

Линейные отображения матриц, монотонные относительно порядков $\overset{\#}{\leq}$ и $\overset{cn}{\leq}$

М. А. ЕФИМОВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: efimov-mikhail@rambler.ru

УДК 512.643

Ключевые слова: линейные отображения, частичные порядки на матричной алгебре, групповая обобщённая обратная матрица.

Аннотация

Получена характеристика линейных отображений пространства матриц в себя над произвольным полем характеристики, отличной от 2, монотонных относительно порядков $\overset{\#}{\leq}$ и $\overset{cn}{\leq}$.

Abstract

M. A. Efimov, Linear matrix transformations that are monotone with respect to the $\overset{\#}{\leq}$ - or $\overset{cn}{\leq}$ -order, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 4, pp. 53–66.

We characterize linear transformations on the matrix algebra over an arbitrary field with characteristic not equal to 2 that are monotone with respect to the $\overset{\#}{\leq}$ - or $\overset{cn}{\leq}$ -order.

1. Введение

Пусть $M_n(\mathbf{F})$ — пространство квадратных матриц порядка n с коэффициентами из произвольного поля $\mathbf{F}$, $\text{char } \mathbf{F}$ — характеристика поля $\mathbf{F}$, $\text{GL}_n(\mathbf{F})$ — полная линейная группа. Через A^t обозначим транспонированную матрицу к матрице $A \in M_n(\mathbf{F})$, через $\text{rk } A$ — ранг матрицы A . Пусть E_{ij} — матрица, у которой на (i, j) -й позиции стоит 1, а на всех остальных — 0, $\text{Ker } T$ — ядро линейного отображения T .

Определение 1.1. Матрица $A \in M_n(\mathbf{F})$ имеет индекс k ($\text{Ind } A = k$), если $\text{rk } A^k = \text{rk } A^{k+1}$ и k есть наименьшее натуральное число с таким свойством.

Определение 1.2. Групповая обобщённая обратная матрица $A^\#$ для матрицы A — это матрица, удовлетворяющая следующим соотношениям:

- 1) $AA^\#A = A$;
- 2) $A^\#AA^\# = A^\#$;
- 3) $AA^\# = A^\#A$.

Известно (см. [5, 8]), что групповая обобщённая обратная (или просто *групповая обратная*) матрица к данной матрице A существует тогда и только тогда, когда A имеет индекс 1 ($\text{rk } A = \text{rk } A^2$). Кроме того, если матрица с такими свойствами существует, то она единственна (см. [9, 12]).

При помощи групповой обобщённой обратной матрицы можно задавать различные отношения частичного порядка на матричной алгебре. Введём те из них, которые будут рассмотрены в данной работе.

Определение 1.3 [9]. Пусть матрица $A \in M_n(\mathbf{F})$ имеет индекс 1, $B \in M_n(\mathbf{F})$ — произвольная матрица. Будем говорить, что $A \overset{\#}{\leq} B$, если $AA^\# = BA^\# = A^\#B$.

Заметим, что все матрицы индекса больше 1 максимальны относительно порядка $\overset{\#}{\leq}$. В [7] введено отношение порядка на всей матричной алгебре, расширяющее порядок $\overset{\#}{\leq}$. Это отношение называется порядком $\overset{\text{cn}}{\leq}$. Для его задания определим следующее разложение матриц.

Определение 1.4. Нильпотентным разложением квадратной матрицы $A \in M_n(\mathbf{F})$ называется представление $A = C_A + N_A$, где C_A имеет индекс 1, а N_A нильпотентна, причём $C_A N_A = N_A C_A = 0$.

Известно, что для произвольной матрицы $A \in M_n(\mathbf{F})$ нильпотентное разложение существует и единственно [4, гл. 4.8].

Введём отношение порядка $\overset{\text{cn}}{\leq}$, оно также потребуется для задания порядка $\overset{\text{cn}}{\leq}$.

Определение 1.5 [6, 11]. $A \overset{\text{cn}}{\leq} B$ для произвольных матриц $A, B \in M_n(\mathbf{F})$ тогда и только тогда, когда $\text{rk}(B - A) = \text{rk } B - \text{rk } A$.

Определение 1.6 [7]. Пусть $A, B \in M_n(\mathbf{F})$. Тогда $A \overset{\text{cn}}{\leq} B$, если и только если $C_A \overset{\#}{\leq} C_B$ и $N_A \overset{\#}{\leq} N_B$.

Все три определённые отношения действительно являются отношениями частичного порядка, т. е. рефлексивны, антисимметричны и транзитивны (доказательство можно найти в [7]). Отметим, что указанные отношения порядка используются в различных областях алгебры (см. [3, 10]). Применяются они и в математической статистике (см. [2]).

Изучение свойств заданного частичного порядка на $M_n(\mathbf{F})$ нередко опирается на характеризацию монотонных относительно него отображений (подробнее см. [3]).

Определение 1.7. Отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ *монотонно* относительно порядка $\leq$, если для любых матриц A и B из $A \leq B$ следует $T(A) \leq T(B)$.

Определение 1.8. Отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ *строго монотонно* относительно порядка $\leq$, если для любых матриц A и B условия $A \leq B$ и $T(A) \leq T(B)$ эквивалентны.

Цель данной работы — указать общий вид линейных отображений, монотонных относительно порядков $\overset{\#}{\leq}$ и $\overset{cn}{\leq}$. В [1] подобная характеристика уже была получена при дополнительном предположении биективности рассматриваемых отображений. Нам потребуются определение и связанная с ним лемма, доказанная в этой работе.

Определение 1.9 [1, определение 3.2]. Будем называть последовательность матриц $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in (M_n(\mathbf{F}))^n$ *выделенной*, если существуют такие ненулевые элементы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbf{F}$ и матрица $P \in GL_n(\mathbf{F})$, что

$$A_i = P(\alpha_1 E_{11} + \alpha_2 E_{22} + \dots + \alpha_i E_{ii})P^{-1}$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Согласно общепринятым обозначениям $A \overset{\#}{<} B$ ($A \overset{cn}{<} B$), если $A \neq B$ и $A \overset{\#}{\leq} B$ ($A \overset{cn}{\leq} B$).

