Правило Крамера для кватернионных систем линейных уравнений

И. И. КИРЧЕЙ
Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Пидстрыгача НАН Украины
e-mail: kyrchei@lms.lviv.ua

УДК 512.643.2

Ключевые слова: тело кватернионов, некоммутативный определитель, обратная матрица, кватернионная система линейных уравнений, правило Крамера.

Аннотация

В работе введены новые определения детерминантных функционалов квадратных матриц над телом кватернионов. Обратная матрица над телом кватернионов представлена через аналог классической присоединённой. Получены правила Крамера для правых и левых кватернионных систем линейных уравнений.

Abstract

I. I. Kyrchei, Cramer's rule for quaternionic systems of linear equations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 4, pp. 67—94.

New definitions of determinant functionals over the quaternion skew field are given in this paper. The inverse matrix over the quaternion skew field is represented by analogues of the classical adjoint matrix. Cramer's rules for right and left quaternionic systems of linear equations have been obtained.

1. Введение

Для представления решения системы линейных уравнений над телом кватернионов $\mathbf{H}$ формулами, обобщающими правило Крамера, необходимо представить матрицу, обратную к основной матрице системы, через классическую присоединённую. Решающее значение для этого имеет определение детерминанта матрицы над телом $\mathbf{H}$. В целом, теорию определителей матриц с некоммутативными элементами (эти определители также называют некоммутативными детерминантами) можно условно разделить на три группы относительно методов их определения. Обозначим через $\mathrm{M}(n, \mathbf{K})$ кольцо матриц с элементами из кольца $\mathbf{K}$. Один из способов [7,10,11] определения детерминанта матрицы из $\mathrm{M}(n, \mathbf{K})$ следующий.

Определение 1.1. Пусть функционал $\mathrm{d}\colon \mathrm{M}(n, \mathbf{K}) \to \mathbf{K}$ удовлетворяет следующим аксиомам.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 4, с. 67—94.

Аксиома 1. $\mathrm{d}(\mathbf{A}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}$ вырожденная (необратимая).

Аксиома 2. $\mathrm{d}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathrm{d}(\mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}(\mathbf{B})$ для всех $\mathbf{B} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{K})$.

Аксиома 3. Если матрица $\mathbf{A}'$ получается из матрицы $\mathbf{A}$ путём прибавления к её произвольной строке, умноженной слева, другой её строки или к её произвольному столбцу, умноженному справа, другого её столбца, то $\mathrm{d}(\mathbf{A})' = \mathrm{d}(\mathbf{A})$.

Тогда значение функционала d называется определителем матрицы $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{K})$.

Примерами таких функционалов являются известные определители Дьедонне и Стади. В [7] доказано, что определители, которые удовлетворяют аксиомам 1, 2, 3, принимают значения из некоторого коммутативного подмножества тела. Для них не имеет смысла такое свойство обычных определителей, как разложение по минорам строки или столбца. Поэтому детерминантное представление обратной матрицы с помощью только таких определителей невозможно. В частности, определитель не используется для представления обратной матрицы в [6], где И. С. Понизовский обобщает определитель Дьедонне. Всё это заставляет вводить детерминантные функционалы, удовлетворяющие не всем вышеприведённым аксиомам. При этом в [11] аксиома 1 рассматривается как необходимая для определения детерминанта.

При другом подходе определитель квадратной матрицы над телом строится как рациональная функция от элементов матрицы. Наибольшего успеха здесь достигли И. М. Гельфанд и В. С. Ретах своей теорией квазидетерминантов [1,2]. Квадратной $(n \times n)$-матрице над телом ставится в соответствие $(n \times n)$-матрица квазидетерминантов. И. М. Гельфанд и В. С. Ретах переносят из коммутативного случая не само понятие определителя, а отношение определителя и миноров. Но поскольку квазидетерминанты также не могут быть разложены по минорам строки или столбца, для представления обратной матрицы классическая присоединённая матрица здесь также не используется.

Наконец, при третьем подходе детерминант матрицы с некоммутативными элементами определяется как альтернированная сумма $n!$ произведений элементов матрицы, но с определённым фиксированным порядком множителей в каждом из них. Е. Г. Мур был первый, кто достиг выполнения главной аксиомы 1 при таком определении некоммутативного детерминанта. Это было сделано не для всех квадратных матриц, а только для эрмитовых. Он определил детерминант эрмитовой матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ (т. е. $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$) над телом с инволюцией индукцией по n следующим образом (см. [11]):

$$\mathrm{Mdet}\,\mathbf{A} = \begin{cases} a_{11}, & n = 1, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} a_{ij} \,\mathrm{Mdet}\big(\mathbf{A}(i \to j)\big), & n > 1. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь

$$\varepsilon_{kj} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ -1, & i \neq j, \end{cases}$$

а через $\mathbf{A}(i \to j)$ обозначена матрица, которая получается из матрицы $\mathbf{A}$ последовательным применением замены j-го столбца i-м и вычёркивания i-х строки и столбца. Другое определение этого детерминанта представлено в [7] в терминах подстановок:

$$\operatorname{Mdet} \mathbf{A} = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} |\sigma| a_{n_{11} n_{12}} \cdot \ldots \cdot a_{n_{1l_1} n_{11}} \cdot a_{n_{21} n_{22}} \cdot \ldots \cdot a_{n_{rl_1} n_{r1}}.$$

Здесь S_n — симметрическая группа n элементов. Циклическое представление подстановки σ в нормальной форме имеет вид

$$\sigma = (n_{11} \ldots n_{1l_1})(n_{21} \ldots n_{2l_2}) \ldots (n_{r1} \ldots n_{rl_r}).$$

Однако не существовало никакого обобщения определения детерминанта Мура для произвольных квадратных матриц. Ф. Д. Дайсон отмечал важность этой задачи в работе [11]. Чен Лонгхуан предложил следующее решение этого вопроса в работах [8, 9]. Он определил детерминант квадратной матрицы над телом кватернионов $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ следующим образом:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{n_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot a_{i_s n_1} \cdot \ldots \cdot a_{n_r k_2} \cdot \ldots \cdot a_{k_l n_r},$$

$$\sigma = (n_1 i_2 \ldots i_s) \ldots (n_r k_2 \ldots k_r),$$

$$n_1 > i_2, i_3, \ldots, i_s, \ldots, \; n_r > k_2, k_3, \ldots, k_l, \quad n = n_1 > n_2 > \ldots > n_r \geqslant 1.$$

Несмотря на то, что такой определитель не удовлетворяет аксиоме 1, Л. Чен получил детерминантное представление обратной матрицы. Но его определитель также нельзя разложить по минорам строки или столбца (за исключением n-й строки). Поэтому он также не получил классическую присоединённую матрицу. Для матрицы $\mathbf{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ над $\mathbf{H}$, если $\|\mathbf{A}\| := \det(\mathbf{A}^* \mathbf{A}) \neq 0$, найдётся матрица $\mathbf{A}^{-1} = (b_{jk})$, где

$$\bar{b}_{jk} = \frac{1}{\|\mathbf{A}\|} \omega_{kj}, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\omega_{kj} = \det(\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1} \alpha_n \alpha_{j+1} \ldots \alpha_{n-1} \delta_k)^* (\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1} \alpha_n \alpha_{j+1} \ldots \alpha_{n-1} \alpha_j).$$

Здесь α_i — i-й столбец $\mathbf{A}$, δ_k — столбец высоты n с единицей в k-й строке и нулём в других. Чен определил $\|\mathbf{A}\| := \det(\mathbf{A}^* \mathbf{A})$ как двойной детерминант. Решение правой системы линейных уравнений $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \beta$ над $\mathbf{H}$, если $\|\mathbf{A}\| \neq 0$, представлено следующей формулой, которую автор называет крамеровской:

$$x_j = \|\mathbf{A}\|^{-1} \bar{\mathbf{D}}_j \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, n},$$

где

$$\mathbf{D}_j = \det \begin{pmatrix} \alpha_1^* \\ \vdots \\ \alpha_{j-1}^* \\ \alpha_n^* \\ \alpha_{j+1}^* \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^* \\ \beta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_{j-1} & \alpha_n & \alpha_{j+1} & \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_j \end{pmatrix}.$$

Здесь α_i — i-й столбец матрицы $\mathbf{A}$, α_i^* — i-я строка матрицы $\mathbf{A}^*$, β^* — n-размерная вектор-строка, сопряжённая к β.

