Циклические проекторы и теоремы отделимости в идемпотентных полумодулях*

С. ГОБЕР
Национальный исследовательский институт информатики и автоматики (INRIA), Франция
e-mail: Stephane.Gaubert@inria.fr

С. Н. СЕРГЕЕВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: sergiej@gmail.com

УДК 512.643+512.558

Ключевые слова: идемпотентный анализ, тропическое полукольцо, полумодуль, выпуклая геометрия, отделимость, циклические проекции, проективная метрика.

Аннотация

Известно, что полумодули над идемпотентными полукольцами, такими как полукольцо макс-плюс или тропическое, имеют много общего с выпуклыми конусами. Это сходство особенно очевидно в случае подполумодулей декартова произведения n экземпляров полукольца макс-плюс. В частности, в этом случае справедлива теорема об отделимости точки от замкнутого подполумодуля, не содержащего эту точку, с помощью идемпотентного аналога замкнутого полупространства. В данной статье получена более сильная теорема отделимости, которая применима к любому конечному семейству полумодулей, имеющих нулевое пересечение. В доказательстве этой теоремы используются некоторые нелинейные операторы, называемые здесь циклическими проекторами на идемпотентные полумодули. Это аналоги циклических проекций на выпуклые множества. В статье получена теорема, которая описывает спектр циклических проекторов на идемпотентные полумодули в терминах некоторого обобщения проективной метрики Гильберта. Мы также выводим из основных результатов статьи идемпотентный аналог теоремы Хелли.

Abstract

S. Gaubert, S. N. Sergeev, Cyclic projectors and separation theorems in idempotent convex geometry, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 4, pp. 31—52.

Semimodules over idempotent semirings like the max-plus or tropical semiring have much in common with convex cones. This analogy is particularly apparent in the case of subsemimodules of the n-fold Cartesian product of the max-plus semiring: It is known that one can separate a vector from a closed subsemimodule that does not contain it. Here we establish a more general separation theorem, which applies to any finite collection of closed subsemimodules with a trivial intersection. The proof of this theorem involves specific nonlinear operators, called here cyclic projectors on idempotent semimodules.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 05-01-00824 и 05-01-02807-НЦНИЛ_а.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 4, с. 31—52.

These are analogues of the cyclic nearest-point projections known in convex analysis. We obtain a theorem that characterizes the spectrum of cyclic projectors on idempotent semimodules in terms of a suitable extension of Hilbert's projective metric. We also deduce as a corollary of our main results the idempotent analogue of Helly's theorem.

1. Введение

Некоторые нелинейные задачи теории оптимизации и математической физики оказываются линейными над полукольцами с идемпотентной операцией сложения $\oplus$ [3,5,12]. Напомним, что идемпотентность $\oplus$ означает, что $a \oplus a = a$ для всех a. Роль этой операции сложения часто играет операция взятия максимума или минимума. Поиск идемпотентных аналогов классических конструкций и результатов стимулирует развитие идемпотентной математики, современное состояние которой представлено в сборнике статей [19] (см. также [20]).

Одним из наиболее хорошо изученных идемпотентных полуколец является полукольцо макс-плюс, также называемое алгеброй макс-плюс [2] и обозначаемое $\mathbf{R}_{\max}$. Это множество $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, снабжённое операциями сложения $a \oplus b := \max(a, b)$ и умножения $a \odot b := a + b$. Нуль $\mathbf{0}$ этого полукольца — это элемент $-\infty$, а единица полукольца $\mathbf{1}$ равна 0. Есть также полукольца, изоморфные полукольцу макс-плюс и известные под другими именами. В частности, полукольцо мин-плюс, оно же тропическое, можно получить из полукольца макс-плюс, заменив в данном выше определении $-\infty$ на ∞ и $\max(a, b)$ на $\min(a, b)$. Применяя к полукольцу макс-плюс отображение $x \mapsto \exp(x)$ (и полагая $\exp(-\infty) = 0$), мы получаем полукольцо «макс-умножить», обозначаемое далее $\mathbf{R}_{\max,\times}$. Это множество неотрицательных чисел ($\mathbf{R}_+$), снабжённое операциями $a \oplus b := \max(a, b)$ и $a \odot b := a \times b$. Нуль и единица полукольца $\mathbf{R}_{\max,\times}$ совпадают с обычными 0 и 1. Главные результаты данной статьи (см. раздел 4) будут сформулированы именно над этим полукольцом.

Простейший пример полумодуля над полукольцом $\mathcal{K}$ — это $\mathcal{K}^n$, т. е. декартово произведение n экземпляров полукольца $\mathcal{K}$ с покоординатными операциями идемпотентного сложения $\oplus$ и умножения $\odot$ на элемент $\mathcal{K}$. Полумодуль $\mathcal{K}$-значных функций на множестве I, обозначаемый далее $\mathcal{K}^I$, является обобщением $\mathcal{K}^n$. Другие примеры идемпотентных полумодулей можно найти, например, в [2, 3, 5].

В идемпотентных полукольцах есть каноническое отношение порядка, по отношению к которому любой элемент полукольца «неотрицателен». По этой причине идемпотентные полумодули имеют много общего с полумодулями над полукольцом неотрицательных чисел, т. е. с *выпуклыми конусами* [4]. Одним из первых результатов, основанных на этой идее, является теорема отделимости для выпуклых множеств над «экстремальными алгебрами», полученная в [24]. Из этой теоремы вытекает, что точка в $\mathbf{R}^n_{\max,\times}$, не принадлежащая замкнутому полумодулю (в евклидовой топологии), может быть отделена от него с помощью идемпотентного аналога замкнутого полупространства. Обобщения этого результата были получены в [9, 10, 23]. В частном случае конечно порождённых полумодулей похожая теорема отделимости была получена в [14], причём большое внимание было уделено комбинаторной стороне этого результата.

Основной результат настоящей статьи (теорема 20) заключается в том, что *несколько* замкнутых полумодулей, у которых нет общих ненулевых точек, могут быть отделены друг от друга. Это значит, что для каждого из этих полумодулей можно найти некоторое идемпотентное полупространство таким образом, чтобы эти полупространства также не имели общих ненулевых точек.

Даже для случая двух полумодулей это утверждение в известной нам литературе по идемпотентной математике не рассматривалось. В работах, упомянутых выше, речь шла об отделимости точки от замкнутого полумодуля, а не об отделимости двух или большего числа полумодулей. Заметим, что, в отличие от обычного выпуклого анализа, в идемпотентном случае отделимость двух выпуклых множеств не удаётся свести к отделимости точки от выпуклого множества. Точнее, в обычном выпуклом анализе можно легко показать, что два выпуклых множества A и B отделяются друг от друга тогда и только тогда, когда точка 0 отделяется от их разности Минковского $A - B$. В идемпотентном случае аналог разности Минковского можно определить, например, как $A \ominus B = \{x \mid \exists\, b \in B \colon x \oplus b \in A\}$. Однако полупространство, отделяющее 0 от $A \ominus B$, в общем случае не даёт никакой информации о полупространствах, отделяющих A от B.

Для того чтобы доказать главное утверждение (теорема 20), мы изучаем свойства собственных значений идемпотентных циклических проекторов. Идемпотентными циклическими проекторами мы называем композиции некоторых нелинейных проекторов на идемпотентные полумодули. Однородность и непрерывность этих нелинейных проекторов позволяет применить к их композициям, т. е. к циклическим проекторам, некоторые результаты теории Перрона—Фробениуса. Основная идея заключается в том, чтобы доказать эквивалентность следующих трёх утверждений:

1) полумодули имеют нулевое пересечение,
2) существуют отделяющие полупространства,
3) спектральный радиус соответствующего циклического проектора строго меньше 1.

Эта эквивалентность доказывается в теоремах 11 и 18, в которых рассматриваются архимедовы полумодули, т. е. полумодули, содержащие хотя бы один положительный вектор. Отметим, что в доказательстве используется нелинейное обобщение теоремы Коллатца—Виландта, полученное в [22]. Основной результат (теорема 20) вытекает из того, что для любого семейства полумодулей с нулевым пересечением найдётся такое семейство *архимедовых* полумодулей с нулевым пересечением, что каждый полумодуль из первого семейства содержится в некотором архимедовом полумодуле из второго.

Мы показываем также (теоремы 14 и 16), что орбита собственного вектора циклического проектора максимизирует некоторую функцию от элементов полумодулей. Мы называем этот максимум гильбертовым значением полумодулей и характеризуем собственные значения циклических проекторов в терминах этих гильбертовых значений (теорема 25).

Проекторы на идемпотентные полумодули (композицией которых являются циклические проекторы) были введены и изучались в [11], а также в [12, глава 8], где они были названы AA^*-произведениями. Геометрические свойства проекторов были использованы в [9,10] для получения идемпотентных аналогов теорем отделимости. В [2] с помощью проекторов на идемпотентные полумодули были получены идемпотентные аналоги ряда теорем линейного функционального анализа, в том числе теоремы Хана—Банаха.

