и центрального автоморфизмов.

Abstract

E. I. Bunina, Automorphisms of Chevalley groups of types B_2 and G_2 over local rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 4, pp. 3–29.

In the paper, we prove that every automorphism of any adjoint Chevalley group of type B_2 or G_2 is standard, i.e., it is a composition of an “inner” automorphism, a ring automorphism, and a central automorphism.

Введение

Ассоциативное кольцо R с единицей называется *локальным*, если оно содержит ровно один максимальный идеал (совпадающий с радикалом Джекобсона кольца R), что равносильно тому, что все необратимые элементы кольца образуют идеал. В этой статье все рассматриваемые кольца коммутативны.

Пусть G_{ad} — групповая схема Шевалле—Демажюра, ассоциированная с неприводимой системой корней Φ типов B_2 или G_2 (см. подробные определения в следующем разделе), $G_{\text{ad}}(R, \Phi)$ — множество точек G со значениями в R , $E_{\text{ad}}(R, \Phi)$ — элементарная подгруппа группы $G_{\text{ad}}(R, \Phi)$, где R — локальное коммутативное кольцо с 1. В данной работе мы описываем автоморфизмы групп $G_{\text{ad}}(R, \Phi)$ и $E_{\text{ad}}(R, \Phi)$ (для систем корней A_l , D_l и E_l автоморфизмы были описаны в [2]). Предположим, что R — локальное кольцо с $1/2$ (и с $1/3$, если $\Phi = G_2$). Тогда любой автоморфизм группы $G_{\text{ad}}(R, \Phi)$ ($E_{\text{ad}}(R, \Phi)$) стандартен (см. ниже определения стандартных автоморфизмов). Эти результаты для групп

*Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации МК-904.2006.1 и грантом РФФИ 05-01-01048.

Шевалле над полями были доказаны Стейнбергом [22] для конечного случая и Хамфрисом [17] для бесконечного. Сузуки [23] изучал автоморфизмы групп Шевалле над кольцами p -адических чисел. Абе [1] доказал этот результат для нётеровых колец, однако класс всех локальных колец не содержится полностью в классе нётеровых колец, а доказательства работы [1] не распространяются на случай произвольных локальных колец.

С другой стороны, автоморфизмы классических групп над кольцами обсуждались многими авторами. Исследования этого вопроса были начаты Шрайером и Ван дер Варденом, описавшими автоморфизмы группы PSL_n ($n \geq 3$) над произвольным полем. Дьедонне [15], Хуа и Райнер [16], О'Мира [20], Макдональд [19], И. З. Голубчик и А. В. Михалёв [5] и другие изучали эту задачу для групп над более общими классами колец. Для доказательства нашей теоремы мы обобщаем некоторые методы из работы В. М. Петечука [6].

Каждую из рассматриваемых групп Шевалле мы считаем вложенной в группу $\mathrm{GL}_N(R)$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Благодаря этому получается рассматривать группу Шевалле как матричную группу и использовать для доказательств методы линейной алгебры: обратимые замены координат в локальном кольце, единственность решения системы линейных уравнений над локальным кольцом при условии, что определитель соответствующей матрицы обратим, и т. п. В результате мы приходим к тому, что любой автоморфизм группы Шевалле индуцируется автоморфизмом соответствующего матричного кольца.

Автор благодарит А. Ю. Голубкова, А. А. Клячко и А. В. Михалёва за полезные замечания и постоянное внимание к работе.

1. Определения и формулировки основных теорем

1.1. Системы корней

Определение 1. Конечное непустое множество $\Phi \subset \mathbb{R}^l$ векторов евклидова пространства $\mathbb{R}^l$ называется *системой корней*, если оно порождает $\mathbb{R}^l$, не содержит 0 и удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) $\forall \alpha \in \Phi \quad (c \cdot \alpha \in \Phi \iff c = \pm 1)$;
- 2) если ввести коэффициент отражения

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$$

для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^l$, то для любых $\alpha, \beta \in \Phi$ справедливо $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$;

- 3) пусть для $\alpha \in \mathbb{R}^l$ w_α — это отражение относительно гиперплоскости, ортогональной вектору α , т. е. для всех $\beta \in \mathbb{R}^l$

$$w_\alpha(\beta) = \beta - \langle \alpha, \beta \rangle \alpha.$$

Тогда для любых $\alpha, \beta \in \Phi$ выполнено $w_\alpha(\beta) \in \Phi$, т. е. множество Φ инвариантно относительно действия всех отражений w_α , $\alpha \in \Phi$.

Если Φ — система корней, то её элементы называются *корнями*.

Определение 2. Группа W , порождённая всеми отражениями w_α , $\alpha \in \Phi$, называется *группой Вейля* системы корней Φ .

Определение 3. Если в пространстве $\mathbb{R}^l$ провести гиперплоскость, не содержащую корней из Φ , то все корни разобьются на два непересекающихся множества *положительных* (Φ^+) и *отрицательных* (Φ^-) корней. *Системой простых корней* называется множество $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \Phi^+$, такое что любой положительный корень $\beta \in \Phi^+$ единственным образом записывается в виде $n_1\alpha_1 + \dots + n_l\alpha_l$, где $n_1, \dots, n_l \in \mathbb{Z}^+$.

Для любой системы корней Φ существует система простых корней. Число l называется *рангом* системы корней Φ .

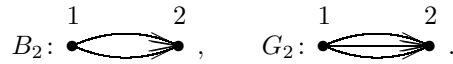
Среди всех систем корней нам наиболее интересны *неразложимые*, т. е. такие, что систему корней Φ нельзя представить в виде объединения $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ двух непересекающихся множеств со взаимно ортогональными корнями.

Определение 4. По системе корней можно построить *схему Дынкина*. Это граф, который строится следующим образом: его вершины соответствуют простым корням $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, вершины с номерами i и j соединяются ребром, если $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \neq 0$. Если $|\alpha_i| = |\alpha_j|$, то $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ и количество рёбер между вершинами i и j равно $|\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle|$. Если $|\alpha_i| > |\alpha_j|$, то $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle < \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ и обязательно $|\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle| = 1$. В этом случае вершины i и j соединяются $|\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle|$ рёбрами и стрелка ставится в направлении от длинного корня к короткому.

По схеме Дынкина можно однозначно восстановить систему корней.

Все неразложимые системы корней с точностью до изоморфизма делятся на четыре бесконечных (*классических*) серии A_l ($l \geq 1$), B_l ($l \geq 2$), C_l ($l \geq 3$) и D_l ($l \geq 4$) и пять отдельных (*исключительных*) случаев E_6 , E_7 , E_8 , F_4 и G_2 .

В этой работе нас будут интересовать системы корней B_2 и G_2 со следующими схемами Дынкина:



Здесь мы фиксируем систему корней Φ , имеющую тип B_2 или G_2 , с системой простых корней

$$\Delta(B_2) = \{\alpha_1 = e_1 - e_2, \alpha_2 = e_2\}$$

или

$$\Delta(G_2) = \{\alpha_1 = e_1 - e_2, \alpha_2 = -2e_1 + e_2 + e_3\},$$

системой положительных корней

$$\Phi^+(B_2) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 = e_1, \alpha_1 + 2\alpha_2 = e_1 + e_2\}$$

или

$$\begin{aligned} \Phi^+(G_2) = \{ & \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 = e_3 - e_1, 2\alpha_1 + \alpha_2 = e_3 - e_2, \\ & 3\alpha_1 + \alpha_2 = e_1 + e_3 - 2e_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2e_3 - e_1 - e_2\}, \end{aligned}$$

группой Вейля W . Напомним, что в нашем случае существуют корни ровно двух длин, все корни одной длины сопряжены относительно действия группы Вейля. Более подробно о системах корней и их свойствах можно прочитать в [3, 10].

1.2. Полупростые алгебры Ли

Более подробные сведения о полупростых алгебрах Ли можно найти в [10].

Определение 5. Алгеброй Ли $\mathcal{L}$ над полем K называется линейное пространство над K , снабжённое операцией умножения $x, y \mapsto [x, y]$, линейной по обоим переменным и удовлетворяющей следующим условиям:

1) *антикоммутативность*:

$$\forall x, y \in \mathcal{L} \quad [x, y] = -[y, x];$$

2) *тождество Якоби*:

$$\forall x, y, z \in \mathcal{L} \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Размерность алгебры Ли определяется её размерностью как линейного пространства над K . Так, алгебра Ли называется *конечномерной*, если пространство $\mathcal{L}$ конечномерно.

Определение 6. Подпространство $\mathcal{L}'$ алгебры Ли $\mathcal{L}$ как линейного пространства называется *подалгеброй* алгебры Ли $\mathcal{L}$, если $[x, y] \in \mathcal{L}'$ для всех $x, y \in \mathcal{L}'$. Подалгебра $\mathcal{L}'$ алгебры Ли $\mathcal{L}$ называется её *идеалом*, если для всех $x \in \mathcal{L}'$ и для всех $y \in \mathcal{L}$ справедливо $[x, y] \in \mathcal{L}'$. *Коммутантом* алгебр Ли $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, лежащих в одной алгебре Ли $\mathcal{L}$, называется её подалгебра $\mathcal{L}' = [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$, порождённая всеми элементами $[x, y]$ для $x \in \mathcal{L}_1, y \in \mathcal{L}_2$.

Определение 7. Последовательность

$$\mathcal{L}^0 = \mathcal{L}, \mathcal{L}^1 = [\mathcal{L}, \mathcal{L}^0], \mathcal{L}^2 = [\mathcal{L}, \mathcal{L}^1], \dots, \mathcal{L}^{n+1} = [\mathcal{L}, \mathcal{L}^n], \dots$$

называется *центральной цепью* алгебры Ли $\mathcal{L}$. Если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $\mathcal{L}^n = 0$, то алгебра Ли $\mathcal{L}$ называется *нильпотентной*.

Определение 8. Последовательность

$$\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}, \mathcal{L}^{(1)} = [\mathcal{L}^{(0)}, \mathcal{L}^{(0)}], \mathcal{L}^{(2)} = [\mathcal{L}^{(1)}, \mathcal{L}^{(1)}], \dots, \mathcal{L}^{(n+1)} = [\mathcal{L}^{(n)}, \mathcal{L}^{(n)}], \dots$$

называется *композиционной цепью* алгебры Ли $\mathcal{L}$. Если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $\mathcal{L}^{(n)} = 0$, то алгебра Ли $\mathcal{L}$ называется *разрешимой*.

Определение 9. Рассмотрим конечномерную алгебру Ли $\mathcal{L}$. Наибольший разрешимый идеал алгебры Ли, равный сумме всех её разрешимых идеалов, называется *радикалом* алгебры Ли. Алгебра Ли, радикал которой равен нулю, называется *полупростой*. Некоммутативная алгебра Ли $\mathcal{L}$ называется *простой*, если она содержит ровно два идеала: 0 и $\mathcal{L}$.

Конечномерная полупростая алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$ является прямой суммой простых алгебр Ли.

Определение 10. Нормализатор подалгебры $\mathcal{L}'$ в алгебре $\mathcal{L}$ называется подалгебра

$$N_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}') := \{x \in \mathcal{L} \mid \forall y \in \mathcal{L}' \ [x, y] \in \mathcal{L}'\}.$$

Определение 11. Подалгеброй Кармана алгебры Ли $\mathcal{L}$ называется её нильпотентная самонормализуемая подалгебра $\mathcal{H}$. Для полупростой алгебры Ли она абелева и определена с точностью до автоморфизма алгебры.