В этой работе мы определяем столбцовые и строчные определители квадратной матрицы над телом кватернионов. (Впервые мы представили эти определения в [3].) Исследуются их свойства для произвольной квадратной матрицы и для эрмитовой матрицы. Получено детерминантное представление обратной матрицы над телом кватернионов через аналог классической присоединённой. Также получены обобщения формулы Крамера для решений правых и левых систем линейных уравнений.

2. Определения и основные свойства строчных и столбцовых определителей

Всюду в этой работе тело $\mathbf{H}$ является кватернионной алгеброй с делением над полем действительных чисел $\mathbf{R}$, порождённой четырьмя базисными элементами $1, i, j, k$ с известными соотношениями Гамильтона $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Пусть $q_n = w_n + x_n i + y_n j + z_n k \in \mathbf{H}$ для $n = (1, 2)$. *Сложение* и *вычитание* кватернионов определяется как

$$q_1 \pm q_2 = (w_1 \pm w_2) + (x_1 \pm x_2)i + (y_1 \pm y_2)j + (z_1 \pm z_2)k.$$

Умножение кватернионов определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} q_1 q_2 = (w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2) + (w_1 x_2 + x_1 w_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2)i + \\ + (w_1 y_2 - x_1 z_2 + y_1 w_2 + z_1 x_2)j + (w_1 z_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2 + z_1 w_2)k. \end{aligned}$$

Сопряжённый к кватерниону $q = w + xi + yj + zk$ определяется как $\bar{q} = w - xi - yj - zk$, при этом $\overline{p+q} = \bar{p} + \bar{q}$, $\overline{p \cdot q} = \bar{q} \cdot \bar{p}$, $\bar{\bar{q}} = q$ для всех $q, p \in \mathbf{H}$. *Норма* кватерниона определяется через $\mathrm{n}(q) = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$. Норма является действительной функцией и удовлетворяет условиям $\mathrm{n}(p \cdot q) = \mathrm{n}(p) \cdot \mathrm{n}(q)$ и $\mathrm{n}(\bar{q}) = \mathrm{n}(q)$. *След* кватерниона определяется как $\mathrm{t}(q) = q + \bar{q}$. След также является действительной функцией и удовлетворяет условию перестановочности $\mathrm{t}(q \cdot p) = \mathrm{t}(p \cdot q)$.

Определение 2.1. Пусть S_n — симметрическая группа на множестве $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Будем говорить, что подстановка $\sigma \in \mathrm{S}_n$ записана прямым произведением независимых циклов, если её запись в обычной двухрядной форме соответствует её разложению в независимые циклы, т. е.

$$\sigma = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & \ldots & n_{1l_1} & \ldots & n_{r1} & n_{r2} & \ldots & n_{rl_r} \\ n_{12} & n_{13} & \ldots & n_{11} & \ldots & n_{r2} & n_{r3} & \ldots & n_{r1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Определение 2.2. Будем говорить, что представление подстановки σ произведением независимых циклов является упорядоченным слева, если элементы, которые замыкают каждый из её независимых циклов, записываются первыми слева в каждом из циклов. Это означает, что если запись подстановки σ прямым произведением независимых циклов имеет вид (2), то её упорядоченное слева разложение в независимые циклы записывается в виде

$$\sigma = (n_{11} n_{12} \ldots n_{1l_1})(n_{21} n_{22} \ldots n_{2l_2}) \ldots (n_{r1} n_{r2} \ldots n_{rl_r}).$$

Определение 2.3. Будем говорить, что представление подстановки σ произведением независимых циклов является упорядоченным справа, если элементы, которые замыкают каждый из её независимых циклов, записываются первыми справа в каждом из циклов. Это означает, что если запись подстановки σ прямым произведением независимых циклов имеет вид (2), то её упорядоченное справа разложение в независимые циклы записывается в виде

$$\sigma = (n_{12} \ldots n_{1l_1} n_{11})(n_{22} \ldots n_{2l_2} n_{21}) \ldots (n_{r2} \ldots n_{rl_r} n_{r1}).$$

Определение 2.4. Строчным определителем по i-й строке квадратной матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ (для любого $i = \overline{1, n}$) будем называть альтернированную сумму $n!$ мономов, в каждом из которых подстановка $\sigma \in \mathrm{S}_n$ индексов элементов в обычной форме записана прямым произведением независимых циклов. Если подстановка чётная, то моном берётся со знаком «плюс», а если нечётная, то со знаком «минус». Таким образом,

$$\mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A} = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} (-1)^{n-r} a_{i\, i_{k_1}} a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \ldots a_{i_{k_1+l_1} i} \ldots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \ldots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}}.$$

Здесь S_n — симметрическая группа на множестве I_n и упорядоченное слева разложение подстановки σ в независимые циклы имеет вид

$$\sigma = (i\, i_{k_1} i_{k_1+1} \ldots i_{k_1+l_1})(i_{k_2} i_{k_2+1} \ldots i_{k_2+l_2}) \ldots (i_{k_r} i_{k_r+1} \ldots i_{k_r+l_r}).$$

При этом первый слева цикл начинается слева индексом i, а все следующие независимые циклы удовлетворяют условиям

$$i_{k_2} < i_{k_3} < \ldots < i_{k_r}, \quad i_{k_t} < i_{k_t+s} \ \text{ для всех } \ t = \overline{2, r} \ \text{ и } \ s = \overline{1, l_t}.$$

Пусть $\mathbf{A}^{ij}$ — подматрица матрицы $\mathbf{A}$, которую мы получим, вычеркнув i-ю строку и j-й столбец. Через $\mathbf{a}_{.j}$ обозначим j-й столбец, а через $\mathbf{a}_{i.}$ — i-ю строку матрицы $\mathbf{A}$. Пусть $\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{b})$ — матрица, которая получается из матрицы $\mathbf{A}$ заменой её j-го столбца столбцом $\mathbf{b}$, а $\mathbf{A}_{i.}(\mathbf{b})$ — матрица, которая получается из матрицы $\mathbf{A}$ заменой её i-й строки строкой $\mathbf{b}$. В следующей лемме $\mathrm{rdet}_i\,\mathbf{A}$ для всех $i=\overline{1,n}$ разлагается по элементам i-й строки, кроме того, вычисление строчного определителя матрицы n-го порядка сводится к вычислению строчного определителя матрицы на порядок ниже.

Лемма 2.1. *Пусть R_{ij} — правое алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы $\mathbf{A}=(a_{ij})\in \mathrm{M}(n,\mathbf{H})$, т. е. $\mathrm{rdet}_i\,\mathbf{A}=\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot R_{ij}$ для всех $i=\overline{1,n}$. Тогда*

$$R_{ij}=\begin{cases}-\,\mathrm{rdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}^{ii}(\mathbf{a}_{.i}), & i\neq j,\\ \mathrm{rdet}_k\,\mathbf{A}^{ii}, & i=j,\end{cases}$$

где матрица $\mathbf{A}_{.j}^{ii}(\mathbf{a}_{.i})$ получается из $\mathbf{A}$ последовательным применением замены j-го столбца i-м и вычёркивания i-х строки и столбца и $k=\min\{I_n\setminus\{i\}\}$.

Доказательство. Докажем сначала, что $R_{ii}=\mathrm{rdet}_k\,\mathbf{A}^{ii}$, где $k=\min\{I_n\setminus\{i\}\}$. Если $i=1$, тогда $\mathrm{rdet}_1\,\mathbf{A}=a_{11}\cdot R_{11}+a_{12}\cdot R_{12}+\ldots+a_{1n}\cdot R_{1n}$. Рассмотрим те мономы определителя $\mathrm{rdet}_1\,\mathbf{A}$, которые начинаются слева множителем a_{11}, а именно

$$a_{11}\cdot R_{11}=\sum_{\tilde\sigma\in \mathrm{S}_n}(-1)^{n-r}a_{11}a_{2\,i_{k_2}}\ldots a_{i_{k_2+l_2}2}\ldots a_{i_{k_r}i_{k_r+1}}\ldots a_{i_{k_r+l_r}i_{k_r}},$$
$$\tilde\sigma=(1)(2\,i_{k_2}\ldots i_{k_2+l_2})\ldots(i_{k_r}i_{k_r+1}\ldots i_{k_r+l_r}).$$