Рассматриваемые в данной статье циклические проекторы были введены для случая двух полумодулей в работе [13], где с их помощью был построен эффективный (псевдополиномиальный) алгоритм нахождения произвольной точки, лежащей в пересечении двух конечно порождённых подполумодулей $\mathbf{R}^n_{\max,\times}$. Отметим, что аналогичную роль в выпуклом анализе и теории оптимизации играют циклические проекции на выпуклые множества [6].

Мы также показываем, что из теорем 18 и 20 можно вывести идемпотентный аналог теоремы Хелли. Эта идемпотентная теорема Хелли была также получена другим способом в [18].

Главные результаты данной статьи получены для подполумодулей $\mathbf{R}^n_{\max,\times}$. Некоторые результаты статьи справедливы в более общем случае, который описан в разделе 2. Однако в такой общности вопрос об отделимости нескольких полумодулей остаётся открытым.

Результаты этой статьи изложены в следующем порядке. В разделе 2 описаны основные условия, которым удовлетворяют полумодули в этой статье. Кроме того, здесь даны основные понятия и факты, которые будут использоваться дальше. В разделе 3 излагаются результаты, полученные в наиболее общем случае, по отношению к условиям раздела 2. Основные результаты для случая $\mathbf{R}^n_{\max,\times}$ получены в разделе 4. Эти результаты включают в себя отделимость нескольких полумодулей и описание спектра циклических проекторов. Раздел 5 содержит две иллюстрации к теоремам отделимости, полученным в разделах 3 и 4.

2. Проекторы и отделимость: предварительные результаты

В начале этого раздела мы напомним некоторые факты, касающиеся роли частичного порядка в идемпотентных алгебраических структурах (см. также [2, 5, 12]).

Идемпотентная операция сложения $\oplus$ задаёт порядок $\leqslant_\oplus$ в полукольце $\mathcal{K}$ по правилу

$$\lambda \oplus \mu = \mu \iff \lambda \leqslant_\oplus \mu$$

для $\lambda, \mu \in \mathcal{K}$. Идемпотентная сумма $\lambda \oplus \mu$ совпадает с точной верхней гранью $\sup(\lambda, \mu)$, взятой по отношению $\leqslant_{\oplus}$. Идемпотентная сумма элементов произвольного множества определяется как точная верхняя грань этого множества, если эта точная верхняя грань существует. Отношение порядка $\leqslant_{\oplus,\mathcal{V}}$ с аналогичными свойствами определяется и в полумодуле. Отношения $\leqslant_{\oplus}$ и $\leqslant_{\oplus,\mathcal{V}}$ согласованы между собой: из отношения $\lambda \leqslant_{\oplus} \mu$ между $\lambda, \mu \in \mathcal{K}$ следует, что $\lambda x \leqslant_{\oplus,\mathcal{V}} \mu x$ для любого $x \in \mathcal{V}$ (здесь и далее мы, как правило, опускаем обозначение $\odot$). Отметим, что в важном для нас частном случае $\mathcal{V} = \mathcal{K}^n$, где $\mathcal{K} = \mathbf{R}_{\max}$ или $\mathcal{K} = \mathbf{R}_{\max,\times}$, порядок $\leqslant_{\oplus}$ совпадает с обычным порядком на $\mathbf{R}$, а порядок $\leqslant_{\oplus,\mathcal{V}}$ — с частичным порядком в $\mathbf{R}^n$. По этой причине, в частности, мы далее всюду пишем $\leqslant$ вместо $\leqslant_{\oplus}$ и $\leqslant_{\oplus,\mathcal{V}}$.

Полукольцо или полумодуль называются *b-полными* (терминология [2]), если они замкнуты относительно взятия сумм (т. е. точных верхних граней) любых подмножеств, ограниченных сверху, и если умножение дистрибутивно относительно любых таких сумм. Если можно брать точные верхние грани $\oplus$ ограниченных сверху множеств, то можно брать и точные нижние грани $\wedge$ множеств, ограниченных снизу. Следовательно, в b-полном полукольце или полумодуле можно брать точные нижние грани любых подмножеств, так как все подмножества ограничены снизу нулём $\mathbf{0}$.

Если множество $\mathcal{K}\backslash\{\mathbf{0}\}$ в b-полном полукольце является группой относительно умножения, то по теореме Ивасавы [1] умножение коммутативно. Идемпотентное полукольцо $\mathcal{K}$, в котором множество $\mathcal{K}\setminus\{\mathbf{0}\}$ является абелевой группой относительно умножения, называется *идемпотентным полуполем* [2].

Далее мы будем считать, что полукольцо $\mathcal{K}$ и полумодуль $\mathcal{V}$ над $\mathcal{K}$ удовлетворяют следующим условиям:

(A0) полукольцо $\mathcal{K}$ является b-полным идемпотентным полуполем, а полумодуль $\mathcal{V}$ является b-полным полумодулем над $\mathcal{K}$;

(A1) для любых элементов x и $y \neq \mathbf{0}$ из $\mathcal{V}$ множество $\{\lambda \in \mathcal{K} \mid \lambda y \leqslant x\}$ ограничено сверху.

Из предположений (A0), (A1) вытекает, что операция

$$x/y = \max\{\lambda \in \mathcal{K} \mid \lambda y \leqslant x\} \tag{1}$$

определена для всех x и всех $y \neq \mathbf{0}$ из $\mathcal{V}$. Такие операции изучаются в теории резидуаций (см., например, [5, 7, 16]). Ещё одним эквивалентным определением операции $/$ является следующее:

$$\lambda y \leqslant x \iff \lambda \leqslant x/y. \tag{2}$$

В том случае, когда $\mathcal{V} = \mathcal{K}^I$, мы имеем

$$x/y = \bigwedge_{i\colon y_i \neq \mathbf{0}} x_i (y_i)^{-1}, \tag{3}$$

где $^{-1}$ обозначает взятие обратного элемента по отношению к операции умножения.

Операция / обладает следующими свойствами (см. [5, 7, 16]):

$$\Big(\bigwedge_\alpha x_\alpha\Big)\Big/y = \bigwedge_\alpha (x_\alpha/y), \quad \Big(x\Big/\bigoplus_\alpha y_\alpha\Big) = \bigwedge_\alpha (x/y_\alpha), \tag{4}$$

$$(\lambda x)/y = \lambda(x/y) \text{ для любого } \lambda, \quad y/(\lambda x) = \lambda^{-1}(y/x) \text{ для любого } \lambda \neq \mathbf{0}. \tag{5}$$

Нам также будет нужно следующее утверждение.

Лемма 1. *Если* (A0), (A1) *выполнены, то* $x/x = \mathbf{1}$ *для всех ненулевых* $x \in \mathcal{V}$. *Если* $\lambda x = x$ *для ненулевого* $x \in \mathcal{V}$, *то* $\lambda = \mathbf{1}$.

Доказательство. Из $x \leqslant x$ следует, что $x/x \geqslant \mathbf{1}$ (см. (1)). С другой стороны, $(x/x)x \leqslant x$. Умножая это неравенство с обеих сторон на x/x, мы получаем, что $(x/x)^2x \leqslant (x/x)x \leqslant x$, откуда $(x/x)^2 \leqslant x/x$ и $x/x \leqslant \mathbf{1}$. Таким образом, $x/x = \mathbf{1}$. Если $\lambda x = x$ для некоторого $x \neq \mathbf{0}$, то $\lambda(x/x) = (\lambda x)/x = x/x$ и поэтому $\lambda = \mathbf{1}$. □

Определение 2. Назовём подполумодуль V полумодуля $\mathcal{V}$ *b-(под)полумодулем*, если V замкнут относительно взятия сумм любых своих подмножеств, ограниченных сверху в $\mathcal{V}$.

Пусть V — это b-подполумодуль полумодуля $\mathcal{V}$. Рассмотрим оператор P_V, определённый по формуле

$$P_V(x) = \max\{u \in V \mid u \leqslant x\} \tag{6}$$

для любого элемента $x \in \mathcal{V}$. Мы пишем $\max$, подчёркивая, что точная верхняя грань множества в фигурных скобках принадлежит этому множеству. Оператор P_V является *проектором* на подполумодуль V, так как $P_V(x) \in V$ для любого $x \in \mathcal{V}$ и $P_V(v) = v$ для любого $v \in V$. В принципе, оператор P_V можно определить для произвольных подмножеств полумодуля $\mathcal{V}$, если написать $\sup$ вместо $\max$ в формуле (6). Однако тогда P_V может не быть проектором на V.

Определение 3. Подполумодуль V полумодуля $\mathcal{V}$ назовём *элементарным*, если $V = \{\lambda y \mid \lambda \in \mathcal{K}\}$ для некоторого $y \in \mathcal{V}$. Проектор на такой полумодуль также назовём *элементарным*.