Лемма 1.10 [1, лемма 3.4]. Для последовательности

$$(A_1, A_2, \dots, A_n) \in (M_n(\mathbf{F}))^n$$

равносильны следующие утверждения:

- 1) последовательность $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ является выделенной;
- 2) $0 \overset{\#}{<} A_1 \overset{\#}{<} A_2 \overset{\#}{<} \dots \overset{\#}{<} A_n$;
- 3) $0 \overset{cn}{<} A_1 \overset{cn}{<} A_2 \overset{cn}{<} \dots \overset{cn}{<} A_n$.

В дальнейшем нам потребуются примеры монотонных отображений. Непосредственная проверка показывает, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1.11. Следующие отображения пространства матриц линейны и монотонны относительно порядков $\overset{\#}{\leq}$ и $\overset{cn}{\leq}$:

- 1) $T_c(X) = cX$, где $c \in \mathbf{F}$;
- 2) $T_P(X) = P^{-1}XP$, где $P \in GL_n(\mathbf{F})$;
- 3) $T_t(X) = X^t$.

Так как композиция отображений, монотонных относительно некоторого частичного порядка, снова монотонна, отображения следующего вида монотонны относительно порядков $\overset{\#}{\leq}$ и $\overset{cn}{\leq}$ ($\alpha \in \mathbf{F}$ и $P \in GL_n(\mathbf{F})$): $T(X) = \alpha P^{-1}XP$, $T(X) = \alpha P^{-1}X^tP$. Нетрудно понять, что композиция отображений указанного вида есть отображение указанного вида. Отметим, что утверждение основной теоремы данной работы состоит в том, что других линейных монотонных относительно исследуемых порядков отображений нет.

В дальнейшем для изучения линейных монотонных отображений нам понадобятся следующие определения.

Определение 1.12. Будем говорить, что матрицы $A, B \in M_n(\mathbf{F})$ *ортгонали*ны, если $AB = BA = 0$.

Определение 1.13. Набор из n матриц $A_1, A_2, \dots, A_n \in M_n(\mathbf{F})$ будем называть *В-набором*, если выполнены следующие условия:

- 1) все A_i имеют ранг и индекс 1;
- 2) A_i и A_j ортогональны для любых различных i и j .

В следующем разделе будут изучены некоторые свойства линейных отображений, монотонных относительно порядков $\overset{\#}{\leq}$ и $\overset{\text{сп}}{\leq}$, и получена информация о структуре В-набора. С помощью этих данных в разделе 3 будет сформулирована и доказана основная теорема о характеристизации линейных отображений, монотонных относительно порядков $\overset{\#}{\leq}$ и $\overset{\text{сп}}{\leq}$.

2. Свойства монотонных отображений

Нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 2.1. Пусть $A = \{a_{ij}\}$ — произвольная квадратная матрица. Тогда A и E_{ii} будут ортогональны, если и только если $a_{ij} = a_{ji} = 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Из соотношения

$$E_{ii}A = \sum_j a_{ij}E_{ij} = 0$$

получаем условие $a_{ij} = 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$. Аналогично получаем условие $a_{ji} = 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$. $\square$

Лемма 2.2. Пусть матрицы $X_1, X_2, \dots, X_n \in M_n(\mathbf{F})$ образуют В-набор. Тогда существуют такие ненулевые $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbf{F}$ и такая матрица $P \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$, что $P^{-1}X_iP = \alpha_iE_{ii}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Проведём индукцию по n . При $n = 1$ утверждение верно ($\alpha_1 \neq 0$, так как матрица X_1 имеет ранг 1). Пусть $n > 1$. По условию матрица X_1 имеет индекс и ранг 1, поэтому существует такая матрица $P_1 \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$, что $X_1 = P_1^{-1}\alpha_1E_{11}P_1$ для некоторого $\alpha_1 \neq 0$. Но тогда матрицы

$$P_1X_1P_1^{-1} = \alpha_1E_{11}, \quad P_1X_2P_1^{-1}, \dots, \quad P_1X_nP_1^{-1}$$

также образуют В-набор. Без ограничения общности можем считать, что $X_1 = \alpha_1E_{11}$. Будем обозначать через M_{ij} элемент матрицы M , стоящий на позиции (i, j) . Применяя лемму 2.1, получаем $(X_k)_{1j} = (X_k)_{j1} = 0$ при всех $k, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ с условием $k > 1$, т. е. X_k — блочно-диагональная матрица вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X'_k \end{pmatrix}.$$

Отметим, что ранг X'_k совпадает с рангом X_k и равен 1, $(X'_k)^2 \neq 0$, т. е. индекс X'_k также равен 1. Тогда из правил умножения матриц следует, что

$X'_2, X'_3, \dots, X'_n \in M_{n-1}(\mathbf{F})$ образуют В-набор. По предположению индукции найдётся матрица $P' \in GL_{n-1}(\mathbf{F})$, такая что $(P')^{-1}X'_{i+1}P' = \beta_i E_{ii}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n-1$, все β_i ненулевые. Обозначим $\alpha_2 = \beta_1, \alpha_3 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_{n-1}$;

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}.$$

Тогда $P^{-1}X_1P = \alpha_1 E_{11}$ и $P^{-1}X_iP = \alpha_i E_{ii}$ при $i > 1$. Лемма доказана. $\square$

Вообще говоря, непосредственная проверка условия монотонности для данного отображения — трудная техническая задача. Поэтому важнейшим для характеристики линейных монотонных отображений является следующее их свойство, вытекающее из леммы о выделенной последовательности (см. [1, лемма 3.4]).

Теорема 2.3. Пусть матрицы $X_1, X_2, \dots, X_n \in M_n(\mathbf{F})$ образуют В-набор, а линейное отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ монотонно относительно порядка $\overset{\#}{\leq}$ (или $\overset{\text{cn}}{\leq}$). Кроме того, ни для какого $i = 1, 2, \dots, n$ матрица X_i не принадлежит $\text{Ker } T$. Тогда матрицы $T(X_1), T(X_2), \dots, T(X_n)$ образуют В-набор.