Вынося общий множитель a_{11} слева за знак суммы, получим

$$a_{11}R_{11}=a_{11}\sum_{\tilde\sigma_1\in \mathrm{S}_{n-1}}(-1)^{n-1-(r-1)}a_{2\,i_{k_2}}\ldots a_{i_{k_2+l_2}2}\ldots a_{i_{k_r}i_{k_r+1}}\ldots a_{i_{k_r+l_r}i_{k_r}},$$
$$\tilde\sigma_1=(2\,i_{k_2}\ldots i_{k_2+l_2})\ldots(i_{k_r}i_{k_r+1}\ldots i_{k_r+l_r}).$$

Здесь S_{n-1} — симметричная группа на множестве $I_n\setminus\{1\}$. Количество множителей в каждом мономе суммы и количество независимых циклов уменьшились на единицу. Поскольку каждый моном начинается слева элементом второй строки и среди её множителей отсутствуют элементы первой строки и первого столбца матрицы $\mathbf{A}$, имеем

$$R_{11}=\sum_{\tilde\sigma_1\in \mathrm{S}_{n-1}}(-1)^{n-1-(r-1)}a_{2\,i_{k_2}}\ldots a_{i_{k_2+l_2}2}\ldots a_{i_{k_r+l_r}i_{k_r}}=\mathrm{rdet}_2\,\mathbf{A}^{11}. \tag{3}$$

Пусть теперь $i\neq 1$, тогда

$$\mathrm{rdet}_i\,\mathbf{A}=a_{i1}\cdot R_{i1}+a_{i2}\cdot R_{i2}+\ldots+a_{in}\cdot R_{in}. \tag{4}$$

Рассмотрим те мономы определителя $\mathrm{rdet}_i\,\mathbf{A}$, которые начинаются слева множителем a_{ii}:

$$a_{ii}\cdot R_{ii}=\sum_{\widehat\sigma\in \mathrm{S}_n}(-1)^{n-r}a_{ii}a_{1\,i_{k_2}}\ldots a_{i_{k_2+l_2}1}\ldots a_{i_{k_r}i_{k_r+1}}\ldots a_{i_{k_r+l_r}i_{k_r}},$$
$$\widehat\sigma=(i)(1\,i_{k_2}\ldots i_{k_2+l_2})\ldots(i_{k_r}i_{k_r+1}\ldots i_{k_r+l_r}).$$

Снова вынося общий множитель a_{ii} слева за знак суммы, получим

$$a_{ii}\cdot R_{ii} = a_{ii}\cdot \sum_{\widehat{\sigma}_1\in \widehat{\mathrm{S}}_{n-1}} (-1)^{n-1-(r-1)} a_{1\, i_{k_2}} \dots a_{i_{k_2+l_2} 1} \dots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}},$$

$$\widehat{\sigma}_1 = (1\, i_{k_2} \dots i_{k_2+l_2}) \dots (i_{k_r} i_{k_r+1} \dots i_{k_r+l_r}).$$

Здесь $\widehat{\mathrm{S}}_{n-1}$ — симметричная группа на множестве $I_n \setminus \{i\}$. Количество множителей и количество независимых циклов в каждом мономе суммы R_{ii} снова уменьшились на единицу. Каждый из мономов начинается слева элементом первой строки, а среди её множителей отсутствуют элементы i-й строки и i-го столбца матрицы $\mathbf{A}$, поэтому

$$R_{ii} = \sum_{\widehat{\sigma}_1\in \widehat{\mathrm{S}}_{n-1}} (-1)^{n-1-(r-1)} a_{1\, i_{k_2}} \dots a_{i_{k_2+l_2} 1} \dots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} = \mathrm{rdet}_1\, \mathbf{A}^{ii}. \qquad (5)$$

Объединяя выражения (3) и (5), получим, что $R_{ii} = \mathrm{rdet}_k\, \mathbf{A}^{ii}$ для всех $i = \overline{1,n}$ при $k = \min\{I_n \setminus \{i\}\}$.

Пусть теперь $i \neq j$. Рассмотрим те мономы определителя $\mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A}$ (для всех $i = \overline{1,n}$) из формулы (4), которые начинаются слева множителем a_{ij}:

$$a_{ij}\cdot R_{ij} = \sum_{\bar{\sigma}\in \mathrm{S}_n} (-1)^{n-r} a_{ij} a_{j i_{k_1}} \dots a_{i_{k_1+l_1} i} \dots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \dots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} =$$

$$= -a_{ij}\cdot \sum_{\bar{\sigma}\in \mathrm{S}_n} (-1)^{n-r-1} a_{j i_{k_1}} \dots a_{i_{k_1+l_1} i} \dots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \dots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}},$$

$$\bar{\sigma} = (i\, j\, i_{k_1} \dots i_{k_1+l_1}) \dots (i_{k_r} i_{k_r+1} \dots i_{k_r+l_r}) \quad \text{для всех} \quad r = \overline{1, n-1}.$$

Обозначим $\tilde{a}_{i_{k_1+l_1} j} = a_{i_{k_1+l_1} i}$ для всех $i_{k_1+l_1} \in I_n$. Тогда

$$a_{ij}\cdot R_{ij} = -a_{ij} \sum_{\bar{\sigma}_1\in \widehat{\mathrm{S}}_{n-1}} (-1)^{n-r-1} a_{j i_{k_1}} \dots \tilde{a}_{i_{k_1+l_1} j} \dots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \dots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}},$$

$$\bar{\sigma}_1 = (j\, i_{k_1} \dots i_{k_1+l_1}) \dots (i_{k_r} i_{k_r+1} \dots i_{k_r+l_r}) \quad \text{для всех} \quad r = \overline{1, n-1}.$$

Количество множителей в каждом мономе суммы уменьшилось на единицу. Среди элементов подстановки $\bar{\sigma}_1$ любого из мономов отсутствует индекс i, и эта подстановка в силу (4), очевидно, удовлетворяет условию определения 2.4 для строчного определителя по j-й строке матрицы $\mathbf{A}^{ii}_{.j}(\mathbf{a}_{.i})$, которую мы получим из матрицы $\mathbf{A}$ последовательным применением замены j-го столбца i-м и вычёркивания i-х строки и столбца. Таким образом,

$$\sum_{\bar{\sigma}_1\in \widehat{\mathrm{S}}_{n-1}} (-1)^{n-r-1} a_{j i_{k_1}} \dots \tilde{a}_{i_{k_1+l_1} j} \dots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} = \mathrm{rdet}_j\, \mathbf{A}^{ii}_{.j}(\mathbf{a}_{.i}).$$

Поэтому если $i \neq j$, то $R_{ij} = \mathrm{rdet}_j\, \mathbf{A}^{ii}_{.j}(\mathbf{a}_{.i})$. □

Определение 2.5. Столбцовым определителем по j-му столбцу квадратной матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ будем называть альтернированную сумму $n!$ мономов, в каждом из которых подстановка $\sigma \in \mathrm{S}_n$ индексов элементов в обычной форме записана прямым произведением независимых циклов. Если подстановка чётная, то моном берётся со знаком «плюс», а если нечётная, то со знаком «минус». Таким образом,

$$\operatorname{cdet}_j \mathbf{A} = \sum_{\tau \in \mathrm{S}_n} (-1)^{n-r} a_{j_{k_r} j_{k_r+l_r}} \dots a_{j_{k_r+1} i_{k_r}} \dots a_{j j_{k_1+l_1}} \dots a_{j_{k_1+1} j_{k_1}} a_{j_{k_1} j}.$$

Здесь S_n — симметрическая группа на множестве $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$ и упорядоченное справа разложение подстановки τ в независимые циклы имеет вид

$$\tau = (j_{k_r+l_r} \dots j_{k_r+1} j_{k_r}) \dots (j_{k_2+l_2} \dots j_{k_2+1} j_{k_2})(j_{k_1+l_1} \dots j_{k_1+1} j_{k_1} j).$$

При этом первый справа цикл начинается справа индексом j, а все следующие независимые циклы удовлетворяют условиям

$$j_{k_2} < j_{k_3} < \dots < j_{k_r}, \quad j_{k_t} < j_{k_t+s} \text{ для всех } t = \overline{2, r} \text{ и } s = \overline{1, l_t}.$$

Замечание 2.1. Особенностью столбцовых определителей является то, что при непосредственном их вычислении множители каждого из мономов записываются справа налево.