Из (A0), (A1) вытекает, что элементарный полумодуль является b-полумодулем. Проектор на элементарный полумодуль $V = \{\lambda y \mid \lambda \in \mathcal{K}\}$ равен $P_V(x) = (x/y)y$, и это наблюдение можно обобщить.

Предложение 4. *Если* V — *это b-подполумодуль* $\mathcal{V}$ *и* $P_V(x) = \lambda y$ *для некоторых* $\lambda \in \mathcal{K}$ *и* $x, y \in \mathcal{V}$, *то* $P_V(x) = (x/y)y$.

Доказательство. Если V — это b-полумодуль, то $y \in V$, и из $(x/y)y \leqslant x$ вытекает, что $(x/y)y \leqslant P_V(x) = \lambda y$. С другой стороны, из $\lambda y \leqslant x$ следует, что $\lambda \leqslant x/y$ и, далее, $\lambda y \leqslant (x/y)y$. □

Оператор P_V является изотонным относительно включения

$$U \subset V \implies P_U(x) \leqslant P_V(x) \text{ для всех } x. \tag{7}$$

Этот оператор является также однородным и изотонным:

$$P_V(\lambda x) = \lambda P_V(x), \quad x \leqslant y \implies P_V(x) \leqslant P_V(y). \tag{8}$$

Отметим, что даже в случае $\mathcal{V} = \mathbf{R}^n_{\max,\times}$ оператор P_V, как правило, не является линейным по отношению к операциям $\oplus$ и $\wedge$.

В идемпотентной геометрии роль полупространства играет следующий объект.

Определение 5. Множество H, определённое как

$$H = \{x \mid u/x \geqslant v/x\} \cup \{\mathbf{0}\}, \tag{9}$$

где $u, v \in \mathbf{R}^n_{\max,\times}$, $u \leqslant v$, называется (*идемпотентным*) *полупространством*.

Требование $u \leqslant v$ накладывается в связи с тем, что лишь полупространства такого вида действительно важны для теорем отделимости (см. теорема 6).

Из свойств (4) и (5) операции / вытекает, что полупространство является полумодулем. Если $\mathcal{V} = \mathcal{K}^I$, то мы находим с использованием (3), что

$$H = \left\{ x \;\Big|\; \bigwedge_{i:\, x_i \neq \mathbf{0}} u_i x_i^{-1} \geqslant \bigwedge_{i:\, x_i \neq \mathbf{0}} v_i x_i^{-1} \right\} \cup \{\mathbf{0}\}. \tag{10}$$

Если $\mathcal{V} = \mathcal{K}^n$ и все координаты u и v ненулевые, то

$$H = \left\{ x \;\Big|\; \bigoplus_{1,\ldots,n} x_i u_i^{-1} \leqslant \bigoplus_{1,\ldots,n} x_i v_i^{-1} \right\}. \tag{11}$$

Такие идемпотентные полупространства особенно похожи на замкнутые однородные полупространства конечномерной выпуклой геометрии [4].

Так как операция / изотонна по отношению к своему первому аргументу, то мы можем заменить неравенства в (9), (10) и (11) на равенства. В частности, полупространство (9) можно определить так:

$$H = \{x \mid u/x = v/x\} \cup \{\mathbf{0}\}, \tag{12}$$

где $u \leqslant v$. Полумодуль, заданный с помощью (12), где u и v — это произвольные векторы $\mathcal{V}$, также называется идемпотентной гиперплоскостью [9]. Структура идемпотентных гиперплоскостей в случае $\mathbf{R}^n_{\max}$ подробно изучена в [21].

Далее мы сформулируем и докажем теорему, которая близка к теоремам отделимости, полученным в [9, 10]. Отличие этой теоремы от теорем, полученных в [9, 10], заключается в том, что здесь рассматриваются b-полные полумодули. Все эти результаты тесно связаны с идемпотентным аналогом теоремы Хана—Банаха [2].

Теорема 6 (ср. [9, теорема 8]). *Пусть V — это b-полумодуль, и пусть $u \notin V$. Тогда множество*

$$H = \{x \mid P_V(u)/x \geqslant u/x\} \cup \{\mathbf{0}\} \tag{13}$$

содержит V и не содержит u.

Доказательство. Возьмём ненулевой вектор $x \in V$ (случай $x = \mathbf{0}$ тривиален). Так как $(u/x)x \leqslant u$, то $(u/x)x \leqslant P_V(u)$, что по (2) равносильно $u/x \leqslant P_V(u)/x$. Отсюда $V \subseteq H$.

Возьмём $x = u$ и предположим, что $P_V(u)/u = u/u$. Это равносильно тому, что $u \leqslant P_V(u)$, следовательно, $u = P_V(u)$. Так как V — это b-полумодуль, то $u \in V$, что противоречит условию теоремы. Отсюда $u \notin H$. $\square$

Определение 7. Рассмотрим отношение предпорядка

$$x \preceq y \iff y/x > \mathbf{0}. \tag{14}$$

Назовём x и y *сравнимыми* и напишем $x \sim y$, если $x \preceq y$ и $y \preceq x$. Это отношение можно определить и так:

$$x \sim y \iff (x/y)(y/x) > \mathbf{0}. \tag{15}$$

Заметим, что если $y = \lambda x$ и $\lambda \neq \mathbf{0}$, то $y \sim x$, и что неравенство $x \leqslant y$, если $x \neq \mathbf{0}$, влечёт $x \preceq y$. В частности, $P_V(x) \preceq x$ для любого ненулевого $x \in \mathcal{V}$ и для любого полумодуля V, если $P_V(x)$ не равен $\mathbf{0}$.

В случае $\mathcal{V} = \mathcal{K}^n$ отношение сравнимости можно определить, используя носители векторов. Напомним, что *носителем* вектора $x \in \mathcal{K}^n$ называется множество $\mathrm{supp}(x) = \{i \mid x_i \neq 0\}$. Можно проверить, что для $x, y \in \mathcal{K}^n$ отношение $x \preceq y$ эквивалентно $\mathrm{supp}(x) \subset \mathrm{supp}(y)$, следовательно, $x \sim y$ эквивалентно $\mathrm{supp}(x) = \mathrm{supp}(y)$.

Предложение 8. *Пусть $x \in \mathcal{V}$ — ненулевой вектор, и пусть $V \subseteq \mathcal{V}$ — b-полумодуль, содержащий ненулевой вектор y. Если $y \preceq x$, то вектор $P_V(x)$ ненулевой и $y \preceq P_V(x) \preceq x$. Если $y \sim x$, то $P_V(x) \sim x$.*

Доказательство. По определению / и согласно (14) существует такое α, что $\alpha y \leqslant x$. Тогда $\alpha y \leqslant P_V(x)$, поэтому вектор $P_V(x)$ ненулевой и $y \preceq P_V(x)$. $\square$

Предложение 9. *Пусть F — изотонный и однородный оператор, пусть λ, μ — произвольные элементы $\mathcal{K}$, и пусть v и u — ненулевые векторы, такие что $v \preceq u$. Далее, пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

1) $Fv \geqslant \mu v$ *и* $Fu = \lambda u$;
2) $Fv = \mu v$ *и* $Fu \leqslant \lambda u$.

Тогда $\mu \leqslant \lambda$.

Доказательство. Действуя оператором F на неравенство $(u/v)v \leqslant u$ и используя любое из данных условий, мы получаем, что $(u/v)\mu v \leqslant \lambda u$. Если $\lambda = \mathbf{0}$, то $\mu = \mathbf{0}$. Если коэффициент λ обратим, то, используя (2), мы получаем $(u/v)\mu\lambda^{-1} \leqslant u/v$. Сокращая на u/v, мы получаем неравенство $\mu \leqslant \lambda$. $\square$

Из свойств (4) и (5) вытекает, что множества $\{x \mid x \preceq y\}$, $\{x \mid x \succeq y\}$ и, следовательно, $\{x \mid x \sim y\}$ являются подполумодулями $\mathcal{V}$. Для любого полумодуля $V \subset \mathcal{V}$ и любого вектора $y \in \mathcal{V}$ мы можем определить множество

$$V^y = \{x \in V \mid x \preceq y\}, \tag{16}$$

которое является подполумодулем V. Когда $\mathcal{V} = \mathcal{K}^n$, подполумодуль V^y однозначно определяется носителем M вектора y. По этой причине мы введём обозначение

$$V^M = \{x \in V \mid \mathrm{supp}(x) \subset M\}, \tag{17}$$

где M — произвольное подмножество $\{1, \dots, n\}$.

Определение 10. Вектор $x \in \mathcal{V}$ назовём *архимедовым*, если $y \preceq x$ для всех $y \in \mathcal{V}$. Подполумодуль $V \subseteq \mathcal{V}$ назовём *архимедовым*, если он содержит хотя бы один архимедов вектор. Полупространство будет называться *архимедовым*, если оба определяющих вектора (например, u и v в (9)) архимедовы.