Предложение 1 [10, § 8]. Пусть $\mathcal{L}$ — полупростая конечномерная алгебра Ли над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, $\mathcal{H}$ — её картановская подалгебра. Рассмотрим пространство $\mathcal{H}^*$. Пусть для $\alpha \in \mathcal{H}^*$

$$\mathcal{L}_{\alpha} := \{x \in \mathcal{L} \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ для любого } h \in \mathcal{H}\}.$$

В этом случае $\mathcal{L}_0 = \mathcal{H}$ и алгебра $\mathcal{L}$ допускает разложение $\mathcal{L} = \mathcal{H} \oplus \sum_{\alpha \neq 0} \mathcal{L}_{\alpha}$, причём если $\mathcal{L}_{\alpha} \neq 0$, то $\dim \mathcal{L}_{\alpha} = 1$, все такие ненулевые $\alpha \in \mathcal{H}$, что $\mathcal{L}_{\alpha} \neq 0$, образуют некоторую систему корней Φ . Система корней Φ и полупростая алгебра Ли $\mathcal{L}$ над $\mathbb{C}$ однозначно определяют друг друга.

На алгебре Ли $\mathcal{L}$ можно ввести билинейную форму Киллинга

$$\kappa(x, y) = \text{tr}(\text{ad } x \text{ ad } y),$$

где $\text{ad } x \in \text{GL}(\mathcal{L})$, $\text{ad } x: z \mapsto [x, z]$ — присоединённое представление. Для полупростой алгебры Ли ограничение формы Киллинга на $\mathcal{H}$ невырождено, поэтому можно отождествить пространства $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}^*$.

Предложение 2 [8, с. 10]. Можно выбрать базис $\{h_1, \dots, h_l\}$ в $\mathcal{H}$ и для каждого $\alpha \in \Phi$ элементы $x_{\alpha} \in \mathcal{L}_{\alpha}$ так, что

- 1) $\{h_i; x_{\alpha}\}$ образуют базис в $\mathcal{L}$;
- 2) $[h_i, h_j] = 0$;
- 3) $[h_i, x_{\alpha}] = \langle \alpha, \alpha_i \rangle x_{\alpha}$;
- 4) $[x_{\alpha}, x_{-\alpha}] = h_{\alpha} = \text{целочисленная линейная комбинация } h_i$;
- 5) $[x_{\alpha}, x_{\beta}] = N_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}$, если $\alpha + \beta \in \Phi$ ($N_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$);
- 6) $[x_{\alpha}, x_{\beta}] = 0$, если $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha + \beta \notin \Phi$.

Определение 12. Представлением алгебры Ли $\mathcal{L}$ в линейном пространстве V называется линейное отображение $\pi: \mathcal{L} \rightarrow \text{gl}(V)$, для которого

$$\forall x, y \in \mathcal{L} \quad \pi([x, y]) = \pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x).$$

Представление называется *точным*, если его ядро равно нулю.

1.3. Элементарные группы Шевалле

Введём теперь элементарные группы Шевалле (см. [8]). Пусть $\mathcal{L}$ — полупростая алгебра Ли (над $\mathbb{C}$) с системой корней Φ , пусть $\pi: \mathcal{L} \rightarrow \text{gl}(V)$ — её конечномерное точное представление (размерности n). Тогда можно выбрать базис в пространстве V (например, взять базис из весовых векторов) так, что все

операторы $\pi(x_\alpha)^k/k!$ для $k \in \mathbb{N}$ будут записываться целочисленными (нильпотентными) матрицами. Целочисленная матрица может также рассматриваться как матрица над произвольным коммутативным кольцом с единицей. Пусть R — такое кольцо. Рассмотрим матрицы размера $n \times n$ над R , матрицы $\pi(x_\alpha)^k/k!$ для $\alpha \in \Phi$, $k \in \mathbb{N}$ можно вложить в $M_n(R)$.

Рассмотрим автоморфизмы свободного модуля R^n вида

$$\exp(tx_\alpha) = x_\alpha(t) = 1 + t\pi(x_\alpha) + t^2\pi(x_\alpha)^2/2 + \dots + t^k\pi(x_\alpha)^k/k! + \dots$$

Так как все матрицы $\pi(x_\alpha)$ нильпотентны, данный ряд конечен.

Определение 13. Подгруппа группы $\text{Aut}(R^n)$, порождённая всеми автоморфизмами $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R$, называется *элементарной группой Шевалле* (обозначение $E_\pi(\Phi, R)$).

Определение 14. В элементарной группе Шевалле можно рассмотреть следующие важные элементы и подгруппы:

- $w_\alpha(t) = x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R^*$;
- $h_\alpha(t) = w_\alpha(t)w_\alpha(t)^{-1}$;
- подгруппу N , порождённую всеми элементами $w_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R^*$;
- подгруппу H , порождённую всеми элементами $h_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R^*$.

Известно, что группа N является нормализатором группы H в элементарной группе Шевалле, фактор-группа N/H изоморфна группе Вейля $W(\Phi)$.

Элементарные группы Шевалле строятся даже не по представлению алгебры Ли, а только по его *весовой решётке*.

Определение 15. Если V — пространство представления полупростой алгебры Ли $\mathcal{L}$ (с картановской подалгеброй $\mathcal{H}$), то функционал $\lambda \in \mathcal{H}^*$ называется *весом* этого представления, если существует ненулевой вектор $v \in V$ (который называется *весовым вектором*), такой что для любого $h \in \mathcal{H}$ выполнено $\pi(h)v = \lambda(h)v$. Все веса данного представления (по сложению) порождают решётку (свободную абелеву группу, где любой $\mathbb{Z}$ -базис также является и $\mathbb{C}$ -базисом в $\mathcal{H}^*$), называемую *весовой решёткой* Λ_π .

Элементарная группа Шевалле полностью определяется системой корней Φ , коммутативным кольцом R с единицей и весовой решёткой Λ_π .

Среди всех решёток выделим две: *присоединённую решётку* Λ_{ad} , соответствующую присоединённому представлению (она порождена всеми корнями) и *универсальную решётку* Λ_{sc} , порождённую всеми весами всех представлений. Для любого точного представления π имеет место включение $\Lambda_{\text{ad}} \subseteq \Lambda_\pi \subseteq \Lambda_{\text{sc}}$. Соответственно имеем *присоединённую* и *универсальную* элементарные группы Шевалле.

Предложение 3 [8, с. 32]. Каждая элементарная группа Шевалле удовлетворяет следующим соотношениям:

- (R1) $\forall \alpha \in \Phi \forall t, u \in R \quad x_\alpha(t)x_\alpha(u) = x_\alpha(t+u)$;
- (R2) $\forall \alpha, \beta \in \Phi \forall t, u \in R \quad \alpha + \beta \neq 0 \implies [x_\alpha(t), x_\beta(u)] = x_\alpha(t)x_\beta(u)x_\alpha(-t)x_\beta(-u) = \prod x_{i\alpha+j\beta}(c_{ij}t^i u^j)$, где i, j — целые, умножение происходит по всем

корням $i\alpha + j\beta$, взятым в некотором фиксированном порядке, c_{ij} — целые числа, не зависящие от t и u ;

$$(R3) \quad \forall \alpha \in \Phi \quad w_\alpha = w_\alpha(1);$$

$$(R4) \quad \forall \alpha, \beta \in \Phi \quad \forall t \in R^* \quad w_\alpha h_\beta(t) w_\alpha^{-1} = h_{w_\alpha(\beta)}(t);$$

$$(R5) \quad \forall \alpha, \beta \in \Phi \quad \forall t \in R^* \quad w_\alpha x_\beta(t) w_\alpha^{-1} = x_{w_\alpha(\beta)}(ct), \text{ где } c = c(\alpha, \beta) = \pm 1;$$

$$(R6) \quad \forall \alpha, \beta \in \Phi \quad \forall t \in R^* \quad \forall u \in R \quad h_\alpha(t) x_\beta(u) h_\alpha(t)^{-1} = x_\beta(t^{\langle \beta, \alpha \rangle} u).$$

Через X_α обозначим подгруппу, порождённую всеми элементами $x_\alpha(t)$ для $t \in R$.

1.4. Группы Шевалле

Введём теперь группы Шевалле (см. [4, 8, 13, 25] и дальнейшие ссылки в этих работах).

Определение 16. Подмножество $X \subseteq \mathbb{C}^n$ называется *аффинным многообразием*, если X — множество общих нулей в $\mathbb{C}^n$ конечной системы полиномов из $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Определение 17. Топология аффинного n -пространства, система замкнутых множеств которой совпадает с системой аффинных многообразий, называется *топологией Зариского*. Многообразие называется *неприводимым*, если оно не может быть представлено в виде объединения двух своих собственных непустых замкнутых подмножеств.

Определение 18. Пусть G — аффинное многообразие, обладающее структурой группы. Если оба отображения

$$\begin{aligned} m: G \times G &\rightarrow G, & m(x, y) &= xy, \\ i: G &\rightarrow G, & i(x) &= x^{-1}, \end{aligned}$$

выражаются полиномами от координат, то G называется *аффинной алгебраической группой*. *Линейной алгебраической группой* называется произвольная алгебраическая подгруппа в $M_n(\mathbb{C})$ (с матричной операцией умножения).

Алгебраическая группа называется *связной*, если она неприводима как многообразие.

Каждая алгебраическая группа G содержит единственную наибольшую связную разрешимую нормальную подгруппу — *радикал* $R(G)$. Связная алгебраическая группа, у которой радикал тривиален, называется *полупростой*.

Рассмотрим полупростые линейные алгебраические группы над алгебраически замкнутыми полями. Это в точности элементарные группы Шевалле $E_\pi(\Phi, K)$ (см. [8, § 5]).

Все такие группы определимы в $SL_n(K)$ как множество общих нулей полиномов от матричных элементов a_{ij} с целыми коэффициентами (например, в случае системы корней C_l и универсального представления имеем $n = 2l$, многочлены получаются из соотношения $(a_{ij})Q(a_{ji}) - Q = 0$). Теперь ясно, что умножение и взятие обратного элемента также задаются полиномами от целых

коэффициентов. Значит, эти многочлены можно считать многочленами над произвольным коммутативным кольцом с единицей. Пусть некоторая элементарная группа Шевалле E над $\mathbb{C}$ определима в $SL_n(\mathbb{C})$ полиномами $p_1(a_{ij}), \dots, p_m(a_{ij})$. Для коммутативного кольца R с единицей рассмотрим группу

$$G(R) = \{a_{ij} \in M_n(R) \mid \tilde{p}_1(a_{ij}) = 0, \dots, \tilde{p}_m(a_{ij}) = 0\},$$

где $\tilde{p}_1(\dots), \dots, \tilde{p}_m(\dots)$ — полиномы, имеющие те же коэффициенты, что и $p_1(\dots), \dots, p_m(\dots)$, но рассматриваемые над R .

Определение 19. Описанная выше группа называется *группой Шевалле* $G_\pi(\Phi, R)$ типа Φ над кольцом R , для любого алгебраически замкнутого поля K она совпадает с элементарной группой Шевалле.