Лемма 2.2. *Пусть L_{ij} — левое алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$, а именно $\operatorname{cdet}_j \mathbf{A} = \sum\limits_{i=1}^{n} L_{ij} \cdot a_{ij}$ для всех $j = \overline{1, n}$. Тогда*

$$L_{ij} = \begin{cases} -\operatorname{cdet}_i \mathbf{A}_{i.}^{jj}(\mathbf{a}_{j.}), & i \neq j, \\ \operatorname{cdet}_k \mathbf{A}^{jj}, & i = j, \end{cases}$$

где матрица $\mathbf{A}_{i.}^{jj}(\mathbf{a}_{j.})$ получается из $\mathbf{A}$ последовательным применением замены i-й строки j-й и вычёркивания j-х строки и столбца, $k = \min\{J_n \setminus \{j\}\}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.1

Замечание 2.2. Очевидно, что каждому моному любого определённого выше детерминанта квадратной матрицы отвечает моном любого другого детерминанта, строчного или столбцового, такой что оба они имеют одинаковый знак, состоят из одних и тех же множителей (элементов матрицы) и отличаются только порядком их размещения. Кроме того, если элементы матрицы коммутируют, то

$$\operatorname{rdet}_1 \mathbf{A} = \dots = \operatorname{rdet}_n \mathbf{A} = \operatorname{cdet}_1 \mathbf{A} = \dots = \operatorname{cdet}_n \mathbf{A}.$$

Рассмотрим основные свойства строчного и столбцового детерминанта произвольной квадратной матрицы над телом $\mathbf{H}$, доказательства которых следуют непосредственно из определений.

Теорема 2.1. *Если одна из строк (столбцов) матрицы $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ состоит из нулей, то $\operatorname{rdet}_i \mathbf{A} = 0$, $\operatorname{cdet}_i \mathbf{A} = 0$ для всех $i = \overline{1, n}$.*

Теорема 2.2. *Если i-я строка матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ умножается слева на любое $b \in \mathbf{H}$, то $\operatorname{rdet}_i \mathbf{A}_{i.}(b \cdot \mathbf{a}_{i.}) = b \cdot \operatorname{rdet}_i \mathbf{A}$ для всех $i = \overline{1, n}$.*

Теорема 2.3. *Если j-й столбец матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ умножается справа на любое $b \in \mathbf{H}$, то $\operatorname{cdet}_j \mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.j} \cdot b) = \operatorname{cdet}_j \mathbf{A} \cdot b$ для всех $j = \overline{1, n}$.*

Теорема 2.4. *Если для* $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ *найдётся* $k \in I_n$, *такое что* $a_{kj} = b_j + c_j$ *для всех* $j = \overline{1, n}$, *то для любого* $i = \overline{1, n}$

$$\mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A} = \mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A}_{k.}(\mathbf{b}) + \mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A}_{k.}(\mathbf{c}),$$
$$\mathrm{cdet}_i\, \mathbf{A} = \mathrm{cdet}_i\, \mathbf{A}_{k.}(\mathbf{b}) + \mathrm{cdet}_i\, \mathbf{A}_{k.}(\mathbf{c}),$$

где $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$.

Теорема 2.5. *Если для* $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ *найдётся* $k \in J_n$, *такое что* $a_{ik} = b_i + c_i$ *для всех* $i = \overline{1, n}$, *то для любого* $j = \overline{1, n}$

$$\mathrm{rdet}_j\, \mathbf{A} = \mathrm{rdet}_j\, \mathbf{A}_{.k}(\mathbf{b}) + \mathrm{rdet}_j\, \mathbf{A}_{.k}(\mathbf{c}),$$
$$\mathrm{cdet}_j\, \mathbf{A} = \mathrm{cdet}_j\, \mathbf{A}_{.k}(\mathbf{b}) + \mathrm{cdet}_j\, \mathbf{A}_{.k}(\mathbf{c}),$$

где $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^{\mathrm{T}}$.

Теорема 2.6. *Пусть* $\mathbf{A}^*$ *— матрица, сопряжённая к матрице* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$. *Тогда* $\mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A}^* = \overline{\mathrm{cdet}_i\, \mathbf{A}}$ *для любого* $i = \overline{1, n}$.

Замечание 2.3. Из-за невыполнения аксиомы 1 для столбцовых и строчных определителей произвольной квадратной матрицы над телом $\mathbf{H}$ и из-за того, что эти детерминанты определены подобно определителю комплексной матрицы, будем рассматривать их как пред-определители.

3. Определитель эрмитовой матрицы

Лемма 3.1. *Пусть* T_n *— сумма всех* 2^n *возможных произведений, каждый из* n *множителей которых является или* $h_i \in \mathbf{H}$, *или* $\bar{h}_i$ $(i = \overline{1, n})$, *причём возрастание индекса* i *внутри произведения сохраняется*:

$$T_n = h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_n + \bar{h}_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_n + \ldots + \bar{h}_1 \cdot \bar{h}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{h}_n.$$

Тогда $T_n = \mathrm{t}(h_1)\mathrm{t}(h_2)\ldots\mathrm{t}(h_n)$.

Доказательство. Количество 2^n слагаемых суммы определяется как число упорядоченных комбинаций из n элементов, каждый из которых может принимать два значения.

Доказательство проводим методом индукции по n.

1. Если $n = 1$, тогда $T_1 = \bar{h}_1 + h_1 = \mathrm{t}(h_1)$.

2. Допустим, что утверждение верно для $n - 1$:

$$T_{n-1} = h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_{n-1} + \bar{h}_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_{n-1} + \ldots + \bar{h}_1 \cdot \bar{h}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{h}_{n-1} = \\ = \mathrm{t}(h_1)\mathrm{t}(h_2)\ldots\mathrm{t}(h_{n-1}).$$

3. Теперь покажем, что оно является верным и для n. Имеем

$$T_n = h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_n + \bar{h}_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_n + \ldots + \bar{h}_1 \cdot \bar{h}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{h}_n.$$

Вынося общие справа множители $\bar{h}_n$ или h_n соответственно, получим

$$T_n = T_{n-1} \cdot h_n + T_{n-1} \cdot \bar{h}_n = T_{n-1} \cdot (h_n + \bar{h}_n) = T_{n-1} \cdot \mathrm{t}(h_n) = \\ = \mathrm{t}(h_1) \cdot \mathrm{t}(h_2) \cdot \ldots \cdot \mathrm{t}(h_{n-1}) \cdot \mathrm{t}(h_n). \quad \square$$

Теорема 3.1. *Если* $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ — *эрмитова матрица, то*

$$\mathrm{rdet}_1 \mathbf{A} = \ldots = \mathrm{rdet}_n \mathbf{A} = \mathrm{cdet}_1 \mathbf{A} = \ldots = \mathrm{cdet}_n \mathbf{A} \in \mathbf{R}.$$

Доказательство. Заметим, что элементы главной диагонали эрмитовой матрицы над телом кватернионов — действительные числа, а элементы, симметричные относительно главной диагонали, являются сопряжёнными. Разобьём множество мономов определителя $\mathrm{rdet}_i \mathbf{A}$ $(i = \overline{1, n})$ на два подмножества. К первому подмножеству отнесём те мономы, индексы множителей которых составляют подстановки, содержащие независимые циклы длины не более чем 2. Ко второму подмножеству отнесём все остальные мономы. Множители, индексы которых образуют циклы длины 1, — это элементы главной диагонали эрмитовой матрицы, и они являются действительными числами. Если индексы элементов матрицы $\mathbf{A}$ образуют цикл длины 2, тогда они являются сопряжёнными, $a_{i_k i_{k+1}} = \bar{a}_{i_{k+1} i_k}$, и их произведение принадлежит полю $\mathbf{R}$:

$$a_{i_k i_{k+1}} \cdot a_{i_{k+1} i_k} = \bar{a}_{i_{k+1} i_k} \cdot a_{i_{k+1} i_k} = \mathrm{n}(a_{i_{k+1} i_k}) \in \mathbf{R}.$$

Итак, все мономы из первого подмножества принимают действительные значения.