Таким образом, полумодуль называется архимедовым, если он содержит хотя бы один архимедов вектор y, т. е. вектор, обладающий тем свойством, что для любого другого вектора $x \in \mathcal{V}$ существует такой элемент полуполя $\lambda > \mathbf{0}$, что $\lambda x \leqslant y$.

Разумеется, определение 10 имеет смысл лишь в том случае, когда $\mathcal{V}$ удовлетворяет следующему предположению:
(A2) полумодуль $\mathcal{V}$ содержит архимедов вектор.

Это предположение справедливо для полумодулей типа $\mathcal{K}^n$ (мы предполагаем, что выполнены (A0), (A1)). Архимедово полупространство в случае $\mathcal{V} = \mathcal{K}^n$ было описано выше в (11).

3. Циклические проекторы и теоремы отделимости: общий случай

В этом разделе мы будем рассматривать *циклические проекторы*, т. е. композиции проекторов вида

$$P_{V_k} \dots P_{V_1}, \tag{18}$$

где $V_1, \dots, V_k$ — b-подполумодули $\mathcal{V}$. Мы предполагаем, что условия (A0), (A1) выполнены, что означает, в частности, что $\mathcal{K}$ является идемпотентным полуполем, и формулируем общие результаты, касающиеся циклических проекторов и отделимости нескольких полумодулей. Для удобства обозначений мы будем писать P_t вместо P_{V_t}. Кроме того, мы будем свободно увеличивать номера проекторов и полумодулей, полагая $P_{l+k} = P_l$ и $V_{l+k} = V_k$ для всех l.

Вначале мы докажем теорему отделимости, в которой основную роль играют циклические проекторы. В этой теореме предполагается, что архимедовы векторы существуют (выполнено (A2)). Иллюстрация к этой теореме содержится в разделе 5.

Теорема 11. *Пусть у оператора $P_k \dots P_1$ есть архимедов собственный вектор y с ненулевым собственным значением λ. Следующие условия эквивалентны:*
1) *существует такой архимедов вектор x, что*

$$P_k \dots P_1 x \leqslant \mu x \tag{19}$$

для некоторого $\mu < \mathbf{1}$;

2) *для любого* $i = 1, \ldots, k$ *существуют такие архимедовы полупространства* H_i, *что* $V_i \subseteq H_i$ *и* $\bigcap\limits_i H_i = \{\mathbf{0}\}$;
3) $\bigcap\limits_i V_i = \{\mathbf{0}\}$;
4) $\lambda < \mathbf{1}$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Обозначим $x^0 = x$ и $x^i = P_i \ldots P_1 x^0$. Заметим, что все векторы x^i, согласно предложению 8, являются архимедовыми. Для любого $i = 1, \ldots, k$ получаем, что

$$V_i \subseteq \{u\colon x^{i-1}/u = x^i/u\} \cup \{\mathbf{0}\} = H_i. \tag{20}$$

Если $x^{i-1} = x^i$, то H_i просто совпадает со всем пространством, а если $x^{i-1} \neq x^i$, что означает $x^i \notin V_{i-1}$, то включение (20) следует из теоремы 6. Допустим, что существует ненулевой вектор u, принадлежащий всем H_i. Тогда $x^k/u = x/u$. Но $x^k/u \leqslant (\mu x)/u \leqslant x/u$, откуда $\mu(x/u) = x/u$. Сокращая на x/u, получаем $\mu = \mathbf{1}$, что противоречит условию 1).

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидна.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 4). По условию у $P_k \ldots P_1$ есть ненулевой собственный вектор y с собственным значением λ. Поскольку любой вектор под действием проектора P_i или уменьшается, или остаётся на месте, имеем $\lambda \leqslant \mathbf{1}$. Предположим, что $\lambda = \mathbf{1}$. Тогда неравенства

$$P_k \ldots P_1 y \leqslant P_{k-1} \ldots P_1 y \leqslant \ldots \leqslant y$$

обращаются в равенства, откуда следует что y является общим вектором $V_1, \ldots, V_k$, что противоречит 3).

Для доказательства импликации 4) $\Longrightarrow$ 1) возьмём $x = y$. $\square$

По условию теоремы 11 у оператора $P_k \ldots P_1$ есть архимедов собственный вектор с ненулевым собственным значением. Из этого условия следует, что полумодули $V_1, \ldots, V_k$ архимедовы, однако обратное, вообще говоря, неверно. Чтобы это показать, рассмотрим два подполумодуля $\mathbf{R}^4_{\max,\times}$: полумодуль V_1 с образующими $a^1 = (1,1,0,0)$ и $a^2 = (0,0,1,1)$ и полумодуль V_2 с образующими $b^1 = (1,2,0,0)$ и $b^2 = (0,0,1,3)$. Любой собственный вектор P_1P_2 принадлежит V_1, т. е. имеет вид $(\lambda,\lambda,\mu,\mu)$. Под действием P_1P_2 такой вектор переходит в $\left(\frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{3}\mu, \frac{1}{3}\mu\right)$, следовательно, у оператора P_1P_2 не может быть архимедовых собственных векторов. Как мы покажем в разделе 4, условие теоремы 11 в случае $\mathcal{V} = \mathbf{R}^n_{\max,\times}$ может быть значительно ослаблено (см. теоремы 18 и 20).

Теорема 11 показывает, что отделимость полумодулей тесно связана со свойствами собственных значений циклических проекторов. Изучению этих свойств посвящена оставшаяся часть этого раздела.

Определение 12. Пусть $x^1, \ldots, x^k$ — ненулевые векторы $\mathcal{V}$. Величину

$$d_{\mathrm{H}}(x^1, \ldots, x^k) = (x^1/x^2)(x^2/x^3) \ldots (x^k/x^1) \tag{21}$$

назовём *гильбертовым значением* $x^1, \ldots, x^k$.

Из определения 7 предпорядка $\preceq$ вытекает, что $d_{\mathrm{H}}(x^1, \ldots, x^k) \neq \mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда все $x^1, \ldots, x^k$ сравнимы. Можно показать, что $d_{\mathrm{H}}(x^1, \ldots, x^k) \leqslant \mathbf{1}$. Это неравенство становится равенством тогда и только тогда, когда все $x^1, \ldots, x^k$ отличаются друг от друга лишь на скалярный множитель. Кроме того, гильбертово значение остаётся неизменным при умножении аргументов на скаляр и их циклической перестановке.

Гильбертово значение двух векторов x^1, x^2 изучалось в [9]. Для сравнимых, т. е. имеющих одинаковый носитель M, векторов в $\mathbf{R}^n_{\max,\times}$ оно равно

$$d_{\mathrm{H}}(x^1, x^2) = \min_{i,j \in M} (x^1_i (x^2_i)^{-1} x^2_j (x^1_j)^{-1}), \tag{22}$$

таким образом, величина $-\log\bigl(d_{\mathrm{H}}(x^1, x^2)\bigr)$ совпадает с проективным расстоянием Гильберта

$$\delta_{\mathrm{H}}(x^1, x^2) = \log\bigl(\max_{i,j \in M} x^1_i (x^2_i)^{-1} x^2_j (x^1_j)^{-1}\bigr) = -\log\bigl(d_{\mathrm{H}}(x^1, x^2)\bigr). \tag{23}$$

Определение 13. Пусть $V_1, \ldots, V_k$ — b-подполумодули $\mathcal{V}$. Величину

$$d_{\mathrm{H}}(V_1, \ldots, V_k) = \sup_{x^1 \in V_1, \ldots, x^k \in V_k} d_{\mathrm{H}}(x^1, \ldots, x^k) \tag{24}$$

назовём *гильбертовым значением полумодулей* $V_1, \ldots, V_k$.

Теорема 14. *Пусть у оператора* $P_k \ldots P_1$ *есть собственный вектор* y *с собственным значением* λ. *Тогда*

$$\lambda = \max_{x^1 \in V_1, \ldots, x^k \in V_k} \bigl(d_{\mathrm{H}}(x^1, \ldots, x^k)\bigr) = d_{\mathrm{H}}(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^k), \tag{25}$$

где $\bar{x}^i = P_i \ldots P_1 y$.