Определение 20. Подгруппа диагональных (в стандартном базисе из весовых векторов) матриц группы Шевалле $G_\pi(\Phi, R)$ называется *стандартным максимальным тором* группы $G_\pi(\Phi, R)$, она обозначается через $T_\pi(\Phi, R)$. Эта группа изоморфна $\text{Hom}(\Lambda_\pi, R^*)$.

Пусть $h(\chi)$ — элемент тора $T_\pi(\Phi, R)$, соответствующий гомоморфизму $\chi \in \text{Hom}(\Lambda(\pi), R^*)$. В частности, $h_\alpha(u) = h(\chi_{\alpha,u})$ ($u \in R^*$, $\alpha \in \Phi$), где

$$\chi_{\alpha,u}: \lambda \mapsto u^{\langle \lambda, \alpha \rangle} \quad (\lambda \in \Lambda_\pi).$$

Заметим, что равенство $G_\pi(\Phi, R) = E_\pi(\Phi, R)$ не всегда верно даже в случае полей, не являющихся алгебраически замкнутыми. Однако если группа G универсальна, а кольцо R *полулокально* (т. е. содержит лишь конечное число максимальных идеалов), то мы имеем равенство $G_{\text{sc}}(\Phi, R) = E_{\text{sc}}(\Phi, R)$ [11, 12, 18, 21].

Покажем разницу между группами Шевалле и их элементарными подгруппами в случае, когда кольцо R полулокально, а группа Шевалле не обязательно универсальна. В этом случае $G_\pi(\Phi, R) = E_\pi(\Phi, R)T_\pi(\Phi, R)$ (см. [11, 12, 18]), элементы $h(\chi)$ связаны с элементарными образующими формулой

$$h(\chi)x_\beta(\xi)h(\chi)^{-1} = x_\beta(\chi(\beta)\xi). \quad (1)$$

Известно, что группа элементарных матриц $E_2(R) = E_{\text{sc}}(A_1, R)$ не обязательно нормальна в специальной линейной группе $SL_2(R) = G_{\text{sc}}(A_1, R)$ (см. [9, 14, 24]). Однако в случае неприводимой системы корней Φ ранга $l \geq 2$ группа $E(\Phi, R)$ всегда нормальна в $G(\Phi, R)$. В случае полулокальных колец из формулы (1) получаем

$$[G(\Phi, R), G(\Phi, R)] \subseteq E(\Phi, R).$$

Если кольцо R также содержит $1/2$, то легко показать, что

$$[G(\Phi, R), G(\Phi, R)] = [E(\Phi, R), E(\Phi, R)] = E(\Phi, R).$$

1.5. Определение стандартных автоморфизмов и формулировки основных теорем

Определение 21. Определим три типа автоморфизмов группы Шевалле $G_\pi(\Phi, R)$, которые назовём *стандартными*.

Пусть $C_G(R)$ — центр группы $G_\pi(\Phi, R)$, $\tau: G_\pi(\Phi, R) \rightarrow C_G(R)$ — гомоморфизм групп. Тогда отображение $x \mapsto \tau(x)x$ из $G_\pi(\Phi, R)$ на себя является автоморфизмом группы $G_\pi(\Phi, R)$, который обозначается буквой τ и называется *центральный автоморфизм* группы $G_\pi(\Phi, R)$. Любой центральный автоморфизм группы Шевалле $G_\pi(\Phi, R)$ тождественен на коммутанте. При наших предположениях элементарная подгруппа $E_\pi(\Phi, R)$ является коммутантом групп $G_\pi(\Phi, R)$ и $E_\pi(\Phi, R)$, таким образом, на элементарных группах Шевалле все центральные автоморфизмы тождественны.

Пусть $\rho: R \rightarrow R$ — автоморфизм кольца R . Отображение $x \mapsto \rho \circ x$ из $G_\pi(\Phi, R)$ на себя является автоморфизмом группы $G_\pi(\Phi, R)$, обозначаемым той же буквой ρ , и называется *кольцевым автоморфизмом* группы $G_\pi(\Phi, R)$. Заметим, что для всех $\alpha \in \Phi$ и $t \in R$ элемент $x_\alpha(t)$ отображается в $x_\alpha(\rho(t))$.

Пусть V — пространство представления π группы $G_\pi(\Phi, R)$, $g \in \mathrm{GL}(V)$ — такая матрица, что $gG_\pi(\Phi, R)g^{-1} = G_\pi(\Phi, R)$. Тогда отображение $x \mapsto gxg^{-1}$ из $G_\pi(\Phi, R)$ на себя является автоморфизмом группы $G_\pi(\Phi, R)$, который обозначается i_g и называется «*внутренним*» *автоморфизмом* группы $G_\pi(\Phi, R)$, *индуцированным элементом* g группы $\mathrm{GL}(V)$.

Аналогично мы можем определить три типа автоморфизмов элементарной подгруппы $E(R)$. Автоморфизм σ группы $G_\pi(\Phi, R)$ (или $E_\pi(\Phi, R)$) называется *стандартным*, если он является композицией автоморфизмов этих трёх типов.

Теорема 1. Пусть $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ — элементарная группа Шевалле с неприводимой системой корней одного из типов B_2 или G_2 , R — коммутативное локальное кольцо с $1/2$. Предположим, что если $\Phi = G_2$, то $1/3 \in R$. Тогда любой автоморфизм $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ стандартен.

В данном случае теорема для групп Шевалле $G_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ имеет ту же формулировку.

Теорема 2. Пусть $G_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ — группа Шевалле с неприводимой системой корней одного из типов B_2 или G_2 , R — коммутативное локальное кольцо с $1/2$. Предположим, что если $\Phi = G_2$, то $1/3 \in R$. Тогда любой автоморфизм группы $G_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ стандартен.

Описание нестандартных автоморфизмов групп $\mathrm{SL}_3(R)$, $\mathrm{GL}_3(R)$ над локальными кольцами с необратимой двойкой можно найти в [7].

Следующие разделы посвящены доказательству теорем 1 и 2.

2. Замена изначального автоморфизма изоморфизмом специального вида

В этом разделе мы используем некоторые соображения работы [6].

Определение 22. Через $\mathrm{GL}_n(R, J)$ будем обозначать подгруппу таких матриц A из $\mathrm{GL}_n(R)$, для которых $A - E \in M_n(J)$, J — радикал кольца R .

Предложение 4. По произвольному автоморфизму φ элементарной группы Шевалле $E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ можно построить изоморфизм $\varphi' = i_{g^{-1}}\varphi$, $g \in \text{GL}_n(R)$, группы $E_{\text{ad}}(\Phi, R) \subset \text{GL}_n(R)$ на некоторую подгруппу в $\text{GL}_n(R)$, обладающий тем свойством, что любая матрица $A \in E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ с элементами из подкольца R , порождённого единицей, отображается под действием изоморфизма φ' в матрицу из множества $A \cdot \text{GL}_n(R, J)$.

Доказательство. Пусть J — максимальный идеал (радикал) кольца R , k — поле R/J . Тогда $E_J = E(\Phi, R, J)$ — группа, порождённая всеми $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in J$, — это наибольшая нормальная собственная подгруппа в $E(\Phi, R)$ (см. [11]). Таким образом, E_J инвариантна относительно действия автоморфизма φ . По этой причине автоморфизм

$$\varphi: E(\Phi, R) \rightarrow E(\Phi, R)$$

индуцирует автоморфизм

$$\bar{\varphi}: E(\Phi, R)/E_J = E(\Phi, k) \rightarrow E(\Phi, k).$$

Группа $E(\Phi, k)$ является группой Шевалле над полем, поэтому автоморфизм $\bar{\varphi}$ стандартен, т. е. имеет вид

$$\bar{\varphi} = i_{\bar{g}}\bar{\rho}, \quad \bar{g} \in E_J(E(\Phi, k))$$

(см. [8, § 10]). Ясно, что существует матрица $g \in \text{GL}_n(R)$, такая что её образ при факторизации R по J совпадает с $\bar{g}$. Заметим, что не обязательно $g \in N(E(\Phi, R))$.

Рассмотрим отображение $\varphi' = i_{g^{-1}}\varphi$. Это изоморфизм группы $E_{\text{ad}}(\Phi, R) \subset \text{GL}_n(R)$ на её подгруппу в $\text{GL}_n(R)$, обладающий свойством, что его образ при факторизации R по J совпадает с автоморфизмом $\bar{\rho}$.

Так как автоморфизм $\bar{\rho}$ тождественно действует на матрицах, все элементы которых порождены единицей поля k , то любая матрица $A \in E(\Phi, R)$ с элементами из подкольца R , порождённого единицей, отображается под действием изоморфизма φ' в матрицу из множества $A \cdot \text{GL}_n(R, J)$. $\square$

Пусть $a \in E(\Phi, R)$, $a^2 = 1$. Тогда элемент $e = \frac{1}{2}(1+a)$ является идемпотентом кольца $M_n(R)$. Этот идемпотент e определяет разложение свободного R -модуля $V = R^n$:

$$V = eV \oplus (1-e)V = V_0 \oplus V_1$$

(модули V_0, V_1 свободны, так как любой проективный модуль над локальным кольцом свободен). Пусть $\bar{V} = \bar{V}_0 \oplus \bar{V}_1$ — разложение k -модуля $\bar{V}$ относительно $\bar{a}$, $\bar{e} = \frac{1}{2}(1+\bar{a})$.

Предложение 5. Модули (подпространства) $\bar{V}_0, \bar{V}_1$ являются образами модулей V_0, V_1 при факторизации по J .

Доказательство. Обозначим образы V_0, V_1 при факторизации по J через $\bar{V}_0, \bar{V}_1$ соответственно. Так как

$$V_0 = \{x \in V \mid ex = x\}, \quad V_1 = \{x \in V \mid ex = 0\},$$

имеем

$$\bar{e}(\bar{x}) = \frac{1}{2}(1 + \bar{a})(\bar{x}) = \frac{1}{2}(1 + \bar{a}(\bar{x})) = \frac{1}{2}(1 + \overline{a(x)}) = \overline{e(x)}.$$

Тогда $\tilde{V}_0 \subseteq \bar{V}_0$, $\tilde{V}_1 \subseteq \bar{V}_1$.

Пусть $x = x_0 + x_1$, $x_0 \in V_0$, $x_1 \in V_1$. Тогда

$$\bar{e}(\bar{x}) = \bar{e}(\bar{x}_0) + \bar{e}(\bar{x}_1) = \bar{x}_0.$$

Если $\bar{x} \in \tilde{V}_0$, то $\bar{x} = \bar{x}_0$. □

Пусть $b = \varphi'(a)$. Тогда $b^2 = 1$ и b сравнимо с a по модулю J .

Предложение 6. Предположим, что $a, b \in E_\pi(\Phi, R)$, $a^2 = b^2 = 1$, a — матрица с элементами из подкольца R , порождённого единицей, b и a сравнимы по модулю J , $V = V_0 \oplus V_1$ — разложение V относительно a , $V = V'_0 \oplus V'_1$ — разложение V относительно b . Тогда $\dim V'_0 = \dim V_0$, $\dim V'_1 = \dim V_1$.