Рассмотрим теперь произвольный моном d из второго подмножества. Пусть индексы его множителей составляют подстановку, которая содержит r независимых циклов. Обозначим $i_{k_1} := i$. Имеем

$$d = (-1)^{n-r} a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \ldots a_{i_{k_1+l_1} i_{k_1}} a_{i_{k_2} i_{k_2+1}} \ldots a_{i_{k_2+l_2} i_{k_2}} \ldots a_{i_{k_m} i_{k_m+1}} \ldots \times \\ \times a_{i_{k_m+l_m} i_{k_m}} \ldots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \ldots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} = (-1)^{n-r} h_1 h_2 \ldots h_m \ldots h_r, \quad (6)$$

где $h_s = a_{i_{k_s} i_{k_s+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_s+l_s} i_{k_s}}$ $(s = \overline{1, r})$, $m \in \{1, \ldots, r\}$. Если $l_s = 1$, то $h_s = a_{i_{k_s} i_{k_s+1}} a_{i_{k_s+1} i_{k_s}} = \mathrm{n}(a_{i_{k_s} i_{k_s+1}}) \in \mathbf{R}$, и если $l_s = 0$, то $h_s = a_{i_{k_s} i_{k_s}} \in \mathbf{R}$. Если $l_s = \overline{0, 1}$ для любого $s = \overline{1, r}$, то мы получим моном первого подмножества. Пусть найдётся $s \in I_n$, для которого $l_s \geqslant 2$, тогда

$$\bar{h}_s = \overline{a_{i_{k_s} i_{k_s+1}} \ldots a_{i_{k_s+l_s} i_{k_s}}} = \overline{a_{i_{k_s+l_s} i_{k_s}}} \ldots \overline{a_{i_{k_s} i_{k_s+1}}} = a_{i_{k_s} i_{k_s+l_s}} \ldots a_{i_{k_s+1} i_{k_s}}.$$

Обозначим через $\sigma_s(i_{k_s})$ независимый цикл, который образуют индексы монома d и которому отвечает множитель h_s: $\sigma_s(i_{k_s}) := (i_{k_s} i_{k_s+1} \ldots i_{k_s+l_s})$. Тогда $\sigma_s^{-1}(i_{k_s}) = (i_{k_s} i_{k_s+l_s} i_{k_s+1} \ldots i_{k_s+1})$ — независимый цикл, обратный к $\sigma_s(i_{k_s})$, которому отвечает множитель $\bar{h}_s$. На множестве всех мономов определителя $\mathrm{rdet}_i \mathbf{A}$ рассмотрим мономы, индексы которых образуют подстановки, в обычной форме записанные прямым произведением независимых циклов $\sigma_s(i_{k_s})$ или $\sigma_s^{-1}(i_{k_s})$ с сохранением их последовательность по s от 1 к r, а в нормальной форме упорядоченные слева согласно определению 2.4. По лемме 3.1 вместе с мономом d существуют ещё $2^p - 1$ таких мономов ($p = r - \rho$, а ρ — количество циклов длины 1 и 2), и сумма C_1 этих мономов вместе с d равна

$$C_1 = (-1)^{n-r} \alpha \mathrm{t}(h_{\nu_1}) \ldots \mathrm{t}(h_{\nu_p}) \in \mathbf{R}.$$

Здесь $\alpha \in \mathbf{R}$ — произведение множителей, индексы которых составляют циклы длины 1 и 2, $\nu_k \in \{1, \ldots, r\}$ для $k = \overline{1, p}$. Таким образом, для произвольного монома второго подмножества определителя $\mathrm{rdet}_i \mathbf{A}$ среди других его мономов можем выбрать ещё $2^p - 1$ моном, для которых их сумма вместе с выбранным принимает действительное значение. Следовательно, значение $\mathrm{rdet}_i \mathbf{A}$ также принадлежит полю $\mathbf{R}$.

Докажем теперь равенство между собой всех строчных определителей матрицы $\mathbf{A}$. Рассмотрим произвольный $\mathrm{rdet}_j \mathbf{A}$ $(j \neq i)$. Снова разобьём множество мономов определителя $\mathrm{rdet}_j \mathbf{A}$ на два подмножества по тому же правилу, что и для $\mathrm{rdet}_i \mathbf{A}$. Поскольку мономы первого подмножества являются произведениями действительных множителей, то каждому моному первого подмножества строчного определителя $\mathrm{rdet}_i \mathbf{A}$ отвечает равный ему моном первого подмножества строчного определителя $\mathrm{rdet}_j \mathbf{A}$. Среди мономов из второго подмножества определителя $\mathrm{rdet}_j \mathbf{A}$, таких что индексы их множителей составляют подстановки из r независимых циклов, можно найти моном d_1, состоящий из тех же множителей, что и d, но расположенных в другом порядке. Рассмотрим все возможные случаи расположения множителей в мономе d_1.

1. Если индексы его множителей составляют подстановку из таких же r независимых циклов, но отличающуюся от d порядком размещения циклов, то

$$d_1 = (-1)^{n-r} \alpha h_\mu \ldots h_\lambda,$$

где $\{\mu, \ldots, \lambda\} = \{\nu_1, \ldots, \nu_p\}$. Среди мономов второго подмножества определителя $\mathrm{rdet}_j \mathbf{A}$ по лемме 3.1 существуют ещё $2^p - 1$ мономов, таких что каждый из них является произведением p множителей h_s либо $\overline{h}_s$ для $s \in \{\mu, \ldots, \lambda\}$, умноженных на $(-1)^{n-r}\alpha$. Для суммы C_2 этих мономов и монома d_1 получим

$$C_2 = (-1)^{n-r} \alpha \mathrm{t}(h_\mu) \ldots \mathrm{t}(h_\lambda) = (-1)^{n-r} \alpha \mathrm{t}(h_{\nu_1}) \ldots \mathrm{t}(h_{\nu_p}) = C_1.$$

2. Пусть теперь индексы множителей монома d_1 составляют подстановку из r независимых циклов, отличающихся от циклов индексов монома d не только порядком их размещения, но и тем, что индекс j находится внутри некоторого цикла подстановки индексов монома d. Пусть $j = i_{k_m+q}$, тогда d_1 можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} d_1 &= (-1)^{n-r} a_{i_{k_m+q} i_{k_m+q+1}} \ldots a_{i_{k_m+l_m} i_{k_m}} a_{i_{k_m} i_{k_m+1}} \ldots \times \\ &\times a_{i_{k_m+q-1} i_{k_m+q}} a_{i_{k_\mu} i_{k_\mu+1}} \ldots a_{i_{k_\mu+l_\mu} i_{k_\mu}} \ldots a_{i_{k_\lambda} i_{k_\lambda+1}} \ldots a_{i_{k_\lambda+l_\lambda} i_{k_\lambda}} = \\ &= (-1)^{n-r} \alpha \tilde{h}_m h_\mu \ldots h_\lambda, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\{m, \mu, \ldots, \lambda\} = \{\nu_1, \ldots, \nu_p\}$. Каждому множителю из (7), за исключением $\tilde{h}_m$, отвечает равный ему множитель монома d из (6). Из перестановочности следа вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathrm{t}(\tilde{h}_m) &= \mathrm{t}(a_{i_{k_m+q} i_{k_m+q+1}} \ldots a_{i_{k_m+l_m} i_{k_m}} a_{i_{k_m} i_{k_m+1}} \ldots a_{i_{k_m+q-1} i_{k_m+q}}) = \\ &= \mathrm{t}(a_{i_{k_m} i_{k_m+1}} \ldots a_{i_{k_m+q-1} i_{k_m+q}} a_{i_{k_m+q} i_{k_m+q+1}} \ldots a_{i_{k_m+l_m} i_{k_m}}) = \mathrm{t}(h_m). \end{aligned}$$

Тогда аналогично предыдущему случаю по лемме 3.1 получим

$$C_2 = (-1)^{n-r}\alpha\mathrm{t}(\tilde{h}_m)\mathrm{t}(h_\mu)\ldots\mathrm{t}(h_\lambda) = (-1)^{n-r}\alpha\mathrm{t}(h_{\nu_1})\ldots\mathrm{t}(h_m)\ldots\mathrm{t}(h_{\nu_p}) = C_1.$$

3. Если в отличие от случая 1 моном d_1 отличается от d не только порядком размещения циклов, но и тем, что индекс i не начинает один из циклов подстановки, тогда применим свойство перестановочности следа к произведению элементов этого цикла. Как и в предыдущем случае, среди мономов второго подмножества определителя $\mathrm{rdet}_j\,\mathbf{A}$ существуют такие, что по лемме 3.1 их сумма равна сумме соответствующих мономов определителя $\mathrm{rdet}_i\,\mathbf{A}$. Очевидно, что это же заключение получим и при объединении предыдущих случаев, тогда свойство перестановочности следа применим дважды.