Доказательство. В силу леммы 2.2 найдётся такая матрица $P \in GL_n(\mathbf{F})$, что $P^{-1}X_iP = \alpha_i E_{ii}$ для некоторых ненулевых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbf{F}$. Рассмотрим выделенную последовательность

$$(X_1, X_1 + X_2, \dots, X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

и применим лемму 1.10. Получим

$$\begin{aligned} 0 &\overset{\#}{\leq} X_1 \overset{\#}{\leq} X_1 + X_2 \overset{\#}{\leq} \dots \overset{\#}{\leq} X_1 + X_2 + \dots + X_n, \\ 0 &\overset{\text{cn}}{\leq} X_1 \overset{\text{cn}}{\leq} X_1 + X_2 \overset{\text{cn}}{\leq} \dots \overset{\text{cn}}{\leq} X_1 + X_2 + \dots + X_n. \end{aligned}$$

По условию теоремы T — линейное отображение, монотонное относительно порядка $\overset{\#}{\leq}$ (или $\overset{\text{cn}}{\leq}$). Обозначая $Y_i = T(X_i)$, с учётом равенства $T(0) = 0$ получаем

$$0 \overset{\#}{\leq} Y_1 \overset{\#}{\leq} Y_1 + Y_2 \overset{\#}{\leq} \dots \overset{\#}{\leq} Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

или

$$0 \overset{\text{cn}}{\leq} Y_1 \overset{\text{cn}}{\leq} Y_1 + Y_2 \overset{\text{cn}}{\leq} \dots \overset{\text{cn}}{\leq} Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n.$$

Так как $X_i \notin \text{Ker } T$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$, получим, что $Y_i = T(X_i) \neq 0$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n$. Поэтому все неравенства строгие. Повторно применяя лемму 1.10, можем утверждать, что последовательность

$$(Y_1, Y_1 + Y_2, \dots, Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n)$$

выделенная. Но тогда существует матрица $Q \in GL_n(\mathbf{F})$, такая что

$$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_i = Q(\beta_1 E_{11} + \beta_2 E_{22} + \dots + \beta_i E_{ii})Q^{-1}$$

для некоторых ненулевых $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbf{F}$, откуда следует, что $Y_i = Q\beta_i E_{ii}Q^{-1}$. Таким образом, матрица Y_i имеет ранг и индекс 1 для каждого i . Кроме того, $E_{ii}E_{jj} = E_{jj}E_{ii} = 0$ при $i \neq j$. Следовательно, матрицы Y_i и Y_j ортогональны при $i \neq j$. В результате матрицы $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ образуют В-набор. $\square$

Из доказанной теоремы нетрудно получить следствие.

Следствие 2.4. Пусть биективное линейное отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ монотонно относительно порядка $\overset{\#}{\leq}$ (или $\overset{\text{сн}}{\leq}$). Тогда оно переводит матрицы ранга и индекса 1 в матрицы ранга и индекса 1.

Доказательство. Пусть A — некоторая матрица с условием $\text{rk } A = \text{Ind } A = 1$. Тогда существуют $P \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$ и ненулевое $\lambda \in \mathbf{F}$, такие что $A = \lambda P^{-1}E_{11}P$. Рассмотрим набор из n матриц

$$X_1 = A = \lambda P^{-1}E_{11}P, X_2 = P^{-1}E_{22}P, \dots, X_n = P^{-1}E_{nn}P.$$

Как отмечалось выше, эти матрицы образуют В-набор. Кроме того, в силу биективности $X_i \notin \text{Ker } T$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

По теореме 2.3 матрицы $T(X_1), T(X_2), \dots, T(X_n)$ также образуют В-набор. Поэтому матрица $T(A) = T(X_1)$ имеет ранг и индекс 1, что и требовалось доказать. $\square$

В дальнейшем нам потребуется следующее определение.

Определение 2.5. Матрицу $A \in M_n(\mathbf{F})$ будем называть матрицей типа (i, j) , где $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, если существуют такие $a_{ii}, a_{ij}, a_{ji}, a_{jj} \in \mathbf{F}$, что

$$A = a_{ii}E_{ii} + a_{ij}E_{ij} + a_{ji}E_{ji} + a_{jj}E_{jj}.$$

Замечание 2.6. В теореме 2.3 рассматриваются В-наборы, в которых $X_i \notin \text{Ker } T$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. В связи с этим возникает вопрос о существовании таких наборов. Ответ на него даёт следующая лемма: если В-наборов с этим свойством нет, то отображение T тождественно нулевое (достаточно положить $V = \text{Ker } T$).

Лемма 2.7. Пусть $\mathbf{F}$ — произвольное поле с условием $\text{char } \mathbf{F} \neq 2$, $n \geq 1$ — целое число, V — такое подпространство $M_n(\mathbf{F})$, что в любом В-наборе найдётся матрица, лежащая в V . Тогда $V = M_n(\mathbf{F})$.

Доказательство. Проведём индукцию по n . При $n = 1$ утверждение верно. Пусть $n > 1$. Покажем, что все матрицы ранга и индекса 1 лежат в V . Предположим, найдётся матрица $A_0 \notin V$ с условием $\text{rk } A_0 = \text{Ind } A_0 = 1$. Рассмотрим некоторый В-набор, содержащий A_0 , и воспользуемся условием теоремы. Тогда найдётся такая матрица B_0 , ортогональная A_0 , что $B_0 \in V$, $\text{rk } B_0 = \text{Ind } B_0 = 1$. Как отмечалось выше, существуют такие матрица $P_1 \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$ и элемент поля $\lambda_1 \neq 0$, что $B_0 = \lambda_1 P_1^{-1}E_{11}P_1$. Обозначим $V_1 = \lambda_1^{-1}P_1VP_1^{-1}$. Тогда $E_{11} \in V_1$ и найдётся такая матрица $A_1 = \lambda_1^{-1}P_1A_0P_1^{-1}$ ранга и индекса 1, ортогональная E_{11} , что $A_1 \notin V_1$.

Рассмотрим всевозможные В-наборы, содержащие E_{11} .