Доказательство. Мы имеем R -базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ модуля V , такой что

$$\{e_1, \dots, e_k\} \subset V_0, \quad \{e_{k+1}, \dots, e_n\} \subset V_1.$$

Ясно, что

$$\bar{a}\bar{e}_i = \overline{a e_i} = \overline{\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} e_j\right)} = \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} \bar{e}_j.$$

Пусть $\bar{V} = \bar{V}_0 \oplus \bar{V}_1$, $\bar{V} = \bar{V}'_0 \oplus \bar{V}'_1$ — разложения k -модуля (пространства) $\bar{V}$ относительно $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Ясно, что $\bar{V}_0 = \bar{V}'_0$, $\bar{V}_1 = \bar{V}'_1$. По предложению 5 образы модулей V_0 и V'_0 , V_1 и V'_1 при факторизации по J совпадают. Возьмём такие $\{f_1, \dots, f_k\} \subset V'_0$, $\{f_{k+1}, \dots, f_n\} \subset V'_1$, что $f_i = \bar{e}_i$, $i = 1, \dots, n$. Так как матрица перехода от $\{e_1, \dots, e_n\}$ к $\{f_1, \dots, f_n\}$ обратима (она сравнима с единичной матрицей по модулю J), то $\{f_1, \dots, f_n\}$ является R -базисом в V . Ясно, что $\{f_1, \dots, f_k\}$ — R -базис в V'_0 , $\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ — R -базис в V'_1 . □

3. Образы элементов w_{α_i}

Рассмотрим присоединённую группу Шевалле $E = E(\Phi, R)$ с одной из систем корней B_2 или G_2 и её присоединённое представление в группе $\mathrm{GL}_{10}(R)$ (или $\mathrm{GL}_{14}(R)$) в базисе из весовых векторов

$$v_1 = x_{\alpha_1}, \quad v_{-1} = x_{-\alpha_1}, \dots, \quad v_l = x_{\alpha_l}, \quad v_{-l} = x_{-\alpha_l}, \quad V_1 = h_1, \quad V_2 = h_2,$$

соответствующем базису Шевалле системы B_2 или G_2 .

Мы считаем, что по автоморфизму φ нами построен изоморфизм $\varphi' = i_{g^{-1}}\varphi$, описанный в предыдущем разделе. Напомним, что это изоморфизм группы $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R) \subset \mathrm{GL}_n(R)$ на некоторую подгруппу в $\mathrm{GL}_n(R)$, обладающий свойством, что его образ при факторизации R по J совпадает с кольцевым автоморфизмом $\bar{\rho}$.

Рассмотрим матрицы $h_{\alpha_1}(-1)$, $h_{\alpha_2}(-1)$ (см. определение 14) в нашем базисе. Они имеют вид

$$\begin{aligned} h_{\alpha_1}(-1) &= \text{diag}[-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], \\ h_{\alpha_2}(-1) &= E \end{aligned}$$

в случае B_2 и

$$\begin{aligned} h_{\alpha_1}(-1) &= \text{diag}[1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1], \\ h_{\alpha_2}(-1) &= \text{diag}[-1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1] \end{aligned}$$

в случае G_2 .

В соответствии с предложением 6 каждая матрица $h_i = \varphi'(h_{\alpha_i}(-1))$ в некотором базисе диагональна с ± 1 на диагонали, количество 1 и -1 совпадает с этим количеством для матрицы $h_{\alpha_i}(-1)$. Так как h_1 и h_2 коммутируют, существует базис, в котором h_1 и h_2 имеют тот же вид, что и $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$. Пусть такая замена базиса осуществляется с помощью матрицы g_1 . Ясно, что $g_1 \in \text{GL}_n(R, J)$. Рассмотрим отображение $\varphi_1 = i_{g_1}^{-1}\varphi'$. Оно также является изоморфизмом группы E на некоторую подгруппу $\text{GL}_n(R)$, такую что её образ при факторизации R по J есть $\bar{\rho}$, и $\varphi_1(h_{\alpha_i}(-1)) = h_{\alpha_i}(-1)$ для $i = 1, 2$.

Теперь будем рассматривать изоморфизм φ_1 вместо φ' .

Замечание 1. Каждый из элементов $w_i = w_{\alpha_i}(1)$ отображает (с помощью сопряжения) диагональные матрицы в диагональные, т. е. каждый w_i -образ имеет блочно-мономиальную форму. В частности, он может быть записан как блочно-мономиальная матрица, где первый блок имеет размер 8×8 для B_2 и 12×12 для G_2 , а второй блок имеет размер 2×2 .

После сопряжений с помощью матриц из $\text{GL}_n(R, J)$ мы от весового базиса перешли к некоторому другому базису модуля V . Рассмотрим первый вектор этого нового базиса, обозначим его через e . Группа Вейля W транзитивно действует на множестве корней одинаковой длины, поэтому для любого корня α_i той же длины, что и первый корень, существует такой элемент $w^{(\alpha_i)} \in W$, что $w^{(\alpha_i)}\alpha_1 = \alpha_i$. Аналогично все корни другой длины также сопряжены под действием группы W . Пусть α_k — это первый корень длины, не совпадающей с длиной корня α_1 , и пусть f — k -й базисный вектор нового базиса. Если α_j — корень, сопряжённый к α_k , то через $w_{(\alpha_j)}$ обозначим такой элемент группы W , что $w_{(\alpha_j)}\alpha_k = \alpha_j$. Рассмотрим теперь базис $e_1, \dots, e_{2m+2}$, где $e_1 = e$, $e_k = f$ и для любых $1 < i \leq 2m$ либо $e_i = \varphi_1(w^{(\alpha_i)})e$, либо $e_i = \varphi_1(w_{(\alpha_i)})f$ в зависимости от длины α_k ; для $2m < i \leq 2m+2$ e_i не меняется. Ясно, что матрица такой замены базиса эквивалентна 1 по модулю радикала J . Значит, полученное множество векторов является базисом.

Матрица $\varphi_1(w_i)$ ($i = 1, 2$) на части базиса $\{e_1, \dots, e_{12}\}$ совпадает с матрицей w_i в изначальном базисе из весовых векторов. Так как $h_i(-1)$ — квадраты элементов w_i , их образы также не меняются в новом базисе.

Кроме того, мы знаем (замечание 1), что $\varphi_1(w_i)$ блочно-диагональна относительно первых 8 (12) и последних двух элементов. Таким образом, последнюю часть базиса, состоящую из двух элементов, можно изменять независимо.

Обозначим матрицы w_i и $\varphi_1(w_i)$ на этой части базиса через $\tilde{w}_i$ и $\widetilde{\varphi_1(w_i)}$ соответственно, а 2-порождённый модуль, порождённый элементами e_{2m+1} и e_{2m+2} , через $\tilde{V}$.

Лемма 1. Для систем корней B_2 и G_2 существует такой базис, что матрицы $\widetilde{\varphi_1(w_1)}$ и $\widetilde{\varphi_1(w_2)}$ в этом базисе имеют тот же вид, что и $\tilde{w}_1$ и $\tilde{w}_2$, т. е. равны

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

для случая B_2 и

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

для случая G_2 .

Доказательство. Так как матрица $\tilde{w}_1$ является инволюцией и пространство $\tilde{V}_1^1$ имеет размерность 1, то существует базис $\{e_1, e_2\}$, где матрица $\widetilde{\varphi_1(w_1)}$ имеет вид $\text{diag}[-1, 1]$. В базисе $\{e_1, e_2 - e_1\}$ матрица $\widetilde{\varphi_1(w_1)}$ имеет требуемую форму для B_2 , а в базисе $\{e_1, e_2 - 3/2e_1\}$ она имеет требуемую форму для G_2 .

Запишем матрицу $\widetilde{\varphi_1(w_2)}$ в этом новом базисе как $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Сделаем замену базиса с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & (1-a)/c \\ 0 & 1+2(1-a)/c \end{pmatrix}.$$

При такой замене базиса матрица $\widetilde{\varphi_1(w_1)}$ не изменится, а матрица $\widetilde{\varphi_1(w_2)}$ примет вид $\begin{pmatrix} 1 & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Так как эта матрица является инволюцией, то $c'(1+d') = 0$, $1+b'c' = 1$. Таким образом, $d' = -1$, $b' = 0$. Теперь рассмотрим случаи B_2 и G_2 по отдельности.

Для случая B_2 используем условие

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c' & -1 \end{pmatrix} \right)^2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c' & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^2.$$

Это условие (его вторая строка и первый столбец) даёт $2c'(c' - 2) = 0$, поэтому $c' = 2$.

Для случая G_2

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c' & -1 \end{pmatrix} \right)^3 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c' & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^3,$$

откуда $3c'(3c' - 1)(c' - 1) = 0$. Так как $3 \in R^*$, $c' \equiv 1 \pmod{J}$, $3c' - 1 \equiv 2 \pmod{J}$, то $c' = 1$. $\square$

$$\begin{aligned}
w_{e_1+e_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
w_{e_2} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \\
x_{e_2}(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Понятно, что любые соотношения, выполняющиеся для элементов группы Шевалле, выполняются и для их образов под действием изоморфизма φ_2 . Мы будем использовать этот факт.

Используя соотношение $w_{e_1} \cdot x_{e_2}(1) = x_{e_2}(1) \cdot w_{e_1}$, прямым вычислением получаем

$$\begin{aligned}
x_{e_2} &= \varphi_2(x_{e_2}(1)) = \\
&= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} & a_{1,7} & a_{1,8} & a_{1,9} & a_{1,10} \\ a_{1,2} & a_{1,1} & a_{1,3} & a_{1,4} & -a_{1,8} & -a_{1,7} & -a_{1,6} & -a_{1,5} & -a_{1,9} - 2a_{1,10} & a_{1,10} \\ a_{3,1} & a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} & -a_{3,6} & -a_{3,5} & a_{3,9} & -a_{3,9} \\ a_{4,1} & a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} & -a_{4,6} & -a_{4,5} & a_{4,9} & -a_{4,9} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} & a_{5,7} & a_{5,8} & a_{5,9} & a_{5,10} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & a_{6,3} & a_{6,4} & a_{6,5} & a_{6,6} & a_{6,7} & a_{6,8} & a_{6,9} & a_{6,10} \\ -a_{6,2} & -a_{6,1} & -a_{6,3} & -a_{6,4} & a_{6,8} & a_{6,7} & a_{6,6} & a_{6,5} & a_{6,9} + 2a_{6,10} & -a_{6,10} \\ -a_{5,2} & -a_{5,1} & -a_{5,3} & -a_{5,4} & a_{5,8} & a_{5,7} & a_{5,6} & a_{5,5} & a_{5,9} + 2a_{5,10} & -a_{5,10} \\ a_{9,1} & -a_{9,1} & 0 & 0 & a_{9,5} & a_{9,6} & a_{9,6} & a_{9,5} & a_{9,9} & 0 \\ a_{10,1} & a_{10,1} - 2a_{9,1} & a_{10,3} & a_{10,4} & a_{10,5} & a_{10,6} & 2a_{9,6} - a_{10,6} & 2a_{9,5} - a_{10,5} & a_{10,9} & a_{9,9} - a_{10,9} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Делая замену базиса с помощью блочно-диагональной матрицы, единичной на части базиса $\{v_{e_1+e_2}, v_{-e_1-e_2}, v_{e_1-e_2}, v_{e_2-e_1}, V_1, V_2\}$ и имеющей вид

$$\begin{pmatrix} 2a_{1,7}/(a_{1,7}^2 + a_{1,8}^2) & -2a_{1,8}/(a_{1,7}^2 + a_{1,8}^2) & 0 & 0 \\ -2a_{1,8}/(a_{1,7}^2 + a_{1,8}^2) & 2a_{1,7}/(a_{1,7}^2 + a_{1,8}^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_{1,7}/(a_{1,7}^2 + a_{1,8}^2) & -2a_{1,8}/(a_{1,7}^2 + a_{1,8}^2) \\ 0 & 0 & -2a_{1,8}/(a_{1,7}^2 + a_{1,8}^2) & 2a_{1,7}/(a_{1,7}^2 + a_{1,8}^2) \end{pmatrix}$$

на части базиса $\{v_{e_1}, v_{-e_1}, v_{e_2}, v_{-e_2}\}$, мы не меняем элементы w_i , но теперь $a_{1,7}$ становится равным 2, а $a_{1,8}$ — равным 0. В то же время эта замена базиса сравнима с тождественной по модулю J .