Итак, в любом случае каждой сумме 2^p соответствующих мономов второго подмножества определителя $\mathrm{rdet}_j\,\mathbf{A}$ отвечает равная ей сумма 2^p мономов определителя $\mathrm{rdet}_i\,\mathbf{A}$. Здесь p — количество циклов длины более чем 2 в каждом из мономов. Таким образом,

$$\mathrm{rdet}_i\,\mathbf{A} = \mathrm{rdet}_j\,\mathbf{A} \in \mathbf{R} \quad \text{для всех} \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Докажем теперь равенство $\mathrm{cdet}_i\,\mathbf{A} = \mathrm{rdet}_i\,\mathbf{A}$ для всех $i = \overline{1, n}$. Снова разобьём множество мономов определителя $\mathrm{cdet}_i\,\mathbf{A}$ на два подмножества по тому же правилу, что и для $\mathrm{rdet}_i\,\mathbf{A}$. Каждый моном из первого подмножества определителя $\mathrm{cdet}_i\,\mathbf{A}$ равен соответствующему моному определителя $\mathrm{rdet}_i\,\mathbf{A}$, поскольку оба они содержат одинаковые действительные множители (или элементы главной диагонали, или нормы элементов матрицы). Среди мономов из второго подмножества определителя $\mathrm{cdet}_i\,\mathbf{A}$, таких что индексы их множителей составляют подстановки из r независимых циклов, можно найти моном d_2, состоящий из тех же множителей, что и моном d из (6), но их последовательность упорядочена справа в соответствии с определением столбцового детерминанта. Пусть ρ — количество циклов длины 1 и 2 и $p = r - \rho$, тогда

$$\begin{aligned} d_2 = (-1)^{n-r} a_{i_{k_r} i_{k_r+l_r}} \ldots a_{i_{k_r+1} i_{k_r}} \ldots a_{i_{k_2} i_{k_2+l_2}} \ldots a_{i_{k_2+1} i_{k_2}} \times \\ \times a_{i i_{k_1+l_1}} \ldots a_{i_{k_1} i} = (-1)^{n-r}\alpha h_{\tau_p} \ldots h_{\tau_1}, \end{aligned}$$

где α — произведение множителей, индексы которых образуют циклы длины 1 и 2, и

$$h_{\tau_s} = a_{i_{k_s} i_{k_s+l_s}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_s+1} i_{k_s}} = \overline{a_{i_{k_s} i_{k_s+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_s+l_s} i_{k_s}}} = \bar{h}_{\nu_s} \quad \text{для всех} \quad s = \overline{1, p}.$$

Среди мономов второго подмножества рассмотрим ещё $2^p - 1$ мономов, которые являются произведением p множителей h_s либо $\bar{h}_s$, умноженных на $(-1)^{n-r}\alpha$ и сохраняющих их упорядоченность по s ($s = \overline{1, p}$). Учитывая коммутативность действительных чисел, найдём согласно лемме 3.1 сумму C_3 этих мономов вместе с d_2:

$$\begin{aligned} C_3 = (-1)^{n-r}\alpha\mathrm{t}(h_{\tau_p})\ldots\mathrm{t}(h_{\tau_1}) = (-1)^{n-r}\alpha\mathrm{t}(\bar{h}_{\nu_p})\ldots\mathrm{t}(\bar{h}_{\nu_1}) = \\ = (-1)^{n-r}\alpha\mathrm{t}(h_{\nu_1})\ldots\mathrm{t}(h_{\nu_p}) = C_1. \end{aligned}$$

Итак, каждая сумма 2^p соответствующих мономов второго подмножества определителя $\mathrm{cdet}_i\,\mathbf{A}$ равна сумма 2^p мономов определителя $\mathrm{rdet}_i\,\mathbf{A}$, и наоборот.

Таким образом, $\mathrm{cdet}_i\,\mathbf{A} = \mathrm{rdet}_i\,\mathbf{A} \in \mathbf{R}$ для всех $i = \overline{1,n}$. □

Замечание 3.1. Поскольку все столбцовые и строчные определители эрмитовой матрицы над телом $\mathbf{H}$ равны между собой, то для неё можем однозначно ввести понятие определителя:

$$\det \mathbf{A} := \mathrm{rdet}_i\,\mathbf{A} = \mathrm{cdet}_i\,\mathbf{A} \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1,n}.$$

Замечание 3.2. Представляя детерминант эрмитовой матрицы как строчный определитель по произвольной i-й строке, по лемме 3.1 имеем

$$\det \mathbf{A} = -\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} a_{ij}\cdot \mathrm{rdet}_j\,\mathbf{A}^{ii}_{.j}(\mathbf{a}_{.i}) + a_{ii}\cdot \mathrm{rdet}_k\,\mathbf{A}^{ii}, \quad k = \min\{I_n \setminus \{i\}\}. \tag{8}$$

Сравнивая выражения (1) и (8) для эрмитовой матрицы $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n,\mathbf{H})$, с очевидностью получаем, что введённый строчный определитель для эрмитовой матрицы совпадает с детерминантом Мура, а строчные и столбцовые определители для произвольных матриц являются его обобщением на множестве произвольных квадратных матриц.

4. Свойства столбцовых и строчных определителей эрмитовой матрицы над телом кватернионов

Теорема 4.1. *Если матрица $\mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ получается из эрмитовой $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n,\mathbf{H})$ заменой j-й строки её i-й строкой, то $\mathrm{rdet}_j\,\mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.}) = 0$ для всех $i,j = \overline{1,n}$, $i \neq j$.*

Доказательство. Будем считать, что эрмитова матрица $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n,\mathbf{H})$ имеет порядок выше третьего. Для эрмитовых матриц второго и третьего порядков утверждение теоремы легко доказывается непосредственной проверкой.

Рассмотрим произвольный моном d определителя $\mathrm{rdet}_j\,\mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$. Пусть индексы его множителей составляют подстановку, которая содержит r независимых циклов, и обозначим $i =: i_s$. Рассмотрим все возможные случаи размещения элемента i_s-й строки множителем в произведении d.

1. Пусть элемент i_s-й строки размещён в мономе d так, что индекс i_s начинает некоторый независимый цикл:

$$d = (-1)^{n-r} a_{ji_1}\ldots a_{i_k j} u_1 \ldots u_\rho a_{i_s i_{s+1}} \ldots a_{i_{s+m} i_s} v_1 \ldots v_p, \tag{9}$$

где u_τ и v_t для $\tau = \overline{1,\rho}$, $t = \overline{1,p}$, $\rho + p = r - 2$, — произведения множителей, индексы которых образуют соответственно ρ и p независимых циклов (возможно, такие произведения отсутствуют). Для монома d среди мономов определителя $\mathrm{rdet}_j\,\mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ существуют ещё три:

$$d_1 = (-1)^{n-r+1} a_{j\,i_{s+1}} \ldots a_{i_{s+m} i_s} a_{i_s i_1} \ldots a_{i_k j} u_1 \ldots u_\rho v_1 \ldots v_p,$$

$$d_2 = (-1)^{n-r+1} a_{ji_{s+m}} \dots a_{i_{s+1}i_s} a_{i_s i_1} \dots a_{i_k j} u_1 \dots u_\rho v_1 \dots v_p,$$
$$d_3 = (-1)^{n-r} a_{ji_1} \dots a_{i_k j} u_1 \dots u_\rho a_{i_s i_{s+m}} \dots a_{i_{s+1}i_s} v_1 \dots v_p.$$

Пусть $a_{ji_1} \dots a_{i_k j} = x$ и $a_{i_s i_{s+1}} \dots a_{i_{s+m} i_s} = y$. Тогда $\bar{y} = a_{i_s i_{s+m}} \dots a_{i_{s+1} i_s}$. Учитывая, что по условию теоремы $a_{ji_1} = a_{i_s i_1}$, $a_{ji_{s-1}} = a_{i_s i_{s-1}}$ и $a_{ji_{s+1}} = a_{i_s i_{s+1}}$, рассмотрим сумму этих мономов:

$$d + d_1 + d_2 + d_3 =$$
$$= (-1)^{n-r}(xu_1 \dots u_\rho y - yxu_1 \dots u_\rho - \bar{y} \cdot xu_1 \dots u_\rho + xu_1 \dots u_\rho \bar{y}) v_1 \dots v_p =$$
$$= (-1)^{n-r}(xu_1 \dots u_\rho t(y) - t(y) xu_1 \dots u_\rho) v_1 \dots v_p = 0.$$

Итак, для монома d среди мономов определителя $\mathrm{rdet}_j\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ существуют ещё три таких, что их сумма вместе с d равна нулю.