1. В каждом В-наборе матриц $X_1 = E_{11}, X_2, \dots, X_n$ найдётся отличная от E_{11} матрица, лежащая в V_1 . Обозначим через W подпространство матриц с нулевыми первой строкой и столбцом, $V' = V_1 \cap W$. Пусть $\overline{V'}$ — это V' , рассмотренное как подпространство $M_{n-1}(\mathbf{F})$. В силу леммы 2.1 все ортогональные E_{11} матрицы лежат в W ,

$$X_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X'_k \end{pmatrix}$$

для всех $k = 2, 3, \dots, n$. Поэтому $X'_2, X'_3, \dots, X'_n$ — В-набор в пространстве $M_{n-1}(\mathbf{F})$ и в каждом таком наборе найдётся матрица, лежащая в $\overline{V'}$. Применим утверждение индукции и получим, что $\overline{V'} = M_{n-1}(\mathbf{F})$, т. е. $V' = W$ и $W \subset V_1$. Но A_1 ортогональна E_{11} , следовательно, $A_1 \in W \subset V_1$. Противоречие.

2. Найдётся такой В-набор $X_1 = E_{11}, X_2, X_3, \dots, X_n$, что $X_i \notin V_1$ для всех $i = 2, 3, \dots, n$. По лемме 2.2 найдётся такая матрица $P_2 \in GL_n(\mathbf{F})$ и такие ненулевые $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \in \mathbf{F}$, что $X_k = \lambda_i P_2 E_{ii} P_2^{-1}$ для всех $k = 2, 3, \dots, n$ и $X_1 = P_2 E_{11} P_2^{-1} = E_{11}$. Обозначим $V_2 = P_2^{-1} V_1 P_2$, получим $E_{11} \in V_2$, $\lambda_k E_{kk} \notin V_2$ для всех $k = 2, 3, \dots, n$. Но V_2 является подпространством в $M_n(\mathbf{F})$. Поэтому $E_{22}, E_{33}, \dots, E_{nn} \notin V_2$.

Далее будем рассматривать наборы матриц вида $A, B, E_{33}, \dots, E_{nn}$, где матрицы A и B ортогональны, имеют тип $(1, 2)$ и ранг и индекс 1. Из условия теоремы следует, что либо $A \in V_2$, либо $B \in V_2$.

1) Покажем, что $E_{12} \in V_2$. Пусть $A = E_{11} + xE_{12}$, $B = -xE_{12} + E_{22}$, где $x \in \mathbf{F}$ и $x \neq 0$. Тогда $AB = BA = 0$, $A^2 = A$, $B^2 = B$, $\text{rk } A = \text{rk } B = 1$. Но это означает, что A и B удовлетворяют всем требуемым условиям. Если $A = E_{11} + x_0 E_{12} \in V_2$ при некотором значении $x = x_0$, то, используя линейность V_2 и условие $E_{11} \in V_2$, получим $E_{12} \in V_2$. Если же такого значения x_0 нет, то найдутся ненулевые $x_1 \neq x_2$, такие что $-x_1 E_{12} + E_{22} \in V_2$ и $-x_2 E_{12} + E_{22} \in V_2$. Это следует из того, что $\text{char } \mathbf{F} \neq 2$ и в поле $\mathbf{F}$ не меньше трёх элементов. С учётом линейности V_2 имеем $E_{12} \in V_2$.

2) Полагая $A = E_{11} + xE_{21}$, $B = -xE_{21} + E_{22}$, аналогично пункту 1) получаем, что $E_{21} \in V_2$.

3) Пусть $A = E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22}$, $B = E_{11} - E_{12} - E_{21} + E_{22}$. Проверим, что $AB = 0$ и $BA = 0$:

$$\begin{aligned} AB &= (E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22})(E_{11} - E_{12} - E_{21} + E_{22}) = \\ &= (E_{11} - E_{12}) + (-E_{11} + E_{12}) + (E_{21} - E_{22}) + (-E_{21} + E_{22}) = 0, \\ BA &= (E_{11} - E_{12} - E_{21} + E_{22})(E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22}) = \\ &= (E_{11} + E_{12}) + (-E_{11} - E_{12}) + (E_{21} + E_{22}) + (-E_{21} - E_{22}) = 0. \end{aligned}$$

Обозначим $d = 1 + 1$. Так как характеристика поля $\mathbf{F}$ не равна 2, $d \neq 0$. Покажем, что $A^2 \neq 0$, $B^2 \neq 0$. Для этого рассмотрим матрицы $E_{11}A^2E_{11}$ и $E_{11}B^2E_{11}$:

$$\begin{aligned}
E_{11}A^2E_{11} &= E_{11}(E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22})(E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22})E_{11} = \\
&= (E_{11} + E_{12})(E_{11} + E_{21}) = E_{11} + E_{11} = dE_{11} \neq 0, \\
E_{11}B^2E_{11} &= E_{11}(E_{11} - E_{12} - E_{21} + E_{22})(E_{11} - E_{12} - E_{21} + E_{22})E_{11} = \\
&= (E_{11} - E_{12})(E_{11} - E_{21}) = E_{11} + E_{11} = dE_{11} \neq 0.
\end{aligned}$$

Ясно, что $\text{rk } A = \text{rk } B = 1$. С учётом неравенства $A^2 \neq 0$ имеем $0 < \text{rk } A^2 \leq \text{rk } A = 1$. Следовательно, $\text{rk } A^2 = 1 = \text{rk } A$ и $\text{Ind } A = 1$. Аналогично получаем, что $\text{Ind } B = 1$. Можем утверждать, что либо $A \in V_2$, либо $B \in V_2$. Но тогда $E_{22} \in V_2$, так как $E_{11} \in V_2$, $E_{12} \in V_2$, $E_{21} \in V_2$. Противоречие.