Аналогично замена базиса с помощью блочно-диагональной матрицы, единичной на части базиса $\{v_{e_1}, v_{-e_1}, v_{e_2}, v_{-e_2}, V_1, V_2\}$ и имеющая вид

$$\begin{pmatrix} 2a_{3,9}/(a_{3,9}^2 + a_{4,9}^2) & -2a_{4,9}/(a_{3,9}^2 + a_{4,9}^2) & 0 & 0 \\ -2a_{4,9}/(a_{3,9}^2 + a_{4,9}^2) & 2a_{3,9}/(a_{3,9}^2 + a_{4,9}^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_{3,9}/(a_{3,9}^2 + a_{4,9}^2) & -2a_{4,9}/(a_{3,9}^2 + a_{4,9}^2) \\ 0 & 0 & -2a_{4,9}/(a_{3,9}^2 + a_{4,9}^2) & 2a_{3,9}/(a_{3,9}^2 + a_{4,9}^2) \end{pmatrix}$$

на части базиса $\{v_{e_1+e_2}, v_{-e_1-e_2}, v_{e_1-e_2}, v_{e_2-e_1}\}$, также не меняет элементы w_i , $a_{1,7}$, $a_{1,8}$, но теперь $a_{3,9}$ становится равным 2, $a_{4,9}$ — равным 0. Эта замена единична по модулю J .

Будем считать, что после этих двух замен мы перешли к изоморфизму φ_3 .

Теперь рассмотрим матрицу $x_{e_1+e_2}$, являющуюся образом $x_{e_1+e_2}(1)$. Она коммутирует с $h_{e_1-e_2}(-1)$ и $w_{e_1-e_2}$, поэтому равна

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_{1,3} & -b_{1,4} & b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_{2,3} & -b_{2,4} & b_{2,1} & b_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{5,5} & b_{5,6} & b_{5,7} & -b_{5,7} & 0 & b_{5,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{6,5} & b_{6,6} & b_{6,7} & -b_{6,7} & 0 & b_{6,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{7,5} & b_{7,6} & b_{7,7} & b_{7,8} & b_{7,9} & b_{7,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{7,5} & -b_{7,6} & b_{7,8} & b_{7,7} & b_{7,9} & -b_{7,9} - b_{7,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{9,5} & b_{9,6} & b_{9,7} & b_{9,8} & b_{9,9} & b_{9,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2b_{9,5} & 2b_{9,6} & b_{9,7} - b_{9,8} & b_{9,8} - b_{9,7} & 0 & b_{9,9} + 2b_{9,10} \end{pmatrix}.$$

Мы будем использовать следующие соотношения:

$$\text{Con1} := (x_{e_2} h_{e_1+e_2}(-1) x_{e_2} h_{e_1+e_2}(-1) = 1),$$

$$\text{Con2} := (x_{e_1+e_2} x_{e_1-e_2} = x_{e_1-e_2} x_{e_1+e_2}) :=$$

$$:= (x_{e_1+e_2} w_{e_2} x_{e_1+e_2} w_{e_2}^{-1} = w_{e_2} x_{e_1+e_2} w_{e_2}^{-1} x_{e_1+e_2}),$$

$$\text{Con3} := (x_{e_1+e_2} x_{e_2} = x_{e_2} x_{e_1+e_2}),$$

$$\text{Con4} := (x_{e_1+e_2}^2 x_{e_2} x_{e_1} = x_{e_1} x_{e_2}),$$

$$\text{Con5} := (x_{e_1-e_2} w_{e_1-e_2} x_{e_1-e_2} w_{e_1-e_2}^{-1} z_{e_1-e_2} = w_{e_1-e_2}).$$

Обозначим $y_1 = a_{1,1} - 1$, $y_{1,2} = a_{1,2}$, $y_3 = a_{1,3}$, $y_4 = a_{1,4}$, $y_5 = a_{1,5}$, $y_6 = a_{1,6}$, $y_7 = a_{1,9}$, $y_8 = a_{1,10}$, $y_9 = a_{3,1}$, $y_{10} = a_{3,3} - 1$, $y_{11} = a_{3,4} + 1$, $y_{12} = a_{3,5}$, $y_{13} = a_{3,6}$, $y_{14} = a_{4,1}$, $y_{15} = a_{4,3}$, $y_{16} = a_{4,4} - 1$, $y_{17} = a_{4,5}$, $y_{18} = a_{4,6}$, $y_{19} = a_{5,1} - 1$, $y_{20} = a_{5,2}$, $y_{21} = a_{5,3}$, $y_{22} = a_{5,4}$, $y_{23} = a_{5,5} - 1$, $y_{24} = a_{5,6}$, $y_{25} = a_{5,7} - 1$, $y_{26} = a_{5,8}$, $y_{27} = a_{5,9}$, $y_{28} = a_{5,10}$, $y_{29} = a_{6,1}$, $y_{30} = a_{6,2}$, $y_{31} = a_{6,3}$, $y_{32} = a_{6,4}$, $y_{33} = a_{6,5}$, $y_{34} = a_{6,6} - 1$, $y_{35} = a_{6,7}$, $y_{36} = a_{6,8}$, $y_{37} = a_{6,9}$, $y_{38} = a_{6,10}$, $y_{39} = a_{9,1}$, $y_{40} = a_{9,5}$, $y_{41} = a_{9,6}$, $y_{42} = a_{9,9} - 1$, $y_{43} = a_{10,1}$, $y_{44} = a_{10,3}$, $y_{45} = a_{10,4} - 1$, $y_{46} = a_{10,5}$, $y_{47} = a_{10,6}$, $y_{48} = a_{10,9}$, $y_{49} = b_{1,1} - 1$, $y_{50} = b_{1,2}$, $y_{51} = b_{1,3}$, $y_{52} = b_{1,4} + 1$, $y_{53} = b_{2,1}$, $y_{54} = b_{2,2} - 1$, $y_{55} = b_{2,3}$, $y_{56} = b_{2,4}$, $y_{57} = b_{5,5} - 1$, $y_{58} = b_{5,6} + 1$, $y_{59} = b_{5,7}$, $y_{60} = b_{5,10} + 1$, $y_{61} = b_{6,5}$, $y_{62} = b_{6,6} - 1$, $y_{63} = b_{6,7}$, $y_{64} = b_{6,10}$, $y_{65} = b_{7,5}$, $y_{66} = b_{7,6}$, $y_{67} = b_{7,7} - 1$, $y_{68} = b_{7,8}$, $y_{69} = b_{7,9}$, $y_{70} = b_{7,10}$, $y_{71} = b_{9,5}$, $y_{72} = b_{9,6} - 1$, $y_{73} = b_{9,7}$, $y_{74} = b_{9,8}$, $y_{75} = b_{9,9} - 1$, $y_{76} = b_{9,10}$. Все y_i лежат в J . Из соотношений Con1–Con5 мы можем выбрать 76 равенств со следующих позиций (эти уравнения линейны по отношению к y_i):

соотношение Con1: позиции (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (1, 10), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 10), (4, 1), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (5, 7), (5, 8), (5, 9), (6, 6), (9, 1), (9, 4) (29 равенств);

соотношение Con2: позиции (1, 3), (2, 3), (3, 3), (5, 5), (5, 6), (5, 7), (5, 8), (5, 9), (5, 10), (6, 8), (9, 5), (9, 6), (9, 9), (10, 5), (10, 8) (15 равенств);

соотношение Con3: позиции (1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (2, 9), (2, 10), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (3, 7), (3, 10), (5, 1), (5, 2), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (5, 7), (5, 9), (8, 2), (8, 4) (24 равенства);

соотношение Con4: позиции (5, 6), (5, 8), (5, 10), (6, 6), (7, 6), (10, 6) (6 равенств);

соотношение Con5: позиции (2, 4), (6, 7) (2 равенства).

Если мы напишем матрицу этой линейной системы по модулю J , мы получим матрицу размера 76×76 с коэффициентами $0, \pm 1, \pm 2$ и определителем 2^{36} (проверяется непосредственными вычислениями). Значит, определитель обратим в R . Таким образом, наша система уравнений имеет единственное решение $y_1 = \dots = y_{76} = 0$. Поэтому $\varphi_3(x_{\alpha_i}(1)) = x_{\alpha_i}(1)$.

Что касается элементов $c_t = \varphi_2(h_{e_1+e_2}(t))$, то, поскольку c_t коммутирует с $h_{e_1+e_2}(-1)$ и $w_{e_1-e_2}$, имеем

$$c_t = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{1,3} & -c_{1,4} & c_{1,1} & c_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{2,3} & -c_{2,4} & c_{2,1} & c_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{5,5} & c_{5,6} & c_{5,7} & -c_{5,7} & 0 & c_{5,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{6,5} & c_{6,6} & c_{6,7} & -c_{6,7} & 0 & c_{6,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{7,5} & c_{7,6} & c_{7,7} & c_{7,8} & c_{7,9} & c_{7,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{7,5} & -c_{7,6} & c_{7,8} & c_{7,7} & c_{7,9} & -c_{7,9} - c_{7,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{9,5} & c_{9,6} & c_{9,7} & c_{9,8} & c_{9,9} & c_{9,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2c_{9,5} & 2c_{9,6} & c_{9,7} - c_{9,8} & c_{9,8} - c_{9,7} & 0 & c_{9,9} + 2c_{9,10} \end{pmatrix}.$$

Из условия $c_t x_{e_1-e_2} = x_{e_1-e_2} c_t$ получаем $c_{1,2} = c_{1,3} = c_{2,1} = c_{2,4} = c_{5,7} = c_{6,7} = c_{7,5} = c_{7,6} = c_{7,8} = c_{7,9} = c_{9,7} = c_{9,8} = c_{7,10} = 0$, $c_{9,9} = c_{7,7}$.

Таким образом, $c_t = h_{e_1+e_2}(s)$ для некоторого $s \in R^*$. Аналогично для $d_t = \varphi_3(h_{e_2}(t))$ имеем $d_t = h_{e_2}(s)$ с тем же s .

Покажем то же самое для системы корней G_2 .