В случае, если в (9) $m = 0$ или $m = 1$, получим соответственно мономы

$$\tilde{d} = (-1)^{n-r} a_{ji_1} \dots a_{i_k j} u_1 \dots u_\rho a_{i_s i_s} v_1 \dots v_p,$$
$$\overset{\frown}{d} = (-1)^{n-r} a_{ji_1} \dots a_{i_k j} u_1 \dots u_\rho a_{i_s i_{s+1}} a_{i_{s+1} i_s} v_1 \dots v_p.$$

Для них на множестве мономов определителя $\mathrm{rdet}_j\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ найдём следующие мономы:

$$\tilde{d}_1 = (-1)^{n-r+1} a_{ji_s} a_{i_s i_1} \dots a_{i_k j} u_1 \dots u_\rho v_1 \dots v_p,$$
$$\overset{\frown}{d}_1 = (-1)^{n-r+1} a_{ji_{s+1}} a_{i_{s+1} i_s} a_{i_s i_1} \dots a_{i_k j} u_1 \dots u_\rho v_1 \dots v_p.$$

Учитывая, что $a_{ji_1} = a_{i_s i_1}$, $a_{ji_s} = a_{i_s i_s}$, $a_{ji_{s+1}} = a_{i_s i_{s+1}}$ и $a_{i_s i_s} \in \mathbf{R}$, $a_{i_s i_{s+1}} a_{i_{s+1} i_s} \in \mathbf{R}$, получим, что $\tilde{d} + \tilde{d}_1 = 0$, $\overset{\frown}{d} + \overset{\frown}{d}_1 = 0$. Таким образом, в этом случае суммы соответствующих пар мономов определителя $\mathrm{rdet}_j\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ равны нулю.

2. Пусть теперь индекс i_s размещён в ином независимом цикле, чем индекс j, но не начинает его:

$$\breve{d} = (-1)^{n-r} a_{ji_1} \dots a_{i_k j} u_1 \dots u_\rho a_{i_q i_{q+1}} \dots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s i_{s+1}} \dots a_{i_{q-1} i_q} v_1 \dots v_p,$$

где u_τ и v_t ($\tau = \overline{1, \rho}$, $t = \overline{1, p}$, $\rho + p = r - 2$) — произведения множителей, индексы которых образуют соответственно ρ и p независимых циклов (такие произведения могут отсутствовать). Среди мономов определителя $\mathrm{rdet}_j\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ снова можем выбрать ещё три:

$$\breve{d}_1 = (-1)^{n-r+1} a_{ji_{s+1}} \dots a_{i_{q-1} i_q} a_{i_q i_{q+1}} \dots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s i_1} \dots a_{i_k j} u_1 \dots u_\rho v_1 \dots v_p,$$
$$\breve{d}_2 = (-1)^{n-r+1} a_{ji_{s-1}} \dots a_{i_{q+1} i_q} a_{i_q i_{q-1}} \dots a_{i_{s+1} i_s} a_{i_s i_1} \dots a_{i_k j} u_1 \dots u_\rho v_1 \dots v_p,$$
$$\breve{d}_3 = (-1)^{n-r} a_{ji_1} \dots a_{i_k j} u_1 \dots u_\rho a_{i_q i_{q-1}} \dots a_{i_{s+1} i_s} a_{i_s i_{s-1}} \dots a_{i_{q+1} i_q} v_1 \dots v_p.$$

Пусть

$$a_{i_q i_{q+1}} \dots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s i_{s+1}} \dots a_{i_{q-1} i_q} = y, \quad a_{i_s i_{s+1}} \dots a_{i_{q-1} i_q} a_{i_q i_{q+1}} \dots a_{i_{s-1} i_s} = y_1,$$
$$a_{i_s i_{s+1}} \dots\ a_{i_{q-1} i_q} = \varphi, \quad a_{i_q i_{q+1}} \dots a_{i_{s-1} i_s} = \phi, \quad a_{ji_1} \dots a_{i_k j} = x.$$

Тогда $y = \phi\varphi$, $y_1 = \varphi\phi$ и

$$\bar{y} = a_{i_q i_{q-1}} \dots a_{i_{s+1} i_s} a_{i_s i_{s-1}} \dots a_{i_{q+1} i_q}, \quad \bar{y}_1 = a_{i_s i_{s-1}} \dots a_{i_{q+1} i_q} a_{i_q i_{q-1}} \dots a_{i_{s+1} i_s}.$$

Учитывая, что $a_{ji_1} = a_{i_s i_1}$, $a_{ji_{s-1}} = a_{i_s i_{s-1}}$, $a_{ji_{s+1}} = a_{i_s i_{s+1}}$, рассмотрим сумму

$$\begin{aligned}
&\overset{\smile}{d} + \overset{\smile}{d}_1 + \overset{\smile}{d}_2 + \overset{\smile}{d}_3 = \\
&\quad = (-1)^{n-r}(xu_1 \dots u_\rho y - y_1 x u_1 \dots u_\rho - \bar{y}_1 x u_1 \dots u_\rho + x u_1 \dots u_\rho \bar{y}) v_1 \dots v_p = \\
&\quad = (-1)^{n-r}(xu_1 \dots u_\rho \mathrm{t}(y) - \mathrm{t}(y_1) x u_1 \dots u_\rho) v_1 \dots v_p = \\
&\quad = (-1)^{n-r}\big(\mathrm{t}(\phi \cdot \varphi) - \mathrm{t}(\varphi \cdot \phi)\big) x u_1 \dots u_\rho v_1 \dots v_p.
\end{aligned}$$

Поскольку $\mathrm{t}(\phi \cdot \varphi) = \mathrm{t}(\varphi \cdot \phi)$, то снова $\overset{\smile}{d} + \overset{\smile}{d}_1 + \overset{\smile}{d}_2 + \overset{\smile}{d}_3 = 0$.

3. Если же индекс i_s размещён в подстановке индексов монома d в том же цикле, что и индекс j, то d совпадает с одним из следующих мономов: d_1, $\tilde{d}_1$, $\overset{\frown}{d}_1$ или $\overset{\smile}{d}_1$. Как показано выше, для любого из них на множестве мономов определителя $\mathrm{rdet}_j\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ существуют ещё один такой моном или три таких монома, что сумма соответствующей пары или четвёрки мономов равна нулю.

Мы рассмотрели все возможные мономы определителя $\mathrm{rdet}_j\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ в зависимости от размещения элемента i-й строки. Для любого из них существуют один такой моном или три таких монома, что сумма соответствующей пары или четвёрки мономов равна нулю, следовательно, $\mathrm{rdet}_j\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.}) = 0$. □

Следствие 4.1. *Если эрмитова матрица* $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ *содержит две одинаковые строки* (*столбца*), *то* $\det \mathbf{A} = 0$.

Доказательство. Пусть у эрмитовой матрицы $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ i-я строка совпадает с j-й строкой, т. е. $a_{ik} = a_{jk}$ для всех $k \in I_n$, $\{i, j\} \in I_n$, $i \neq j$. Тогда $\bar{a}_{ik} = \bar{a}_{jk}$, и для всех $k \in I_n$ $a_{ki} = a_{kj}$, где $\{i, j\} \in I_n$, $i \neq j$, поскольку матрица $\mathbf{A}$ эрмитова. Таким образом, если у эрмитовой матрицы совпадают две её строки, то также совпадают два её соответствующих — с теми же индексами — столбца. Матрицу $\mathbf{A}$ можно представить также как $\mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$, как матрицу, которая получена из матрицы $\mathbf{A}$ заменой j-й строки i-й строкой. Тогда в силу теоремы 4.1, рассматривая определитель эрмитовой матрицы $\mathbf{A}$ как строчный по i-й строке, получим

$$\det \mathbf{A} = \mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A} = \mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.}) = 0. \qquad \square$$

Аналогично теореме 4.1 доказывается и следующая теорема.

Теорема 4.2. *Если матрица* $\mathbf{A}_{.i}(\mathbf{a}_{.j})$ *получается из эрмитовой матрицы* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ *заменой её* i*-го столбца* j*-м, то* $\mathrm{cdet}_i\, \mathbf{A}_{.i}(\mathbf{a}_{.j}) = 0$ *для всех* $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$.

Из теорем 4.1, 4.2 и основных свойств строчных и столбцовых определителей произвольных квадратных матриц получим следующие теоремы.