Таким образом, все матрицы ранга и индекса 1 лежат в V . Покажем, что произвольная матрица лежит в V . Для этого представим её в виде суммы матриц ранга 1. Если среди слагаемых встретится матрица S индекса, отличного от 1, то $S = Q^{-1}E_{12}Q$ для некоторой матрицы $Q \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$. Но $E_{12} = (E_{11} + E_{12}) - E_{11}$, причём E_{11} и $E_{11} + E_{12}$ имеют ранг и индекс 1. Поэтому

$$S = Q^{-1}((E_{11} + E_{12}) - E_{11})Q = Q^{-1}(E_{11} + E_{12})Q - Q^{-1}E_{11}Q = A_1 - A_2 \in V,$$

так как сопряжение сохраняет ранг и индекс матриц. Тем самым все матрицы ранга 1 лежат в V , а значит, и их сумма. Это наблюдение завершает доказательство. $\square$

3. Характеризация монотонных отображений

Теорема 3.1. Пусть $\mathbf{F}$ — произвольное поле с условием $\text{char } \mathbf{F} \neq 2$, $n \geq 1$ — целое число, а линейное отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ монотонно относительно порядка $\overset{\#}{\leq}$ (или $\overset{\text{cn}}{\leq}$). Тогда T имеет один из двух следующих видов ($\alpha \in \mathbf{F}$, $P \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$):

- 1) $T(X) = \alpha P^{-1}XP$ для всех $X \in M_n(\mathbf{F})$;
- 2) $T(X) = \alpha P^{-1}X^tP$ для всех $X \in M_n(\mathbf{F})$.

Сформулированная теорема утверждает, что все линейные отображения, монотонные относительно порядков $\overset{\#}{\leq}$ и $\overset{\text{cn}}{\leq}$, являются композицией простейших, рассмотренных в лемме 1.11.

Доказательство.

1. Если $T \equiv 0$, то T — отображение указанного вида при $\alpha = 0$. Далее будем считать, что $T \neq 0$. Для доказательства утверждения теоремы будем видоизменять отображение T , комбинируя его с различными сопряжениями, умножениями на скаляры и транспонированиями. По лемме 1.11 полученное отображение также будет линейным и монотонным относительно порядка $\overset{\#}{\leq}$ (или $\overset{\text{cn}}{\leq}$). Если же в результате применения такой серии замен мы получим тождественное отображение, будет доказано, что любое линейное монотонное отображение T имеет требуемый вид.

2. Как отмечено в замечании 2.6, найдётся В-набор $X_1, X_2, \dots, X_n$, такой что $X_i \notin \text{Ker } T$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Применим лемму 2.2 и получим, что $X_i = \beta_i Q_0 E_{ii} Q_0^{-1}$ при $i = 1, 2, \dots, n$ для некоторых ненулевых $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbf{F}$ и $Q_0 \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$. Сделаем замену $T(X) \rightarrow T_1(X) = T(Q_0 X Q_0^{-1})$. Тогда $T_1(\beta_i E_{ii}) \notin \text{Ker } T_1$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. С учётом линейности отображения T_1 имеем $E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn} \notin \text{Ker } T_1$.

По теореме 2.3 матрицы

$$Y_1 = T_1(E_{11}), Y_2 = T_1(E_{22}), \dots, Y_n = T_1(E_{nn})$$

образуют В-набор. Тогда $Y_i = \alpha_i P_0 E_{ii} P_0^{-1}$ при $i = 1, 2, \dots, n$ для некоторых ненулевых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbf{F}$ и матрицы $P_0 \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$. Делая замену

$$T_1(X) \rightarrow T_2(X) = P_0^{-1} T_1(X) P_0,$$

получаем, что $T_2(E_{ii}) = \alpha_i E_{ii}$ при $i = 1, 2, \dots, n$.

3. Итак, существуют такие ненулевые элементы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbf{F}$, что $T_2(E_{ii}) = \alpha_i E_{ii}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Докажем, что $T_2(E_{ij}) = b_{ij} E_{ij} + c_{ij} E_{ji}$ для некоторых $b_{ij} \in \mathbf{F}$ и $c_{ij} \in \mathbf{F}$ при всех $i, j = 1, 2, \dots, n$, причём $b_{ij} c_{ij} = 0$. Кроме того, если существуют i и j , такие что $\alpha_i \neq \alpha_j$, то для этих i и j справедливо $T_2(E_{ij}) = 0$.

1) Фиксируем произвольные различные $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ и введём обозначение $M = T_2(E_{ij})$. Далее будем рассматривать наборы матриц вида

$$A, B, E_{11}, \dots, \widehat{E_{ii}}, \dots, \widehat{E_{jj}}, \dots, E_{nn},$$

где A и B ортогональны, имеют ранг и индекс 1, их тип (i, j) (обозначение $\widehat{X}$ говорит об отсутствии матрицы X в наборе). Ясно, что все такие совокупности матриц являются В-наборами. Если же, кроме того, $T_2(A) \neq 0$ и $T_2(B) \neq 0$, то по теореме 2.3 $T_2(A)$ и $T_2(B)$ также имеют ранг и индекс 1 и ортогональны. В силу равенств $T_2(E_{kk}) = \alpha_k E_{kk}$ при всех $k = 1, 2, \dots, n$ матрицы $T_2(A)$ и $T_2(B)$ имеют тип (i, j) в этом случае.

Пусть t — некоторый ненулевой элемент поля $\mathbf{F}$, $A_t = tE_{ii} + E_{ij}$, $B_t = -tE_{jj} + E_{ij}$. Тогда A_t и B_t ортогональны. Кроме того, они имеют ранг и индекс 1, так как $t \neq 0$. Если бы обе матрицы $T_2(A_t)$ и $T_2(B_t)$ были ненулевыми, то они имели бы ранг 1. Таким образом, если ранг одной из них больше 1, то другая обязана быть нулевой.

Докажем, что $T_2(A_t) \neq 0$ при $t \neq 0$. Предположим, существует ненулевой элемент $t_0 \in \mathbf{F}$, для которого выполнено $T_2(A_{t_0}) = 0$. Но $T_2(A_{t_0}) = \alpha_i t_0 E_{ii} + M$, откуда $M = -\alpha_i t_0 E_{ii}$. Тогда

$$\text{rk } T_2(B_t) = \text{rk}(-\alpha_j t E_{jj} + M) = \text{rk}(-\alpha_j t E_{jj} - \alpha_i t_0 E_{ii}) = 2$$

при любом $t \neq 0$. Следовательно, $T_2(A_t) = 0$ при всех $t \neq 0$.