Напомним, что

[illegible]

$$x_{\alpha_1}(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{\alpha_2}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$h_{\alpha_2}(2) = \text{diag}[2, 1/2, 1/4, 4, 1/2, 2, 1, 1, 2, 1/2, 1/2, 2, 1, 1]$. Из того, что $x_1 = \varphi_2(x_{\alpha_1}(1))$ коммутирует с $h_{\alpha_1}(-1)$ и с $w_{3\alpha_1+2\alpha_2} = w_2 w_1 w_2 w_1^{-1} w_2^{-1}$, вытекает

$$x_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & -a_{11} & a_{13} & -3/2a_{13} \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{11} & -b_{11} & b_{13} & -3/2b_{13} \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & d_7 & d_8 & d_9 & d_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 & f_9 & f_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f_{10} & -f_9 & -f_8 & -f_7 & f_6 & f_5 & f_4 & f_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e_{10} & -e_9 & -e_8 & -e_7 & e_6 & e_5 & e_4 & e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_{10} & -d_9 & -d_8 & -d_7 & d_6 & d_5 & d_4 & d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{10} & -c_9 & -c_8 & -c_7 & c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ -g_1 & -g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{11} & g_{12} & -g_{13} & g_{14} + 3g_{13} \\ h_1 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{11} & -h_{11} + 3i_{11} & h_{13} & 3/2(i_{14} - h_{13}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i_{11} & i_{11} & 0 & i_{14} \end{pmatrix}.$$

Аналогично, так как $x_2 = \varphi_2(x_{\alpha_2}(1))$ коммутирует с $h_{\alpha_2}(-1)$ и $w_{2\alpha_1+\alpha_2} = w_1 w_2 w_1 w_2^{-1} w_1^{-1}$, имеем

$$x_2 = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & 0 & 0 & j_5 & j_6 & 0 & 0 & j_9 & j_{10} & j_{11} & j_{12} & 0 & 0 \\ k_1 & k_1 & 0 & 0 & k_5 & k_6 & 0 & 0 & k_9 & k_{10} & k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & l_4 & 0 & 0 & l_7 & -l_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{13} & -2l_{13} \\ 0 & 0 & m_3 & m_4 & 0 & 0 & m_7 & -m_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{13} & -2m_{13} \\ -k_6 & -k_5 & 0 & 0 & k_2 & k_1 & 0 & 0 & -k_{12} & -k_{11} & k_{10} & k_9 & 0 & 0 \\ -j_6 & -j_5 & 0 & 0 & j_2 & j_1 & 0 & 0 & -j_{12} & -j_{11} & j_{10} & j_9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & n_4 & 0 & 0 & n_7 & n_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_{13} & n_{14} \\ 0 & 0 & -n_3 & -n_4 & 0 & 0 & n_8 & n_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_{13} + n_{14} & -n_{14} \\ p_1 & p_2 & 0 & 0 & p_5 & p_6 & 0 & 0 & p_9 & p_{10} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 \\ q_1 & q_2 & 0 & 0 & q_5 & q_6 & 0 & 0 & q_9 & q_{10} & q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ -q_6 & -q_5 & 0 & 0 & q_2 & q_1 & 0 & 0 & 0 & -q_{11} & q_{10} & q_9 & 0 & 0 \\ -p_6 & -p_5 & 0 & 0 & p_2 & p_1 & 0 & 0 & -p_{12} & -p_{11} & p_{10} & p_9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_7 + s_8 & s_7 + s_8 & 0 & 0 & 0 & 2s_{13} + s_{14} & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & s_4 & 0 & 0 & s_7 & s_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{13} & s_{14} \end{pmatrix}.$$

Наконец, так как $h_{\alpha_2}(2)$ коммутирует с $h_{\alpha_1}(-1)$, $h_{\alpha_2}(-1)$, $w_{2\alpha_1+\alpha_2}$, а также из равенства

$$\text{Con6} := (w_2 h_{\alpha_2}(2) w_2^{-1} = h_{\alpha_2}(2)^{-1}),$$

получаем

$$d_2 = \varphi_2(h_{\alpha_2}(2)) = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{11} & t_{12} & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{11} & u_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 & v_4 & 0 & 0 & v_7 & -v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 & w_4 & 0 & 0 & w_7 & -w_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 & u_1 & 0 & 0 & -u_{12} & -u_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 & 0 & 0 & -t_{12} & -t_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & x_7 & x_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 & -x_4 & 0 & 0 & x_8 & x_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_5 & y_6 & 0 & 0 & y_9 & y_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_5 & z_6 & 0 & 0 & z_9 & z_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z_6 & -z_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{10} & z_9 & 0 & 0 & 0 \\ -y_6 & -y_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{10} & y_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Позиция (14, 12) соотношения

$$\text{Con7} := (x_1^2 d_2 = d_2 x_1)$$

даёт

$$i_{11} \cdot \alpha = i_{11}((g_{11} + g_{12} + i_{14})(z_9 + y_9) - 1) = 0.$$

Так как $\alpha \equiv 3 \pmod J$ и $3 \in R^*$, то $i_{11} = 0$. Из позиции (14, 14) того же соотношения получаем $i_{14}(i_{14} - 1) = 0$, откуда $i_{14} = 1$.

Теперь используем соотношение

$$\text{Con8} := (w_2 x_2 w_2^{-1} x_1 = x_1 w_2 x_2 w_2^{-1}).$$

Его позиция (14, 2) даёт $s_{13} = 0$,

Произведём блочно-диагональную замену базиса, единичную на подмодуле, порождённом всеми $\{V_1, \dots, V_i\}$ и всеми $\{v_i, v_{-i}\}$, где α_i — длинный корень, и

имеющую матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{13}/(a_{13}^2 - b_{13}^2) & -b_{13}/(a_{13}^2 - b_{13}^2) \\ -b_{13}/(a_{13}^2 - b_{13}^2) & a_{13}/(a_{13}^2 - b_{13}^2) \end{pmatrix}$$

на всех подмодулях, порождённых $\{v_i, v_{-i}\}$, где α_i — короткий корень. Эта замена базиса не меняет w_i ни для какого i , она сравнима с единицей по модулю J . В то же время теперь мы имеем $a_{13} = -2$, $b_{13} = 0$.

Позиция (13, 13) соотношения

$$\text{Con9} := (h_{\alpha_2}(-1)x_1 h_{\alpha_2}(-1)x_1 = 1)$$

даёт

$$2h_1 - 2g_{13}h_{11} + h_{13}^2 - 1 = 0,$$

а позиция (13, 13) соотношения Con7 —

$$-2h_1 + 2g_{13}h_{11} + h_{13}^2 - h_{13} = 0.$$

Из этих двух равенств вытекает $h_{13} = 1$.

Теперь позиции (2, 12) и (2, 13) соотношения Con9 дают

$$\begin{cases} -b_1 a_{11} + b_{11}(-b_2 + g_{12} - g_{11}) = 0, \\ -b_1 2 + b_{11}g_{13} = 0. \end{cases}$$

По модулю J эта система эквивалентна системе

$$\begin{cases} 0 \cdot \bar{b}_1 - 2 \cdot \bar{b}_{11} = 0, \\ -2 \cdot \bar{b}_1 + 0 \cdot \bar{b}_{11} = 0, \end{cases}$$

откуда $b_1 = b_{11} = 0$. Из того же соотношения (позиция (2, 2)) сразу следует $b_2 = 1$.

Сделаем снова блочно-диагональную замену базиса, единичную на подмодуле, порождённом всеми $\{V_1, \dots, V_l\}$ и всеми $\{v_i, v_{-i}\}$, где α_i — короткий корень, и имеющую матрицу

$$\begin{pmatrix} l_{13}/(l_{13}^2 - m_{13}^2) & -m_{13}/(l_{13}^2 - m_{13}^2) \\ -m_{13}/(l_{13}^2 - m_{13}^2) & l_{13}/(l_{13}^2 - m_{13}^2) \end{pmatrix}$$

на всех подмодулях, порождённых $\{v_i, v_{-i}\}$, где α_i — длинный корень. Эта замена базиса не меняет w_i для всех i и сравнима с 1 по модулю J . В то же время имеем $l_{13} = 1$, $m_{13} = 0$.

Будем теперь считать, что от изоморфизма φ_2 после последних двух замен базиса мы перешли к изоморфизму φ_3 .

Из позиции (13, 2) соотношения Con9 получаем $h_1 a_2 = -2h_{11}g_2$, откуда вытекает $h_1 = \beta_1 h_{11}$, $\beta_1 \equiv 0 \pmod{J}$. Теперь из позиции (1, 12) соотношения Con9 имеем $-a_1 a_{11} + a_{11}g_{12} - a_{11}g_{11} - 2h_{11}$, поэтому $a_{11} = \beta_2 h_{11}$, $\beta_2 \equiv -1 \pmod{J}$. Аналогично из позиции (1, 13) соотношения Con9 имеем $a_1 = 1 + \beta_3 h_{11}$, $\beta_3 \equiv 0 \pmod{J}$, из позиции (12, 1) соотношения Con9 — $g_{12} = \beta_4 h_{11}$, $\beta_4 \equiv 0$

$\text{mod } J$, из позиции (12, 12) соотношения $\text{Con9} - g_{11} = 1 + \beta_5 h_{11}$, $\beta_5 \equiv 0 \pmod{J}$, из позиции (12, 1) соотношения $\text{Con9} - g_1 = \beta_6 h_{11}$, $\beta_6 \equiv 0 \pmod{J}$. Используя позицию (2, 1) соотношения

$$\text{Con10} := (x_1 w_1 x_1 w_1^{-1} = w_1),$$

мы получаем $a_2 = -1 + \beta_7 h_{11}$, $\beta_7 \equiv 0 \pmod{J}$. Из позиции (1, 2) соотношения Con9 вытекает $h_2 = 1 + \beta_8 h_{11}$, $\beta_8 \equiv 0 \pmod{J}$. Используя позицию (1, 2) соотношения

$$\text{Con11} := (w_2 x_2 w_2^{-1} x_1 = x_1 w_2 x_2 w_2^{-1}),$$

получаем $j_2 = \beta_9 h_{11}$, $\beta_9 \equiv 0 \pmod{J}$. Из позиции (13, 12) соотношения Con11 вытекает $j_{11} = \beta_{10} h_{11}$, $\beta_{10} \equiv 0 \pmod{J}$, из позиции (1, 11) соотношения $\text{Con11} - j_{12} = \beta_{11} h_{11}$, $\beta_{11} \equiv 0 \pmod{J}$, из позиции (1, 1) соотношения $\text{Con7} - u_1 = \beta_{12} h_{11}$, $\beta_{12} \equiv 0 \pmod{J}$, из позиции (1, 12) соотношения $\text{Con7} - u_{12} = \beta_{13} h_{11}$, $\beta_{13} \equiv 3/2 \pmod{J}$, из позиции (13, 2) соотношения $\text{Con7} - u_2 = 1/2 + \beta_{13} h_{11}$, $\beta_{13} \equiv 0 \pmod{J}$.

Используя позицию (7, 7) соотношения

$$\begin{aligned} \text{Con12} &:= (d_2 \varphi_2(x_{2\alpha_1 + \alpha_2}(1)) = \varphi_2(x_{2\alpha_1 + \alpha_2}(1)) d_2 = \\ &= d_2 w_1 w_2 x_1 w_2^{-1} w_1^{-1} - w_1 w_2 x_1 w_2^{-1} w_1^{-1} d_2), \end{aligned}$$

мы получаем $x_8 = \beta_{14} h_{11}$, $\beta_{14} \equiv 0 \pmod{J}$, из позиции (14, 8) соотношения Con12 вытекает $x_7 = 1 + \beta_{15} h_{11}$, $\beta_{15} \equiv 0 \pmod{J}$, из позиции (1, 11) соотношения $\text{Con7} - u_{11} = \beta_{15} h_{11}$, $\beta_{15} \equiv 0 \pmod{J}$.