Доказательство. Заметим, что для любого i вектор $\bar{x}^i$ является собственным вектором оператора $P_{i+k} \ldots P_{i+1}$ и что все эти векторы сравнимы с y. Далее, пусть $x^1, \ldots, x^k$ — векторы из $V^y_1, \ldots, V^y_k$, и пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — такие коэффициенты, что

$$\begin{aligned} \alpha_1 x^2 &\leqslant P_2 x^1, \\ &\vdots \\ \alpha_{k-1} x^k &\leqslant P_k x^{k-1}, \\ \alpha_k x^1 &\leqslant P_1 x^k. \end{aligned} \tag{26}$$

Возьмём последнее из этих неравенств. Действуя на обе части P_2 и используя первое неравенство, мы получим, что $\alpha_1 \alpha_k x^2 \leqslant P_2 \circ P_1 x^k$. Далее мы действуем на это неравенство оператором P_3 и используем неравенство $\alpha_2 x^3 \leqslant P_3 x^2$. Продолжая по индукции, в конце концов мы получим

$$\alpha_1 \ldots \alpha_k x^k \leqslant P_k \ldots P_1 x^k. \tag{27}$$

Из предложения 9 следует, что $\alpha_1 \ldots \alpha_k \leqslant \lambda$. Мы можем взять $\alpha_i = x^i / x^{i+1}$ при $i = 1, \ldots, k-1$ и $\alpha_k = x^k / x^1$. Отсюда следует, что

$$d_{\mathrm{H}}(V^y_1, \ldots, V^y_k) \leqslant \lambda. \tag{28}$$

Заметим, что это неравенство справедливо, даже если V_i, $i = 1, \ldots, k$, не являются b-полумодулями. Используя предложение 4, мы получаем, что $\lambda y = d_{\mathrm{H}}(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^k)y$. Согласно лемме 1 мы можем сократить на y, и это, в сочетании с тем, что $\bar{x}^i \in V_i^y$ для всех i, даст нужное равенство. □

Оператор $P_k \ldots P_1$ имеет собственный вектор с ненулевым собственным значением, если хотя бы один из полумодулей $V_1, \ldots, V_k$ является элементарным, т. е. линейной оболочкой одного-единственного вектора x^i, и если во всех остальных полумодулях есть векторы, эквивалентные x^i. В этом случае вектор $P_k \ldots P_{i+1} x^i$ является единственным собственным вектором $P_k \ldots P_1$ с ненулевым собственным значением.

Следующая лемма получается с использованием предложения 8.

Лемма 15. *Пусть $x^1 \in V^1$ и $x^i = P_i x^{i-1}$ при $i = 2, \ldots$. Гильбертово значение $d_{\mathrm{H}}(x^1, \ldots, x^k)$ не равно $\mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда $V_2, \ldots, V_k$ имеют векторы, сравнимые с x^1.*

Теорема 16. *Пусть векторы x^i, $i = 1, \ldots$, таковы, что $x^1 \in V_1$ и $x^i = P_i x^{i-1}$ при $i = 2, \ldots$. Тогда $d_{\mathrm{H}}(x^{l+1}, \ldots, x^{l+k})$ не убывает с ростом l и для любого l выполняются неравенства*

$$d_{\mathrm{H}}(x^1, \ldots, x^k) \leqslant d_{\mathrm{H}}(x^{l+1}, \ldots, x^{l+k}) \leqslant \mathbf{1}. \tag{29}$$

Доказательство. Так как V_i — b-полумодули, то $x^i \in V_i$ при $i = 1, \ldots$. Если гильбертово значение равно $\mathbf{0}$ при всех l, то доказывать нечего. Предположим, что существует минимальный номер $l = l_{\min}$, для которого гильбертово значение $d_{\mathrm{H}}(x^l, \ldots, x^{l+k-1})$ является ненулевым. Так как оно ненулевое, то по лемме 15 все векторы $x^l, \ldots, x^{l+k-1}$ сравнимы. Согласно предложению 8 вектор x^{l+k} и все дальнейшие члены последовательности также сравнимы с этими векторами, и поэтому $d_{\mathrm{H}}(x^l, \ldots, x^{l+k-1})$ не равно нулю ни для какого $l \geqslant l_{\min}$. Возьмём теперь любой номер $l \geqslant l_{\min}$ и рассмотрим композицию

$$P_{l+k} P'_{l+k-1} \ldots P'_{l+1}, \tag{30}$$

где P'_i для всех $i = l+1, \ldots, l+k-1$ — это элементарные проекторы на полумодули, порождённые x^i. Композиция (30) имеет собственный вектор x^{l+k}. По теореме 14

$$d_{\mathrm{H}}(x^l, \ldots, x^{l+k-1}) \leqslant \max_{y \in V_l \mid y \preceq x^{l+k}} d_{\mathrm{H}}(x^{l+1}, \ldots, x^{l+k-1}, y) = d_H(x^{l+1}, \ldots, x^{l+k}) \tag{31}$$

для любых $l = 1, \ldots$. □

4. Циклические проекторы и теоремы отделимости в $\mathbf{R}^n_{\max,\times}$

В $\mathbf{R}^n_{\max,\times}$ естественно рассматривать полумодули, замкнутые в евклидовой топологии. Можно показать, что такие полумодули являются b-полумодулями.

Из [10, предложение 3.11] следует, что проектор на замкнутый подполумодуль $\mathbf{R}^n_{\max,\times}$ непрерывен.

Чтобы ослабить условие теоремы 11, касающееся архимедовых векторов, мы используем некоторые результаты спектральной теории операторов. Во-первых, из теоремы Брауэра следует, что любой непрерывный однородный оператор $x \mapsto Fx$, относительно которого множество $\mathbf{R}^n_+$ инвариантно, имеет в нём ненулевой собственный вектор. Это позволяет нам определить спектральный радиус оператора F:

$$\rho(F) = \max\{\lambda \in \mathbf{R}_+ \mid \exists x \in (\mathbf{R}^n_+) \setminus 0,\ Fx = \lambda x\}. \tag{32}$$

Можно получить (например, используя предложение 9), что если $Fx = \lambda x$, $Fy = \mu y$ и векторы x и y сравнимы, то $\lambda = \mu$. Следовательно, количество собственных значений F ограничено числом возможных носителей, т. е. $2^n - 1$. Отсюда следует, в частности, что в формуле (32) действительно достигается максимум. Во-вторых, нам понадобится следующее нелинейное обобщение формулы Коллатца—Виландта для спектрального радиуса неотрицательной матрицы.

Теорема 17 (Р. Д. Нуссбаум, [22, теорема 3.1]). *Пусть $F\colon \mathbf{R}^n_+ \to \mathbf{R}^n_+$ — изотонный, однородный и непрерывный оператор. Тогда*

$$\rho(F) = \inf_{x \in (\mathbf{R}_+ \setminus \{0\})^n} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} [F(x)]_i x_i^{-1}. \tag{33}$$

Проекторы на подполумодули $\mathbf{R}^n_{\max,\times}$ являются изотонными, однородными и непрерывными операторами, то же самое можно сказать про их композиции, т. е. про циклические проекторы. Следовательно, к ним применима теорема 17. Приводимые ниже результаты уточняют теорему отделимости, полученную выше для общего случая (теорема 11).

Теорема 18. *Пусть $V_1, \ldots, V_k$ — замкнутые архимедовы полумодули в $\mathbf{R}^n_{\max,\times}$. Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *существуют положительный вектор x и число $\lambda < 1$, такие что $P_k \ldots P_1 x \leqslant \lambda x$;*
2) *существуют содержащие V_i архимедовы полупространства H_i, такие что $\bigcap\limits_{i=1}^{k} H_i = \{\mathbf{0}\}$;*
3) $\bigcap\limits_{i=1}^{k} V_i = \{\mathbf{0}\}$;
4) $\rho(P_k \ldots P_1) < 1$.

Доказательство. Импликации 1) $\Longrightarrow$ 2), 2) $\Longrightarrow$ 3) и 3) $\Longrightarrow$ 4) доказаны в теореме 11, а 4) $\Longrightarrow$ 1) следует из формулы (33). □

Предложение 19. *Пусть V_i, $i = 1, \ldots, k$, — замкнутые полумодули в $\mathbf{R}^n_{\max,\times}$, имеющие нулевое пересечение. Тогда существуют замкнутые архимедовы полумодули V_i', $i = 1, \ldots, k$, имеющие нулевое пересечение и такие, что каждый V_i' содержит V_i.*

Доказательство. В каждом полумодуле V_i возьмём некоторый вектор y^i, такой что $\|y^i\| = \max_{j=1}^n y^i_j = 1$. Для любого числа $\delta > 0$ определим вектор

$$z^i(\delta) = y^i \oplus \delta \bigoplus_{j \notin \operatorname{supp}(y^i)} e^j \tag{34}$$

и полумодули

$$V_i(\delta) = \{x \mid x = v \oplus \lambda z^i(\delta),\ v \in V_i,\ \lambda \in \mathbf{R}_+\}. \tag{35}$$

Так как все арифметические операции непрерывны, эти полумодули замкнуты (см. также [8, предложение 24]). Покажем, что при некотором δ эти полумодули имеют нулевое пересечение. Если это не так, пусть $u(\delta)$ — вектор из пересечения всех $V_i(\delta)$. Без ограничения общности мы можем предположить, что $\|u(\delta)\| = 1$. Для любого $i = 1, \ldots, k$ и для любого δ можно написать, что

$$u(\delta) = v^i(\delta) \oplus \lambda_i(\delta) y^i \oplus \lambda_i(\delta)\delta \bigoplus_{j \notin \operatorname{supp}(y^i)} e^j, \tag{36}$$