Покажем, что равенство $T_2(A_t) = 0$ может выполняться не более чем при одном значении t . В самом деле, если справедливы равенства $T_2(A_{t'_1}) = T_2(A_{t'_2}) = 0$ для некоторых различных $t'_1, t'_2 \in \mathbf{F}$, то

$$0 = T_2(A_{t'_1}) - T_2(A_{t'_2}) = T_2((t'_1 - t'_2)E_{ii}) = \alpha_i(t'_1 - t'_2)E_{ii} \neq 0.$$

Но в поле $\mathbf{F}$ по крайней мере два ненулевых элемента, так как $\text{char } \mathbf{F} \neq 2$. Противоречие. Таким образом, $T_2(A_t) \neq 0$ при $t \neq 0$. Аналогично получаем, что $T_2(B_t) \neq 0$ при $t \neq 0$.

Фиксируем некоторые ненулевые и различные $t_1, t_2 \in \mathbf{F}$. Так как матрицы $T_2(A_{t_k})$ при $k = 1, 2$ имеют тип (i, j) , то и $M = T_2(A_{t_k}) - t_k \alpha_i E_{ii}$, $k = 1, 2$, также имеет тип (i, j) . Обозначим

$$M = aE_{ii} + bE_{ij} + cE_{ji} + dE_{jj}.$$

Матрицы $T_2(A_{t_1})$ и $T_2(A_{t_2})$ имеют ранг 1. Запишем равенство нулю соответствующих (2×2) -миноров этих матриц:

$$(t_1 \alpha_i + a)d - bc = 0, \quad (t_2 \alpha_i + a)d - bc = 0.$$

Комбинируя написанные равенства, получим $d = 0$, $bc = 0$. Аналогично, рассматривая $T_2(B_{t_1})$ и $T_2(B_{t_2})$, показываем, что $a = 0$. В результате $T_2(E_{ij}) = b_{ij}E_{ij} + c_{ij}E_{ji}$, причём $b_{ij}c_{ij} = 0$.

2) Покажем, что если $\alpha_i \neq \alpha_j$, то $T_2(E_{ij}) = 0$. В дальнейшем мы докажем, что $T_2(E_{ij})$ не может быть нулевым, а значит, все α_i равны.

Предположим, что $T_2(E_{ij}) \neq 0$ и $\alpha_i \neq \alpha_j$. Без ограничения общности будем считать, что $b_{ij} \neq 0$, $c_{ij} = 0$. Тогда из условия ортогональности матриц $T_2(A_{t_1}) = t_1 \alpha_i E_{ii} + b_{ij}E_{ij}$ и $T_2(B_{t_1}) = -t_1 \alpha_j E_{jj} + b_{ij}E_{ij}$ получим

$$\begin{aligned} 0 &= (t_1 \alpha_i E_{ii} + b_{ij}E_{ij})(-t_1 \alpha_j E_{jj} + b_{ij}E_{ij}) = \\ &= t_1 \alpha_i b_{ij}E_{ij} - t_1 \alpha_j b_{ij}E_{ij} = (\alpha_i - \alpha_j)t_1 b_{ij}E_{ij}. \end{aligned}$$

Но равенство последнего выражения нулю невозможно, так как $\alpha_i \neq \alpha_j$, $t_1 \neq 0$, $b_{ij} \neq 0$. Получили противоречие. Поэтому условие $\alpha_i \neq \alpha_j$ влечёт выполнение равенства $T_2(E_{ij}) = 0$.

4. При $i \neq j$ рассмотрим выражение $T_2(E_{ij} + E_{ji})$. Используя результат предыдущего пункта, можем утверждать, что

$$T_2(E_{ij} + E_{ji}) = p_{ij}E_{ij} + q_{ij}E_{ji}$$

для некоторых p_{ij} и q_{ij} при всех $i, j = 1, 2, \dots, n$. Покажем, что $p_{ij}q_{ij} \neq 0$.

Как и в пункте 3, рассмотрим матрицы

$$A = E_{ii} + E_{ij} + E_{ji} + E_{jj}, \quad B = E_{ii} - E_{ij} - E_{ji} + E_{jj}.$$

Аналогично пункту 3) леммы 2.7 доказываем, что A и B ортогональны и имеют ранг и индекс 1, так как характеристика поля $\mathbf{F}$ не равна 2. Кроме того, эти матрицы имеют тип (i, j) и $T_2(A) \neq 0$, $T_2(B) \neq 0$. Поэтому $\text{rk } T_2(A) = 1$. Но

$$T_2(A) = \alpha_i E_{ii} + p_{ij}E_{ij} + q_{ij}E_{ji} + \alpha_j E_{jj},$$

откуда

$$\alpha_i \alpha_j - p_{ij}q_{ij} = 0, \quad p_{ij}q_{ij} = \alpha_i \alpha_j \neq 0.$$

5. Докажем, что $T_2(E_{ij}) \neq 0$ при всех различных $i, j = 1, 2, \dots, n$. Предположим, что $T_2(E_{ij}) = 0$. Тогда $T_2(E_{ji}) = T_2(E_{ij} + E_{ji})$. По пункту 3 имеем

$$T_2(E_{ji}) = b_{ji}E_{ij} + c_{ji}E_{ji}, \quad b_{ji}c_{ji} = 0.$$

С другой стороны, в пункте 4 показано, что

$$T_2(E_{ij} + E_{ji}) = p_{ij}E_{ij} + q_{ij}E_{ji}, \quad p_{ij}q_{ij} \neq 0.$$

Равенства

$$b_{ji}E_{ij} + c_{ji}E_{ji} = T_2(E_{ji}) = T_2(E_{ij} + E_{ji}) = p_{ij}E_{ij} + q_{ij}E_{ji}$$

возможны, только если $b_{ji} = p_{ij}$ и $c_{ji} = q_{ij}$. Но тогда

$$0 = b_{ji}c_{ji} = p_{ij}q_{ij} \neq 0.$$

Противоречие. Следовательно, $T_2(E_{ij}) \neq 0$ при любых $i, j = 1, 2, \dots, n$ и все α_i совпадают.