Используя позицию (1, 12) соотношения

$$\text{Con13} := (w_2 d_2 w_2^{-1} d_2 = 1),$$

получаем $t_{12} = \beta_{16} h_{11}$, $\beta_{16} \equiv 0 \pmod{J}$, из позиции (1, 11) соотношения Con13 вытекает $t_{11} = \beta_{17} h_{11}$, $\beta_{17} \equiv -3/2 \pmod{J}$, из позиции (1, 5) соотношения $\text{Con13} - t_2 = \beta_{18} h_{11}$, $\beta_{18} \equiv 0 \pmod{J}$, из позиции (2, 2) соотношения $\text{Con13} - t_1 = 2 + \beta_{19} h_{11}$, $\beta_{19} \equiv 0 \pmod{J}$, из позиции (7, 4) соотношения $\text{Con12} - x_4 = \beta_{20} h_{11}$, $\beta_{20} \equiv 0 \pmod{J}$, из позиции (7, 3) соотношения $\text{Con12} - x_3 = \beta_{21} h_{11}$, $\beta_{21} \equiv 0 \pmod{J}$.

Позиция (13, 14) соотношения

$$\text{Con14} := (x_2 \varphi_2(x_{2\alpha_1 + \alpha_2}(1)) = \varphi_2(x_{2\alpha_1 + \alpha_2}(1)) x_2)$$

даёт $n_{14} = \beta_{22} h_{11}$, $\beta_{22} \equiv -2 \pmod{J}$, из позиции (13, 3) соотношения Con14 вытекает $n_3 = \beta_{23} h_{11}$, $\beta_{23} \equiv 0 \pmod{J}$, из позиции (13, 4) соотношения $\text{Con14} - n_4 = \beta_{24} h_{11}$, $\beta_{24} \equiv 0 \pmod{J}$, из позиции (8, 13) соотношения $\text{Con14} - n_8 = \beta_{25} h_{11}$, $\beta_{25} \equiv 0 \pmod{J}$.

Наконец, из позиции (7, 4) соотношения Con14 вытекает $\beta_{26} h_{11} = 0$, где $\beta_{26} \in R^*$. Следовательно, $h_{11} = 0$.

Теперь позиция (3, 14) соотношения Con11 даёт $c_4 = 0$, позиция (4, 14) того же соотношения — $d_4 = 1$, позиция (13, 2) — $s_{14} = j_1$.

Позиция (3, 13) соотношения

$$\text{Con15} := (h_{\alpha_1}(-1)x_2h_{\alpha_1}(-1)x_2 = 1)$$

даёт $l_3 = j_1$, позиция (4, 3) даёт $m_3(m_4 + 1) = 0$, следовательно, $m_3 = 0$, позиция (3, 3) даёт $s_3 = 0$, позиция (4, 4) — $m_4 = 1$, позиция (4, 7) — $m_7(1 + n_7) = 0$, следовательно, $m_7 = 0$, позиция (3, 13) даёт $j_1 = 1$, позиция (3, 4) — $s_4 = -l_4$.

Позиция (5, 3) соотношения Con11 даёт $e_4l_4 = 0$, следовательно, $e_4 = 0$. Позиция (4, 13) того же соотношения даёт $(d_7 + d_8)n_{13} = 0$, следовательно, $n_{13} = 0$. Позиция (8, 8) соотношения Con15 даёт $n_7 = 1$, позиция (7, 13) соотношения Con11 — $f_9 = 0$, позиция (8, 13) — $e_9 = 0$, позиция (13, 13) соотношения Con14 — $s_8 = -s_7$, позиция (14, 13) — $-l_4(-2g_{13} - g_{14}) = s_7$, а позиция (3, 13) — $l_4(-2g_{13} - g_{14}) = l_7$, поэтому $s_7 = -l_7$. Позиция (13, 5) соотношения Con11 даёт $j_6 = 0$, позиция (13, 6) — $j_5 = 0$, позиция (13, 9) — $j_{10} = 0$, позиция (13, 10) — $j_9 = 0$.

Позиции (10, 13) и (10, 14) соотношения

$$\begin{aligned} \text{Con16} := \left(\varphi_3(x_{3\alpha_1+\alpha_2}(1)x_{\alpha_2}(1)x_{3\alpha_1+2\alpha_2}(1)) = \varphi_3(x_{\alpha_2}(1)x_{3\alpha_1+\alpha_2}(1)) \right) := \\ := (w_1x_2w_1^{-1}x_2w_2w_1x_2w_2^{-1}w_2^{-1} = w_1x_2w_1^{-1}x_2) \end{aligned}$$

дают $q_9 = q_{11} = 0$, позиция (7, 13) даёт $k_{12} = 0$, позиция (9, 13) — $p_9 = 1$, позиция (2, 13) — $k_9 = 0$, позиция (2, 14) — $k_{11} = 0$, позиция (5, 14) — $k_{10} = 0$, позиция (14, 12) — $q_{12} = 1$, позиция (9, 14) — $p_{11} = 0$. Позиция (4, 14) даёт $p_{10}q_{12} = 0$, следовательно, $p_{10} = 0$. Позиция (12, 14) даёт $p_{12} = 0$, позиция (11, 14) — $q_{10} = 1$, позиция (3, 10) — $l_4 = -1$. Позиция (5, 1) даёт $k_6(k_2 - 1) = 0$, следовательно, $k_2 = 1$. Позиция (5, 2) даёт $k_6k_1 = 0$, следовательно, $k_1 = 0$. Позиции (4, 1) и (4, 2) дают $p_5 = p_6 = 0$. Позиция (13, 5) даёт $q_5 = 0$, позиция (4, 6) — $q_1k_6 = 0$, следовательно, $q_1 = 0$. Позиция (1, 6) даёт $k_5k_6 = 0$, следовательно, $k_5 = 0$. Позиция (5, 8) даёт $k_6(k_6 - 1) = 0$, следовательно, $k_6 = 1$. Позиция (12, 8) даёт $p_2 = 0$, позиция (13, 6) — $q_6 = 0$.

Из Con11 теперь следует, что $e_3 = 3$ (позиция (1, 3)), $f_4 = 0$ (позиция (6, 3)), $d_9 = 0$ (позиция (9, 3)), $c_9 = 0$ (позиция (10, 3)), $e_6 = 0$ (позиция (1, 6)), $e_{10} = 0$ (позиция (1, 10)), $e_5 = 1$ (позиция (1, 5)).

Из Con14 следует, что $f_7 = 0$ (позиция (1, 1)), $f_3 = 0$ (позиция (1, 12)). Позиция (1, 3) соотношения Con7 даёт $w_3 = 0$, позиции (3, 4) и (4, 3) соотношения Con9 дают $v_4 = 0$.

Из позиции (12, 2) соотношения Con9 получаем $g_{13} = 2g_2$, из позиции (8, 3) — $e_8 = -c_{10}$, из позиции (12, 14) соотношения Con10 — $g_{14} = -3g_2$. Позиция (6, 9) даёт $f_{10}(d_3 + f_5) = 0$, следовательно, $f_5 = -d_3$. Позиция (10, 6) соотношения Con15 даёт $q_2 = -p_1$, позиция (1, 7) соотношения Con11 — $e_7 = 3l_7$, позиция (1, 8) — $c_{10} = 3l_7$, позиция (12, 3) — $g_2 = l_7$, позиция (11, 3) — $p_1 = -l_7$.

Теперь из соотношения

$$\text{Con17} := (d_2x_2^4 = x_2d_2)$$

получаем $v_4 = 16v_3$ (позиция (3,4)), $v_3 = 1/4$ (позиция (3,13)), $w_7 = -3l_7$ (позиция (3,8)), $y_{10} = 0$ (позиция (9,12)), $y_9 = 4z_{10}$ (позиция (10,12)), $z_{10} = x_{10}$ (позиция (11,9)). Из позиций (11,12) и (12,12) соотношения Con6 получаем $z_9 = 0$, $z_{10} = 1/2$, из позиций (9,5) и (9,6) — $z_6 = -y_5$, $y_6 = -4z_5$, из позиции (4,8) — $v_7 = -3/4l_7$. Снова из Con17 вытекает $z_5 = 0$ (позиция (11,6)), $y_5 = -3/2l_7$ (позиция (10,2)). Из позиции (3,2) соотношения Con11 получаем $c_6 = -3l_7^2$, из позиции (4,3) — $c_3 = 1 + l_7f_{10}$, из позиции (4,2) — $d_6 = -1 - d_{10}l_7$, из позиции (6,2) — $f_6 = 1 - l_7f_{10}$, из позиции (4,8) — $c_8 = l_7d_3$, из позиции (12,6) — $c_7 = l_7f_{10}$, из позиции (9,12) — $d_3 = -l_7f_{10}$. Из позиции (5,7) соотношения Con7 имеем $3l_7(l_7f_{10} - f_{10}) = 0$. Так как $f_{10} \in R^*$, то $l_7 = 0$. Из Con11 теперь получаем $c_5 = 0$, из позиции (4,7) соотношения Con9 — $d_7 = 0$, из позиции (4,3) — $d_5 = 0$, из позиции (3,9) соотношения Con10 — $d_{10} = 1$, из позиции (5,9) — $f_{10} = -3$, из позиции (3,7) — $d_8 = 1$, из позиции (3,5) — $f_8 = -2$.

Теперь, наконец, мы видим, что $x_1 = x_{\alpha_1}(1)$, $x_2 = x_{\alpha_2}(1)$, $d_2 = h_{\alpha_2}(2)$. Легко проверить, что $\varphi_3(h_{\alpha_1}(t)) = h_{\alpha_1}(s)$ и $\varphi_3(h_{\alpha_2}(t)) = h_{\alpha_2}(s)$ для некоторого $s \in R^*$. Так как все корни одинаковой длины сопряжены относительно действия группы W , то $\varphi_3(x_{\alpha_i}(1)) = x_{\alpha_i}(1)$ и $\varphi_3(h_{\alpha_i}(t)) = h_{\alpha_i}(s)$ для некоторого $s \in R^*$.

6. Окончание доказательства теоремы 1

На данный момент мы установили, что для обеих рассматриваемых систем корней справедливы соотношения $\varphi_3(x_{\alpha_i}(1)) = x_{\alpha_i}(1)$, $\varphi_3(h_{\alpha_i}(t)) = h_{\alpha_i}(s)$, $i = \pm 1, \dots, \pm m$, $t, s \in R^*$.

Для любого длинного корня α_j существует корень α_k , такой что $h_{\alpha_k}(t)x_{\alpha_j}(1)h_{\alpha_k}(t)^{-1} = x_{\alpha_j}(t)$. Таким образом, $\varphi_3(x_{\alpha_j}(t)) = x_{\alpha_j}(s)$. Из выпи- санных соотношений и коммутаторных соотношений следует, что $\varphi_3(x_{\alpha_j}(t)) = x_{\alpha_j}(s)$ для всех $\alpha_j \in \Phi$.