где $v^i(\delta)$ — некоторый вектор из V_i, а $\lambda_i(\delta)$ — некоторый скаляр. Так как $\|u(\delta)\| = 1$ и $\|y^i\| = 1$, то $\lambda(\delta) \leqslant 1$. Поэтому существует последовательность $(\delta_m)_{m \geqslant 1}$, сходящаяся к 0 и такая, что при всех $1 \leqslant i \leqslant k$ последовательности $\lambda_i(\delta_m)$ и $v^i(\delta_m)$ сходятся при $m \to \infty$. Тогда

$$w := \lim_{m\to\infty} u(\delta_m) = \lim_{m\to\infty} v_i(\delta_m) \oplus \lambda_i(\delta_m) y^i$$

для всех i. Так как V_i замкнуты, то w принадлежит всем полумодулям V_i. Вектор w не равен $\mathbf{0}$, поскольку $\|w\| = 1$, и это противоречит условию теоремы. Поэтому существует такое число δ, что $V_1(\delta) \cap \ldots \cap V_k(\delta) = \{0\}$. Полумодули $V_1(\delta), \ldots, V_k(\delta)$ обладают всеми нужными свойствами, поскольку они архимедовы и содержат $V_1, \ldots, V_k$. □

Приводимая ниже теорема отделимости является простым следствием теоремы 18 и предложения 19. Иллюстрация к этой теореме содержится в разделе 5.

Теорема 20 (теорема отделимости). *Если замкнутые полумодули V_i, $i = 1, \ldots, k$, имеют нулевое пересечение, то существуют архимедовы полупространства H_i, $i = 1, \ldots, k$, содержащие соответствующие полумодули V_i и имеющие нулевое пересечение.*

Отсюда вытекает также теорема отделимости двух замкнутых полумодулей.

Теорема 21. *Если U и V — два замкнутых полумодуля, имеющих нулевое пересечение, то существует архимедово полупространство H_U, содержащее U и имеющее нулевое пересечение с V, и существует архимедово полупространство H_V, содержащее V и имеющее нулевое пересечение с U.*

В качестве следствия теоремы 20 мы далее выведем теорему отделимости для выпуклых подмножеств $\mathbf{R}^n_{\max,\times}$. Напомним некоторые определения, относящиеся к идемпотентно выпуклой геометрии (см. также [17]). Подмножество $C \subset \mathbf{R}^n_{\max,\times}$ называется (*идемпотентно*) *выпуклым*, если $\lambda u \oplus \mu v \in C$ для всех таких $u, v \in C$ и $\lambda, \mu \in \mathbf{R}_{\max,\times}$, что $\lambda \oplus \mu = 1$. В дальнейшем такие множества мы будем называть просто выпуклыми, поскольку множества, выпуклые в обычном смысле, здесь не рассматриваются.

Рецессивный конус выпуклого множества C, $\operatorname{rec}(C)$, — это множество векторов u, таких что $v \oplus \lambda u \in C$ для всех $\lambda \in \mathbf{R}_{\max,\times}$, где v — произвольный вектор C. Как показано в [17, предложение 2.6], если множество C замкнуто, то его рецессивный конус не зависит от выбора v. Заметим, что если множество C компактно, то его рецессивный конус является нулевым.

Назовём множество

$$H^{\mathrm{aff}} = \{x \mid u/x \wedge \alpha \geqslant v/x \wedge \gamma\}, \tag{37}$$

где $u, v \in \mathbf{R}^n_{\max,\times}$, $u \leqslant v$, $\alpha, \gamma \in \mathbf{R}_{\max,\times}$ и $\alpha \leqslant \gamma$, (*идемпотентным*) *аффинным полупространством*. Будем называть это полупространство *архимедовым*, если u, v, α и γ положительны.

Пусть множество $C \subset \mathbf{R}^n_{\max,\times}$ выпукло. Обозначим через $V(C) \subset \mathbf{R}^{n+1}_{\max,\times}$ полумодуль векторов вида $(x_1\lambda, \ldots, x_n\lambda, \lambda)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in C$ и $\lambda \in \mathbf{R}_{\max,\times}$.

Теорема 22 (отделимость выпуклых множеств). *Пусть $C_1, \ldots, C_k$ — замкнутые выпуклые подмножества $\mathbf{R}^n_{\max,\times}$, имеющие пустое пересечение, и пусть пересечение рецессивных конусов $C_1, \ldots, C_k$ является нулевым. Тогда существуют аффинные архимедовы полупространства $H_1^{\mathrm{aff}}, \ldots, H_k^{\mathrm{aff}}$, содержащие соответствующие выпуклые множества C_i, $i = 1, \ldots, k$, и также имеющие пустое пересечение.*

Доказательство. Обозначим $V_i = V(C_i)$. Согласно [17, предложение 2.16] замыкание $V(C_i)$, обозначаемое $\overline{V(C_i)}$, равно $V(C_i) \cup (\operatorname{rec}(C_i) \times \{0\})$. Поэтому из условия теоремы следует, что пересечение $\overline{V(C_1)}, \ldots, \overline{V(C_k)}$ является нулевым. Согласно теореме 20 можно найти архимедовы полупространства $H_i \supset \overline{V(C_i)}$, имеющие нулевое пересечение. Каждое такое полупространство H_i — это множество

$$H_i = \{(x_1, \ldots, x_n, \mu) \mid u^i/x \wedge \alpha^i \mu^{-1} \geqslant v^i/x \wedge \gamma^i \mu^{-1}\} \cup \{0\}, \tag{38}$$

где $u^i \leqslant v^i$, $\alpha^i \leqslant \gamma^i$, $x := (x_1, \ldots, x_n)$ и предполагается, что члены с μ^{-1} исчезают, если $\mu = 0$. Отметим, что $(x, 1) \in V(C_i) \subset H_i$ для всех $x \in C_i$. Отсюда получается, что аффинное архимедово полупространство

$$H_i^{\mathrm{aff}} = \{x \mid u^i/x \wedge \alpha^i \geqslant v^i/x \wedge \gamma^i\}$$

содержит C_i. Поскольку пересечение полупространств H_i является нулевым, пересечение аффинных полупространств H_i^{aff} пусто. □

В выпуклом анализе есть аналогичная теорема отделимости для нескольких компактных выпуклых множеств (см. [15, с. 39, 40]).

Из теоремы 18 можно вывести следующий идемпотентный аналог классической теоремы Хелли. Как было замечено в [18], есть другой вывод этой теоремы, основанный на идемпотентном аналоге рассуждения Радона (см., например, [15]).

Теорема 23 (теорема Хелли). *Пусть V_i, $i = 1, \dots, m$, — совокупность $m \geqslant n$ подполумодулей в $\mathbf{R}^n_{\max,\times}$. Если любые n из них имеют ненулевое пересечение, то и вся совокупность в целом имеет ненулевое пересечение.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть тот случай, когда все полумодули V_i замкнуты. В самом деле, из условия теоремы следует, что для любых $j := (j_1, \dots, j_n) \in \{1, \dots, m\}^n$ мы можем выбрать ненулевой вектор z_j из пересечения $V_{j_1} \cap \dots \cap V_{j_n}$. Обозначим через V'_i полумодуль, порождённый векторами z_j, принадлежащими V_i. Семейство полумодулей V'_i, $i = 1, \dots, m$, также обладает тем свойством, что любые n полумодулей имеют ненулевое пересечение. Полумодули V'_i замкнуты, потому что порождены конечными множествами векторов (см., например, [17, лемма 2.20], а также [8, следствие 27]). Если теорема справедлива для замкнутых полумодулей, то полумодули V'_i, $i = 1, \dots, m$, имеют ненулевое пересечение. Следовательно, полумодули V_i, $i = 1, \dots, m$, также имеют ненулевое пересечение, поскольку $V'_i \subseteq V_i$.

Далее мы предполагаем, что все полумодули V_i замкнуты. Допустим, что вся совокупность имеет нулевое пересечение. Пользуясь теоремой 19, мы можем считать, что полумодули V_i архимедовы. При некотором $k < m$ любые k полумодулей пересекаются, но есть $k + 1$ полумодулей $V_1, \dots, V_{k+1}$, которые имеют нулевое пересечение. По теореме 18 существует положительный вектор $y = y^0$ и $\lambda < 1$, такие что

$$P_{k+1} \dots P_1 y \leqslant \lambda y.$$

Для любого i обозначим $y^i = P_i \dots P_1 y^0$, где проекторы индексированы по модулю $(k + 1)$. Используя однородность и изотонность проекторов, получим, что

$$P_{l+k+1} \dots P_{l+1} y^l \leqslant \lambda y^l \tag{39}$$

для любых $l = 1, \dots$. Рассмотрим векторы

$$z^l = P_{l+k} \dots P_{l+1} y^l$$

при $l = 1, \dots, k+1$. Так как любые k полумодулей пересекаются, то по теореме 18 вектор z^l должен иметь хотя бы одну из координат такую же, как y^l. Поскольку $k \geqslant n$, найдутся хотя бы два номера l и хотя бы один номер i, такие что вектор z^l имеет такую же i-ю координату, как y^l. Если мы возьмём наименьший из этих двух номеров l, получим

$$(P_{l+k+1} \dots P_{l+1} y^l)_i = y^l_i.$$

Однако это противоречит неравенству (39). Значит, любые $k + 1$ полумодулей пересекаются, что противоречит сделанному предположению. Теорема доказана. □

Рассмотрим также аффинную версию этой теоремы.