6. Докажем биективность отображения T_2 . Фиксируем базис из n^2 матриц $E_{11}, E_{12}, \dots, E_{n,n-1}, E_{nn}$ в $M_n(\mathbf{F})$. В этом базисе отображение T_2 выражается матрицей порядка n^2 , все столбцы которой содержат единственный ненулевой элемент. Это следует из того, что матричные единицы переходят в матричные единицы с некоторым ненулевым коэффициентом. В самом деле, как показано в пункте 2, $T_2(E_{ii}) = \alpha_i E_{ii}$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$. Кроме того, в пункте 3 доказано, что $T_2(E_{ij}) = b_{ij}E_{ij} + c_{ij}E_{ji}$ для всех различных $i, j = 1, 2, \dots, n$. При этом $b_{ij}c_{ij} = 0$, т. е. хотя бы один из коэффициентов b_{ij} и c_{ij} нулевой. Результат пункта 5 позволяет утверждать, что ровно один коэффициент нулевой.

Отметим также, что различные матричные единицы переходят в различные. Действительно, пусть матрицы E_{ij} и $E_{i'j'}$ различны, а $T_2(E_{ij})$ и $T_2(E_{i'j'})$ пропорциональны. С учётом выражения для $T_2(E_{ij})$ это возможно, только если $i \neq j, j' = i, i' = j$. Но если бы матрицы $T_2(E_{ij})$ и $T_2(E_{ji})$ при некоторых различных i и j были пропорциональны одной матричной единице, то матрица $T_2(E_{ij} + E_{ji})$ также была бы пропорциональна матричной единице. С учётом результата пункта 4 это невозможно. Поэтому каждая строка матрицы отображения T_2 содержит единственный ненулевой элемент. Следовательно, она имеет ранг n^2 и обратима. Мы получили, что отображение T_2 — биекция.

7. Как показано в пункте 5, все коэффициенты α_i равны. Заменяя отображение $T_2(X)$ на $T_3(X) = \alpha_1^{-1}T_2(X)$, получим $T_3(E_{ii}) = E_{ii}$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$. Обозначим $\hat{b}_{ij} = \alpha_1^{-1}b_{ij}$, $\hat{c}_{ij} = \alpha_1^{-1}c_{ij}$.

8. В пункте 3 мы доказали, что $T_2(E_{ij}) = b_{ij}E_{ij} + c_{ij}E_{ji}$ при всех различных $i, j = 1, 2, \dots, n$, причём $b_{ij}c_{ij} = 0$, откуда $T_3(E_{ij}) = \hat{b}_{ij}E_{ij} + \hat{c}_{ij}E_{ji}$ при любых различных $i, j = 1, 2, \dots, n$. Кроме того, $\hat{b}_{ij}\hat{c}_{ij} = 0$.

Учитывая, что $\hat{b}_{12}\hat{c}_{12} = 0$, получаем, что хотя бы одно из этих чисел нулевое.

Пусть $\hat{c}_{12} = 0$. Обозначим $T_4(X) = T_3(X)$, $\tilde{b}_{ij} = \hat{b}_{ij}$, $\tilde{c}_{ij} = \hat{c}_{ij}$.

Пусть $\hat{b}_{12} = 0$. Обозначим $T_4(X) = (T_3(X))^t$, $\tilde{b}_{ij} = \hat{c}_{ij}$, $\tilde{c}_{ij} = \hat{b}_{ij}$.

В результате $T_4(E_{ij}) = \tilde{b}_{ij}E_{ij} + \tilde{c}_{ij}E_{ji}$ при любых различных $i, j = 1, 2, \dots, n$, $\tilde{c}_{12} = 0$. Кроме того, справедливо равенство $T_4(E_{ii}) = E_{ii}$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$.

9. Так как отображение T_2 биективно по пункту 6, отображение T_4 также биективно, и к нему применимо следствие 2.4. Получаем, что отображение T_4 переводит матрицы ранга и индекса 1 в матрицы ранга и индекса 1.

Коэффициент $\tilde{c}_{12}$ нулевой, поэтому $T_4(E_{12}) = \tilde{b}_{12}E_{12}$. Покажем, что в этом случае $T_4(E_{1j}) = \tilde{b}_{1j}E_{1j}$ при всех $j > 2$. Для этого рассмотрим матрицу $E_{11} + E_{12} + E_{1j}$, имеющую ранг и индекс 1. Под действием отображения T_4 эта матрица переходит в матрицу

$$T_4(E_{11} + E_{12} + E_{1j}) = E_{11} + \tilde{b}_{12}E_{12} + \tilde{b}_{1j}E_{1j} + \tilde{c}_{1j}E_{j1} = S.$$

Допуская, что неравенство $\tilde{c}_{1j} \neq 0$ выполнено, получаем $\text{rk } S = 2$. Но это противоречит следствию 2.4. Поэтому $T_4(E_{1j}) = \tilde{b}_{1j}E_{1j}$ при любом $j > 1$. А так как различные матричные единицы переходят в различные, $T_4(E_{i1}) = \tilde{b}_{i1}E_{i1}$ при любом $i > 1$.

Для доказательства равенства $T_4(E_{ij}) = \tilde{b}_{ij}E_{ij}$ при всех i и j необходимо проверить его при $i > 1$, $j > 1$, $i \neq j$. В силу условий на i и j матричные единицы E_{ii} , E_{i1} и E_{ij} различны, а потому матрица $E_{ii} + E_{i1} + E_{ij}$ имеет ранг и индекс 1. Значит, и матрица

$$T_4(E_{ii} + E_{i1} + E_{ij}) = E_{ii} + \tilde{b}_{i1}E_{i1} + \tilde{b}_{ij}E_{ij} + \tilde{c}_{ij}E_{ji}$$

имеет ранг 1. Последнее возможно только при $\tilde{c}_{ij} = 0$, откуда следует, что $T_4(E_{ij}) = \tilde{b}_{ij}E_{ij}$.

Положим $\tilde{b}_{ii} = 1$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Получим $T_4(E_{ij}) = \tilde{b}_{ij}E_{ij}$ при всех $i, j = 1, 2, \dots, n$.