Обозначим отображение $t \mapsto s$ через $\rho: R^* \rightarrow R^*$. Если $t \notin R^*$, то $t \in J$, т. е. $t = 1 + t_1$, где $t_1 \in R^*$. Тогда $\varphi_3(x_{\alpha}(t)) = \varphi_3(x_{\alpha}(1)x_{\alpha}(t_1)) = x_{\alpha}(1)x_{\alpha}(\rho(t_1)) = x_{\alpha}(1 + \rho(t_1))$, $\alpha \in \Phi$. Значит, если мы продолжим отображение ρ на все кольцо R (по формуле $\rho(t) := 1 + \rho(t-1)$ для $t \in J$), то получим $\varphi_3(x_{\alpha}(t)) = x_{\alpha}(\rho(t))$ для всех $t \in R$, $\alpha \in \Phi$. Ясно, что ρ инъективно, аддитивно, мультипликативно на обратимых элементах. Так как любой элемент кольца R является суммой двух обратимых, то ρ мультипликативно также и на необратимых элементах кольца, т. е. является изоморфизмом из кольца R на некоторое его подкольцо R' . Заметим, что в этой ситуации справедливо соотношение $CE(\Phi, R)C^{-1} = E(\Phi, R')$ для некоторой матрицы $C \in GL(V)$. Покажем, что $R' = R$.

Лемма 2. *Элементарная группа Шевалле $E_{\text{ad}}(R, \Phi)$ порождает $M_n(R)$ как кольцо.*

Доказательство. Рассмотрим случай системы корней B_2 , так как случай системы G_2 совершенно аналогичен. Матрица $(x_{e_1+e_2}(1) - 1)^2$ есть $-2E_{5,6}$ (E_{ij} — матричная единица). Умножая её на подходящую диагональную матрицу, мы

получим произвольную матрицу вида $\alpha \cdot e_{12}$ (так как $-2 \in R^*$ и обратимые элементы кольца R порождают R). Тогда $w_{e_1} \alpha E_{5,6} = \alpha E_{8,5}$, $w_{e_1} \alpha E_{5,6} w_{e_1} = \alpha E_{8,7}$, $w_{e_2} \alpha E_{5,6} = \alpha E_{7,6}$, $w_{e_2} \alpha E_{5,6} w_{e_1} = \alpha E_{7,7}$, $w_{e_2} \alpha E_{5,6} w_{e_2} = \alpha E_{7,8}$, $w_{e_1} \alpha E_{5,6} w_{e_2} = \alpha E_{8,8}$, $w_{e_1+e_2} \alpha E_{5,6} = \alpha E_{6,6}$. Эти матрицы порождают подкольцо матричного кольца, порождённое $E_{i,j}$, $4 \leq i, j \leq 8$. Аналогично с помощью $(x_{e_1}(1) - 1)^2$ мы можем получить подкольцо, порождённое $E_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 4$. С помощью этих матричных единиц и элементов $x_\alpha(1)$ мы можем породить подкольцо $M_8(R)$. Теперь вычтем из $x_{e_2}(1) - 1$ подходящие матричные единицы, получим матрицу $E_{10,4} - 2E_{3,9} + E_{3,10}$. Умножая её (справа) на $E_{4,i}$, $1 \leq i \leq 8$, получим все матрицы $E_{10,i}$, $1 \leq i \leq 2m$. С помощью группы Вейля имеем все матричные единицы $E_{i,j}$, $8 < i \leq 9$, $1 \leq j \leq 8$. Теперь у нас есть матрица $-2E_{3,9} + E_{3,10}$. Умножая её (слева) на $E_{2m+1,1}$, получаем $E_{2m+1,2m+1}$. С помощью последних двух матриц получаем $E_{3,9}$ и, таким образом, $E_{i,j}$, $1 \leq i \leq 8$, $8 < j \leq 9$. Видно, что мы получили все матричные единицы, а значит, всё матричное кольцо $M_n(R)$. $\square$

Лемма 3. Если для некоторой матрицы $C \in GL(V)$ справедливо равенство $CE(\Phi, R)C^{-1} = E(R', \Phi)$, где R' — подкольцо в R , то $R' = R$.

Доказательство. Предположим, что R' — собственное подкольцо в R . Тогда $CM_n(R)C^{-1} = M_n(R')$, так как группа $E(\Phi, R)$ порождает кольцо $M_n(R)$, а группа $E(\Phi, R') = CE(\Phi, R)C^{-1}$ — кольцо $M_n(R')$. Это невозможно, так как $C \in GL_n(R)$. $\square$

Таким образом, мы доказали, что ρ является автоморфизмом кольца R . Следовательно, композиция изначального изоморфизма φ' и некоторой замены базиса с помощью матрицы $C \in GL_n(R)$ (отображающей $E(\Phi, R)$ на себя) является кольцевым автоморфизмом ρ . Значит, $\varphi'' = i_{C^{-1}} \circ \rho$.

Следовательно, теорема 1 доказана.

7. Доказательство теоремы 2

Пусть имеется группа Шевалле $G_{ad}(\Phi, R)$ и её автоморфизм φ . Так как элементарная подгруппа $E_{ad}(\Phi, R)$ является коммутантом группы $G_{ad}(\Phi, R)$, то она отображается на себя под действием φ . На элементарной подгруппе φ является композицией стандартных автоморфизмов: $\varphi = i_C \circ \rho$. Рассмотрим отображение $\varphi' = \rho^{-1} \circ i_C^{-1} \circ \varphi$. Это изоморфизм группы Шевалле $G_{ad}(\Phi, R)$ на некоторую подгруппу $G \subset GL_n(R)$, тождественный на элементарной подгруппе. Мы знаем, что $G_{ad}(\Phi, R) = E_{ad}(\Phi, R)T_{ad}(\Phi, R)$, $T_{ad}(\Phi, R)$ состоит из таких элементов h_χ , что $\chi: \Phi \rightarrow R^*$ — гомоморфизм, $h_\chi x_\alpha(t) h_\chi^{-1} = x_\alpha(\chi(\alpha) \cdot t)$. Каждый элемент h_χ коммутирует со всеми $h_\alpha(t)$, $t \in R^*$.

Рассмотрим матрицу $A = \varphi'(h_\chi)$. Так как A коммутирует со всеми $h_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R^*$, то она имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где D — диагональная матрица размера $(2m) \times (2m)$, C — некоторая матрица размера $l \times l$. Для всех $\alpha \in \Phi$ и $t \in R$ имеем соотношение

$$Ax_\alpha(t)A^{-1} = x_\alpha(\chi(\alpha) \cdot t).$$

Прямыми вычислениями (как это было сделано в предыдущих разделах) убеждаемся, что из этого условия следует $A = a_\chi h_\chi$, где $a_\chi \in R^*$. Пусть $h_{t_1, \dots, t_l}$ — такой гомоморфизм решётки корней в R^* , что каждый простой корень α_i он переводит в t_i . Тогда из соотношения $(h_{t, 1, \dots, 1})^2 \cdot (h_{1, t^{-1}, 1, \dots, 1}) = h_{\alpha_1}(t)$ следует, что для всех χ справедливо $a_\chi^3 = 1$. Так как $\varphi'(h_\chi) \in \mathrm{SL}_n(R)$, то $a_\chi^n = 1$. Значит (так как 10, 14 — размерности пространств присоединённых представлений групп Шевалле типов B_2 и G_2 — не делятся на 3), имеем $a_\chi = 1$ для всех χ , и, таким образом, φ' — тождественное отображение. Теорема доказана.

Следствие. Любой автоморфизм (элементарной) присоединённой группы Шевалле типа B_2 (или G_2) над локальным коммутативным кольцом с $1/2$ ($1/6$) индуцирует автоморфизм матричного кольца $M_n(R)$, где n — размерность присоединённого представления.

Литература

- [1] Абе Э. Автоморфизмы групп Шевалле над коммутативными кольцами // Алгебра и анализ. — 1993. — Т. 5, № 2. — С. 74—90.
- [2] Бунина Е. И. Автоморфизмы присоединённых групп Шевалле типов A_l , D_l , E_l над локальными кольцами // Успехи мат. наук. — 2007. — Т. 62, № 5. — С. 143—144.
- [3] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса, группы, порождённые отражениями, системы корней. — М.: Мир, 1972.
- [4] Голубков А. Ю. Первичный радикал классических групп над ассоциативными кольцами: Дис... канд. физ.-мат. наук. — М., 2001.
- [5] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Изоморфизмы общей линейной группы над ассоциативным кольцом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1983. — № 3. — С. 61—72.
- [6] Петечук В. М. Автоморфизмы групп SL_n , GL_n над некоторыми локальными кольцами // Мат. заметки. — 1980. — Т. 28, № 2. — С. 187—206.
- [7] Петечук В. М. Автоморфизмы групп $\mathrm{SL}_3(K)$, $\mathrm{GL}_3(K)$ // Мат. заметки. — 1982. — Т. 31, № 5. — С. 657—668.
- [8] Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. — М.: Мир, 1975.
- [9] Суслин А. А. Одна теорема Кона // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1976. — Т. 64. — С. 127—130.
- [10] Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. — М.: МЦНМО, 2003.
- [11] Abe E. Chevalley groups over local rings // Tôhoku Math. J. — 1969. — Vol. 21, no. 3. — P. 474—494.
- [12] Abe E., Suzuki K. On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // Tôhoku Math. J. — 1976. — Vol. 28, no. 1. — P. 185—198.

- [13] Chevalley C. Certains schémas de groupes semi-simples // Sem. Bourbaki. — 1960—1961. — Vol. 219. — P. 1—16.
- [14] Cohn P. On the structure of the GL_2 of a ring // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. — 1966. — No. 30. — P. 365—413.
- [15] Dieudonné J. On the Automorphisms of Classical Groups. — Amer. Math. Soc., 1951. — (Mem. Amer. Math. Soc. 2; Vol. 8).
- [16] Hua L. K., Reiner I. Automorphisms of unimodular groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1951. — Vol. 71. — P. 331—348.
- [17] Humphreys J. F. On the automorphisms of infinite Chevalley groups // Can. J. Math. — 1969. — Vol. 21. — P. 908—911.
- [18] Matsumoto H. Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés // Ann. Sci. École Norm. Sup. — 1969. — Vol. 2. — P. 1—62.
- [19] McDonald B. R. Automorphisms of $GL_n(R)$ // Trans. Amer. Math. Soc. — 1976. — Vol. 215. — P. 145—159; 1978. — Vol. 246. — P. 155—171.
- [20] O'Meara O. T. The automorphisms of linear groups over any integral domain // J. Reine Angew. Math. — 1966. — Vol. 223. — P. 56—100.
- [21] Stein M. R. Surjective stability in dimension 0 for K_2 and related functors // Trans. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 178, no. 1. — P. 165—191.
- [22] Steinberg R. Automorphisms of finite linear groups // Can. J. Math. — 1960. — Vol. 121. — P. 606—615.
- [23] Suzuki K. On the automorphisms of Chevalley groups over p -adic integer rings // Kumamoto J. Sci. (Math.). — 1984. — Vol. 16, no. 1. — P. 39—47.
- [24] Swan R. Generators and relations for certain special linear groups // Adv. Math. — 1971. — Vol. 6. — P. 1—77.
- [25] Vavilov N. A., Plotkin E. B. Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations // Acta Appl. Math. — 1996. — Vol. 45. — P. 73—113.