Теорема 24. *Пусть C_i, $i = 1, \dots, m$, — это семейство $m \geqslant n + 1$ выпуклых подмножеств $\mathbf{R}^n_{\max,\times}$. Если любые $n + 1$ из этих выпуклых множеств имеют непустое пересечение, то и всё семейство имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Рассмотрим полумодули $V(C_1), \ldots, V(C_m)$, определённые выше, и применим к ним теорему 23. □

Оставшаяся часть этого раздела посвящена изучению свойств собственных значений циклических проекторов. Из формулы Коллатца—Виландта для спектрального радиуса (33) вытекает монотонность спектрального радиуса циклических проекторов: если F и G — два циклических проектора и $F(x) \leqslant G(x)$ для любых $x \in \mathbf{R}_+^n$, то $\rho(F) \leqslant \rho(G)$. Это также означает, что если V_i', $i = 1, \ldots, k$, и V_i, $i = 1, \ldots, k$, — замкнутые полумодули в $\mathbf{R}^n_{\max,\times}$, такие что $V_i' \subset V_i$, $i = 1, \ldots, k$, то

$$\rho(P_k' \ldots P_1') \geqslant \rho(P_k \ldots P_1), \tag{40}$$

так как проектор является изотонным по отношению к включению (7). В следующей теореме с помощью этого наблюдения удаётся охарактеризовать спектр циклического проектора в терминах гильбертовых значений полумодулей.

Теорема 25. *Пусть V_i, $i = 1, \ldots, k$, — это замкнутые полумодули в $\mathbf{R}^n_{\max,\times}$. Тогда их гильбертово значение — это спектральный радиус $P_k \ldots P_1$. Спектр $P_k \ldots P_1$ — это множество гильбертовых значений $d_{\mathrm{H}}(V_1^M, \ldots, V_k^M)$, где M пробегает все подмножества $\{1, \ldots, n\}$.*

Доказательство. Докажем, что гильбертово значение $d_{\mathrm{H}}(V_1, \ldots, V_k)$ совпадает со спектральным радиусом $P_k \ldots P_1$ и, таким образом, является собственным значением. Возьмём k элементарных полумодулей, натянутых на $x^i \in V_i$, $i = 1, \ldots, k$, и рассмотрим элементарные проекторы P_i' на них. Заметим, что

$$\rho(P_k' \ldots P_1') = d_{\mathrm{H}}(x^1, \ldots, x^k).$$

Обозначим $\bar{x}^0$ собственный вектор $P_k \ldots P_1$, соответствующий максимальному собственному значению, и пусть $\bar{x}^i = P_i \ldots P_1 \bar{x}^0$. Тогда

$$\rho(P_k \ldots P_1) = d_{\mathrm{H}}(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^k).$$

Из свойства (40) следует, что $\rho(P_k \ldots P_1) \geqslant \rho(P_k' \ldots P_1')$, т. е.

$$d_{\mathrm{H}}(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^k) \geqslant d_{\mathrm{H}}(x^1, \ldots x^k)$$

для любых $x^1 \in V_1, \ldots, x^k \in V^k$. Таким образом, гильбертово значение $V_1, \ldots V_k$ является спектральным радиусом $P_k \ldots P_1$.

Теперь рассмотрим $d_{\mathrm{H}}(V_1^M, \ldots, V_k^M)$ для произвольного множества индексов $M \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Заметим, что полумодули V_i^M, $i = 1, \ldots, k$, замкнуты, и обозначим через P_i^M, $i = 1, \ldots, k$, проекторы на них. Легко видеть, что $P_i^M(y) = P_i(y)$ для всех i и для всех y с $\mathrm{supp}(y) \subseteq M$. Гильбертово значение $d_{\mathrm{H}}(V_1^M, \ldots, V_k^M)$ является спектральным радиусом $P_k^M \ldots P_1^M$, а также собственным значением $P_k \ldots P_1$.

Мы показали, что любое гильбертово значение $d_{\mathrm{H}}(V_1^M, \ldots, V_k^M)$ является собственным значением $P_k \ldots P_1$. Обратное утверждение следует из теоремы 14. □

5. Иллюстрации

В этом разделе приводятся иллюстрации к теоремам 11 и 20.

В качестве иллюстрации к теореме 11 рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\infty \\ 1 & 2 & -\infty & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\infty & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим i-е столбцы матриц A и B через a^i и b^i соответственно. Для любых $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\beta > 0$ обозначим через $\exp(\beta x)$ вектор того же размера с координатами $\exp(\beta x_j)$. Пусть V_1 (V_2) — подполумодуль $\mathbf{R}^3_{\max,\times}$, порождённые векторами $\exp(\beta a^i)$, $1 \leqslant i \leqslant 4$ (соответственно $\exp(\beta b^i)$, $1 \leqslant i \leqslant 3$). Параметр β подобран для удобства восприятия рис. 1 (мы взяли $\beta = 2/3$). Полумодули V_1, V_2

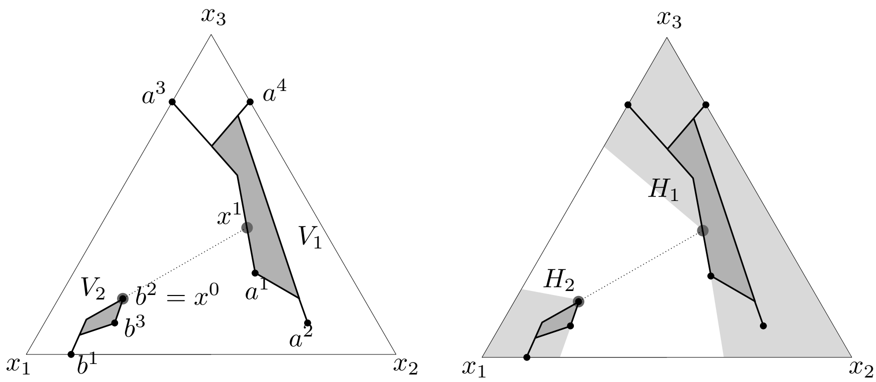

Рис. 1. Полумодули (слева) и отделяющие полупространства (справа)

и их образующие показаны в левой части рисунка следующим образом. Общий принцип заключается в том, что любому ненулевому вектору $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbf{R}^3_{\max,\times}$ можно поставить в соответствие точку правильного треугольника, являющуюся центром масс трёх вершин этого треугольника с весами w_j. Образующие a^i и b^i соответствуют на рисунке тёмным кружкам. Например, a^1 соответствует тому кружку, который находится в центре масс вершин треугольника, вес которых задан с помощью вектора $(1, \exp(\beta), 1)$. Полумодули V_1 и V_2 — две тёмно-серые области вместе с отрезками, соединяющими эти области с образующими полумодулей.

Поскольку координаты вектора $x^0 := a^2 = \exp\bigl(\beta(2,0,0)\bigr) \in V_2$ ненулевые, вектор x^0 архимедов, и можно проверить, используя явное выражение для проектора (см. [9, теорема 5]), что x^0 является собственным вектором $P_2 P_1$. В самом деле,

$$x^1 := P_1 x^0 = \exp\bigl(\beta(-1,0,0)\bigr)$$

и

$$x^2 := P_2 x^1 = \exp\bigl(\beta(-1,-3,-3)\bigr) = \exp(-3\beta)x^0.$$

Полупространства, построенные при доказательстве теоремы 11, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{u \mid x^0/u = x^1/u\} = \\ &= \{u \mid \min(\exp(2\beta)/u_1,\, 1/u_2,\, 1/u_3) = \min(\exp(-\beta)/u_1,\, 1/u_2,\, 1/u_3)\} = \\ &= \{u \mid \max(u_2,u_3) \geqslant \exp(\beta)u_1\}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} H_2 &= \{u \mid x^1/u = x^2/u\} = \\ &= \{u \mid \min(\exp(-\beta)/u_1,\, 1/u_2,\, 1/u_3) = \\ &\quad = \min(\exp(-\beta)/u_1,\, \exp(-3\beta)/u_2,\, \exp(-3\beta)/u_3)\} = \\ &= \{u \mid u_1 \geqslant \exp(2\beta)\max(u_2,u_3)\}.\end{aligned}$$

На рисунке эти полупространства показаны как светло-серые области (справа). В теореме 11 доказывается, что их пересечение является нулевым (то есть содержит лишь нулевой вектор).