10. Обозначим $B = \sum_k \tilde{b}_{1k}E_{kk}$. Тогда $B^{-1} = \sum_s (\tilde{b}_{1s})^{-1}E_{ss}$. Заменим отображение T_4 на отображение $T_5(X) \mapsto BT_4(X)B^{-1}$ и вычислим $T_5(E_{ij})$:

$$\begin{aligned} T_5(E_{ij}) &= BT_4(E_{ij})B^{-1} = \\ &= \left(\sum_k \tilde{b}_{1k}E_{kk} \right) \tilde{b}_{ij}E_{ij} \left(\sum_s (\tilde{b}_{1s})^{-1}E_{ss} \right) = \tilde{b}_{1i}\tilde{b}_{ij}(\tilde{b}_{1j})^{-1}E_{ij} = f_{ij}E_{ij}, \end{aligned}$$

где $f_{ij} = \tilde{b}_{1i}\tilde{b}_{ij}(\tilde{b}_{1j})^{-1}$.

Как отмечено в пункте 9, $\tilde{b}_{ii} = 1$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$, откуда следует, что $f_{ii} = 1$ и $f_{1i} = 1$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$. Покажем, что в этом случае $f_{ij} = 1$ при всех i и j . Так как отображение T_5 получено из T_4 сопряжением, к T_5 применимо следствие 2.4. Рассмотрим матрицу $C_{ij} = (E_{11} + E_{1j}) + (E_{i1} + E_{ij})$ при всех $i > 1$ и $j > 1$. Её ранг равен 1. Докажем, что её индекс также равен 1. При $i = j$ это уже было сделано в пункте 4. Пусть $i \neq j$. Имеем

$$E_{11}C_{ij}^2E_{11} = (E_{11} + E_{1j})(E_{11} + E_{i1}) = E_{11} \neq 0.$$

Это означает, что $C_{ij}^2 \neq 0$. Но тогда $\text{Ind } C_{ij} = 1$. По свойству отображения T_5 $\text{rk } T_5(C_{ij}) = 1$. Отметим, что

$$T_5(C_{ij}) = (f_{11}E_{11} + f_{1j}E_{1j}) + (f_{i1}E_{i1} + f_{ij}E_{ij}).$$

Запишем равенство нулю соответствующего (2×2) -минора:

$$f_{11}f_{ij} - f_{1j}f_{i1} = 0, \quad f_{11}f_{ij} = f_{1j}f_{i1}.$$

Известно, что $f_{kk} = 1$, $f_{1k} = 1$ при $k = 1, 2, \dots, n$. Полагая $i = j$ в равенстве $f_{11}f_{ij} = f_{1j}f_{i1}$, получаем $f_{i1} = 1$ при любом $i = 1, 2, \dots, n$. Но тогда из того же соотношения $f_{ij} = 1$ при всех $i > 1$, $j > 1$.

Таким образом, $f_{ij} = 1$ и $T_5(E_{ij}) = E_{ij}$ для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$. По линейности отображения T_5 имеем $T_5(X) = X$ для любой матрицы X . Теорема доказана. $\square$

Укажем некоторые непосредственные следствия теоремы 3.1.

Следствие 3.2. Пусть $\mathbf{F}$ — произвольное поле с условием $\text{char } \mathbf{F} \neq 2$, $n \geq 1$ — целое число, линейное отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ монотонно относительно порядка $\overset{\#}{\leq}$ (или $\overset{\text{cn}}{\leq}$). Тогда T либо тождественно нулевое, либо биективное.

Следствие 3.3. Пусть $\mathbf{F}$ — произвольное поле с условием $\text{char } \mathbf{F} \neq 2$, $n \geq 1$ — целое число, $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ — линейное отображение. Тогда T монотонно относительно порядка $\overset{\#}{\leq}$, если и только если T монотонно относительно порядка $\overset{\text{cn}}{\leq}$.

Следствие 3.4. Пусть $\mathbf{F}$ — произвольное поле с условием $\text{char } \mathbf{F} \neq 2$, $n \geq 1$ — целое число, линейное отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ монотонно относительно порядка $\overset{\#}{\leq}$ (или $\overset{\text{cn}}{\leq}$). Тогда T строго монотонно относительно порядка $\overset{\#}{\leq}$ (или $\overset{\text{cn}}{\leq}$).

Автор благодарен своему научному руководителю А. Э. Гутерману за постановку задачи и интересные обсуждения.

Литература

- [1] Богданов И. И., Гутерман А. Э. Монотонные отображения матриц, заданные групповой обратной, и одновременная диагонализуемость // Мат. сб. — 2007. — Т. 198, № 1. — С. 3—20.
- [2] Baksalary J. K., Hauke J. A further algebraic version of Cochran's theorem and matrix partial orderings // Linear Algebra Appl. — 1990. — Vol. 127. — P. 157—169.
- [3] Baksalary J. K., Pukelsheim F., Styan G. P. H. Some properties of matrix partial orderings // Linear Algebra Appl. — 1989. — Vol. 119. — P. 57—85.
- [4] Ben-Israel A., Greville T. Generalized Inverses: Theory and Applications. — New York: John Wiley and Sons, 1974.
- [5] Englefield M. J. The commuting inverses of a square matrix // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1966. — Vol. 62. — P. 667—671.
- [6] Hartwig R. E. How to partially order regular elements // Math. Japon. — 1980. — Vol. 25, no. 1. — P. 1—13.
- [7] Hartwig R. E., Mitra S. K. Partial orders based on outer inverses // Linear Algebra Appl. — 1982. — Vol. 176. — P. 3—20.

- [8] Mitra S. K. A new class of g -inverse of square matrices // *Sankhyā. Ser. A.* — 1963. — Vol. 30. — P. 323–330.
- [9] Mitra S. K. On group inverses and the sharp order // *Linear Algebra Appl.* — 1987. — Vol. 92. — P. 17–37.
- [10] Mitra S. K. Matrix partial orders through generalized inverses: Unified theory // *Linear Algebra Appl.* — 1991. — Vol. 148. — P. 237–263.
- [11] Nambooripad K. S. S. The natural partial order on a regular semigroup // *Proc. Edinburgh Math. Soc.* — 1980. — Vol. 23. — P. 249–260.
- [12] Robert P. On the group-inverse of a linear transformation // *J. Math. Anal. Appl.* — 1968. — Vol. 22. — P. 658–669.