В качестве иллюстрации к теореме 20 рассмотрим матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\infty & 2 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -\infty & -\infty \\ 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через V_i, $i = 1,2,3$, полумодуль, порождённый векторами $\exp(\beta y)$, где y — столбец матрицы A_i. Эти три полумодуля показаны на рис. 2 слева, по

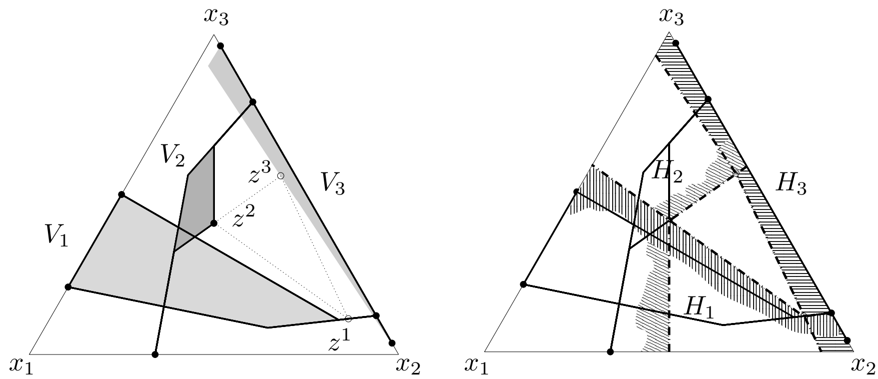

Рис. 2. Отделимость трёх полумодулей, один из которых не является архимедовым

аналогии с предыдущим примером. Полумодуль V_3, не содержащий архимедовых векторов, на этом рисунке соответствует жирному отрезку внутри ребра

$[x_2, x_3]$. Серая область, содержащая этот отрезок, соответствует архимедову полумодулю V_3', порождённому векторами $\exp(\beta y)$, где y — столбец матрицы

$$A_3' = \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Этот полумодуль содержит V_3 и имеет нулевое пересечение с $V_1 \cap V_2$. Полумодуль V_3' построен по рецепту предложения 19: к образующим полумодуля V_3 добавлен вектор $y \oplus \delta e^1$, где y — вектор из V_3, в данном случае равный $\exp\bigl(\beta(-\infty, 0, 5)\bigr)$, и число $\delta = \exp(\beta)$ достаточно мало, чтобы пересечение V_3' с $V_1 \cap V_2$ было нулевым.

Обозначим через P_i проектор на V_i, $i = 1, 2$, и через P_3' проектор на V_3'. Циклический проектор $P_3'P_2P_1$ имеет архимедов собственный вектор с собственным значением $\lambda < 1$. В самом деле, пусть

$$\begin{aligned} z^0 &:= \exp\bigl(\beta(-3{,}5, 0, 0{,}5)\bigr), \\ z^1 &:= P_1 z^0 = \exp\bigl(\beta(-3{,}5, 0, -3)\bigr), \\ z^2 &:= P_2 z^1 = \exp\bigl(\beta(-3{,}5, -3{,}5, -3)\bigr). \end{aligned}$$

Можно проверить, что

$$z^3 := P_3' z^2 = P_3' P_2 P_1 z^0 = \lambda z^0,$$

где $\lambda = \exp(-3{,}5\beta)$. Точки z^0, z^1, z^2 — это вершины треугольника с пунктирными линиями (в левой части рисунка). Эти пунктирные линии обозначают действие проекторов P_1, P_2 и P_3'.

Теорема 11 даёт следующие полупространства:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{u \mid \exp(3\beta)u_3 \leqslant \max(\exp(3{,}5\beta)u_1,\ u_2)\}, \\ H_2 &= \{u \mid \exp(3{,}5\beta)u_2 \leqslant \max(\exp(3{,}5\beta)u_1,\ \exp(3\beta)u_3)\}, \\ H_3 &= \{u \mid \exp(7\beta)u_1 \leqslant \max(\exp(3{,}5\beta)u_2,\ \exp(3\beta)u_3)\}. \end{aligned}$$

Мы получаем, что $H_i \supset V_i$ и $H_1 \cap H_2 \cap H_3 = \{0\}$. Ломаные штрихпунктирные линии в правой части рисунка обозначают границы полупространств H_1, H_2 и H_3. Каждая такая линия разделяет треугольник на две части, причём соответствующее полупространство занимает ту из этих частей, которая помечена штриховкой.

6. Благодарности

Авторы благодарят П. Бутковича и Г. Шнайдера за ценные обсуждения, которые во многом были отправной точкой этой работы. С. Гобер также благодарен Ф. Менье, обратившему его внимание на идемпотентные аналоги теоремы Хелли. С. Н. Сергеев особенно благодарен А. Н. Соболевскому за ряд ценных идей и обсуждений, касающихся связей между выпуклой геометрией и идемпотентным анализом. Авторы также благодарны И. Зингеру и анонимному рецензенту, внимательно прочитавшим первоначальный вариант этого текста, за ряд полезных замечаний и их интерес к этой работе.

Литература

[1] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.

[2] Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б. Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход // Мат. заметки. — 2001. — Т. 69, № 5. — С. 758—797. — arXiv:math.FA/0009128.

[3] Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1994.

[4] Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973.

[5] Baccelli F. L., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J. P. Synchronization and Linearity. — New York: Wiley, 1992.

[6] Bauschke H. H., Borwein J. M., Lewis A. S. The method of cyclic projections for closed convex sets in Hilbert space // Recent Developments in Optimization Theory and Nonlinear Analysis / Y. Censor, S. Reich, eds. — Providence: Amer. Math. Soc., 1997. — (Contemporary Math.; Vol. 204). — P. 1—42.

[7] Blyth T. S., Janowitz M. F. Residuation Theory. — Pergamon Press, 1972.

[8] Butkovič P., Schneider H., Sergeev S. Generators, extremals and bases of max cones // Linear Algebra Appl. — 2007. — Vol. 421. — P. 394—406. — arXiv:math.RA/0604454.

[9] Cohen G., Gaubert S., Quadrat J. P. Duality and separation theorems in idempotent semimodules // Linear Algebra Appl. — 2004. — Vol. 379. — P. 395—422. — arXiv:math.FA/0212294.

[10] Cohen G., Gaubert S., Quadrat J. P., Singer I. Max-plus convex sets and functions // Idempotent Mathematics and Mathematical Physics / G. Litvinov, V. Maslov, eds. — Providence: Amer. Math. Soc., 2005. — (Contemporary Math.; Vol. 377). — P. 105—129. — arXiv:math.FA/0308166.

[11] Cuninghame-Green R. A. Projections in minimax algebra // Math. Programmming. — 1976. — Vol. 10, no. 1. — P. 111—123.

[12] Cuninghame-Green R. A. Minimax Algebra. — Berlin: Springer, 1979. — (Lect. Notes Economics Math. Systems; Vol. 166).

[13] Cuninghame-Green R. A., Butkovič P. The equation $A \otimes x = B \otimes y$ over $(\max, +)$ // Theoret. Comput. Sci. — 2003. — Vol. 293. — P. 3—12.

[14] Develin M., Sturmfels B. Tropical convexity // Doc. Math. — 2004. — Vol. 9. — P. 1—27. — arXiv:math.MG/0308254.

[15] Eggleston H. G. Convexity. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1958.

[16] Golan J. Semirings and Their Applications. — Dordrecht: Kluwer, 2000.

[17] Gaubert S., Katz R. The Minkowski theorem for max-plus convex sets // Linear Algebra Appl. — 2007. — Vol. 421. — P. 356—369. — arXiv:math.GM/0605078.

[18] Gaubert S., Meunier F. Private commmunication. — 2006.

[19] Idempotent Mathematics and Mathematical Physics / G. Litvinov, V. Maslov, eds. — Providence: Amer. Math. Soc., 2005. — (Contemporary Math.; Vol. 377).

[20] Litvinov G. L. Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: A brief introduction // J. Math. Sci. — 2007. — Vol. 140, no. 3. — P. 426—444.

[21] Nitica V., Singer I. The structure of max-plus hyperplanes // Linear Algebra Appl. — 2007. — Vol. 426. — P. 382—414.

[22] Nussbaum R. D. Convexity and log convexity for the spectral radius // Linear Algebra Appl. — 1986. — Vol. 73. — P. 59—122.

[23] Samborskiĭ S. N., Shpiz G. B. Convex sets in the semimodule of bounded functions // Idempotent Analysis / V. P. Maslov, S. N. Samborskiĭ, eds. — Providence: Amer. Math. Soc., 1992. — (Adv. Sov. Math.; Vol. 13). — P. 135—137.

[24] Zimmermann K. A general separation theorem in extremal algebras // Ekonomicko-matematický obzor. — 1977. — Vol. 13, no. 2. — P. 179—201.