Теорема 4.3. *Если матрица* $\mathbf{A}_{i.}(b\cdot\mathbf{a}_{j.})$ *получается из эрмитовой матрицы* $\mathbf{A}\in\mathrm{M}(n,\mathbf{H})$ *заменой её* i*-й строки строкой* j*, умноженной слева на произвольное* $b\in\mathbf{H}$*, то* $\mathrm{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}(b\cdot\mathbf{a}_{j.})=0$ *и* $\mathrm{cdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}(b\cdot\mathbf{a}_{j.})=0$ *для всех* $i,j=\overline{1,n}$*,* $i\neq j$*.*

Теорема 4.4. *Если матрица* $\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.i}\cdot b)$ *получается из эрмитовой матрицы* $\mathbf{A}\in\mathrm{M}(n,\mathbf{H})$ *заменой её* j*-го столбца* i*-м столбцом, умноженным справа на произвольное* $b\in\mathbf{H}$*, то* $\mathrm{cdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.i}\cdot b)=0$ *и* $\mathrm{rdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.i}\cdot b)=0$ *для всех* $i,j=\overline{1,n}$*,* $i\neq j$*.*

Теорема 4.5. *Если* i*-ю строку эрмитовой матрицы* $\mathbf{A}\in\mathrm{M}(n,\mathbf{H})$ *заменить левой линейной комбинацией других её строк, т. е.* $\mathbf{a}_{i.}=c_1\mathbf{a}_{i_1.}+\ldots+c_k\mathbf{a}_{i_k.}$*, где* $c_l\in\mathbf{H}$ *для всех* $l=\overline{1,k}$*, то для всех* $i=\overline{1,n}$

$$\mathrm{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}(c_1\mathbf{a}_{i_1.}+\ldots+c_k\mathbf{a}_{i_k.})=\mathrm{cdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}(c_1\mathbf{a}_{i_1.}+\ldots+c_k\mathbf{a}_{i_k.})=0.$$

Теорема 4.6. *Если* j*-й столбец эрмитовой матрицы* $\mathbf{A}\in\mathrm{M}(n,\mathbf{H})$ *заменить правой линейной комбинацией других её столбцов, т. е.* $\mathbf{a}_{.j}=\mathbf{a}_{.j_1}c_1+\ldots+\mathbf{a}_{.j_k}c_k$*, где* $c_l\in\mathbf{H}$ *для всех* $l=\overline{1,k}$*, то для всех* $j=\overline{1,n}$

$$\mathrm{cdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.j_1}c_1+\ldots+\mathbf{a}_{.j_k}c_k)=\mathrm{rdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.j_1}c_1+\ldots+\mathbf{a}_{.j_k}c_k)=0.$$

Теорема 4.7. *Если к* i*-й строке эрмитовой матрицы* $\mathbf{A}\in\mathrm{M}(n,\mathbf{H})$ *прибавить произвольную левую линейную комбинацию других её строк, то для всех* $i=\overline{1,n}$

$$\mathrm{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}(\mathbf{a}_{i.}+c_1\mathbf{a}_{i_1.}+\ldots+c_k\mathbf{a}_{i_k.})=\mathrm{cdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}(\mathbf{a}_{i.}+c_1\mathbf{a}_{i_1.}+\ldots+c_k\mathbf{a}_{i_k.})=\det\mathbf{A}.$$

Теорема 4.8. *Если к* j*-му столбцу эрмитовой матрицы* $\mathbf{A}\in\mathrm{M}(n,\mathbf{H})$ *прибавить произвольную правую линейную комбинацию других её столбцов, то для всех* $j=\overline{1,n}$

$$\mathrm{cdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.j}+\mathbf{a}_{.j_1}c_1+\ldots+\mathbf{a}_{.j_k}c_k)=\mathrm{rdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.j}+\mathbf{a}_{.j_1}c_1+\ldots+\mathbf{a}_{.j_k}c_k)=\det\mathbf{A}.$$

5. Матрица, обратная к эрмитовой

Определение 5.1. Эрмитову матрицу $\mathbf{A}$ будем называть невырожденной, если $\det\mathbf{A}\neq 0$.

Теорема 5.1. *Для эрмитовой невырожденной матрицы* $\mathbf{A}=(a_{ij})\in\mathrm{M}(n,\mathbf{H})$ *существует единственная правая обратная матрица* $(\mathrm{R}\mathbf{A})^{-1}$ *и единственная левая обратная* $(\mathrm{L}\mathbf{A})^{-1}$*, при этом* $(\mathrm{R}\mathbf{A})^{-1}=(\mathrm{L}\mathbf{A})^{-1}=:\mathbf{A}^{-1}$*, где*

$$(\mathrm{R}\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{pmatrix}R_{11}&R_{21}&\cdots&R_{n1}\\R_{12}&R_{22}&\cdots&R_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\R_{1n}&R_{2n}&\cdots&R_{nn}\end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{L}\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{pmatrix}L_{11}&L_{21}&\cdots&L_{n1}\\L_{12}&L_{22}&\cdots&L_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\L_{1n}&L_{2n}&\cdots&L_{nn}\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\mathrm{R}\mathbf{A})^{-1}$. Найдём элементы матрицы $\mathbf{B}$, перемножая матрицы:

$$b_{ii} = (\det \mathbf{A})^{-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot R_{ij} = (\det \mathbf{A})^{-1} \operatorname{rdet}_i \mathbf{A} = \frac{\det \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}} = 1 \quad \text{при} \quad i = \overline{1, n},$$

$$b_{ij} = (\det \mathbf{A})^{-1} \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot R_{js} = (\det \mathbf{A})^{-1} \operatorname{rdet}_j \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.}) \qquad \text{при} \quad i \neq j.$$

По теореме 4.1 $b_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Следовательно, $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ и $(\mathrm{R}\mathbf{A})^{-1}$ является правой обратной к эрмитовой матрице $\mathbf{A}$.

Пусть теперь $\mathbf{D} = (\mathrm{L}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}$. Снова будем искать элементы матрицы $\mathbf{D}$, умножая матрицы:

$$d_{jj} = (\det \mathbf{A})^{-1} \sum_{i=1}^{n} L_{ij} \cdot a_{ij} = (\det \mathbf{A})^{-1} \operatorname{cdet}_j \mathbf{A} = \frac{\det \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}} = 1 \quad \text{при} \quad j = \overline{1, n},$$

$$d_{ij} = (\det \mathbf{A})^{-1} \sum_{s=1}^{n} L_{si} \cdot a_{sj} = (\det \mathbf{A})^{-1} \operatorname{cdet}_i \mathbf{A}_{i.}(\mathbf{a}_{j.}) \qquad \text{при} \quad i \neq j.$$

По теореме 4.2 $d_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Таким образом, $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ и $(\mathrm{L}\mathbf{A})^{-1}$ является левой обратной к эрмитовой матрице $\mathbf{A}$.

Равенство $(\mathrm{R}\mathbf{A})^{-1} = (\mathrm{L}\mathbf{A})^{-1}$ непосредственно следует из единственности обратной матрицы над телом. □

6. Соответствующие эрмитовы матрицы и их свойства

Обозначим множество $(m \times n)$-матриц над телом $\mathbf{H}$ через $\mathbf{H}^{m\times n}$.

Определение 6.1. Для произвольной матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{H}^{m\times n}$ матрицу $\mathbf{A}^* \mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ будем называть её левой соответствующей эрмитовой матрицей и $\mathbf{A}\mathbf{A}^* \in \mathrm{M}(m, \mathbf{H})$ — её правой соответствующей эрмитовой матрицей.

Теорема 6.1 ([5]). *Если произвольный столбец матрицы* $\mathbf{A} \in \mathbf{H}^{m\times n}$ *является правой линейной комбинацией других столбцов, то* $\det \mathbf{A}^* \mathbf{A} = 0$.

Теорема 6.2 ([5]). *Если произвольная строка матрицы* $\mathbf{A} \in \mathbf{H}^{m\times n}$ *является левой линейной комбинацией других её строк, то* $\det \mathbf{A}\mathbf{A}^* = 0$.

Замечание 6.1. Поскольку главные подматрицы эрмитовой матрицы тоже эрмитовы, главный базисный минор эрмитовой матрицы может быть определён так же, как в коммутативном случае.

Определение 6.2. Главным базисным минором эрмитовой матрицы будем называть ненулевой определитель её главной подматрицы максимального порядка. Тогда строки и столбцы, входящие в главный базисный минор, также будем называть базисными.

Определение 6.3. Пусть строки и столбцы с индексами $i_1, \dots, i_r$ эрмитовой матрицы $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$ являются базисными. Тогда строки с индексами $i_1, \dots, i_r$ будем называть базисными для матрицы $\mathbf{A}^* \in \mathbf{H}^{n\times m}$ и столбцы с индексами $i_1, \dots, i_r$ будем называть базисными для матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{H}^{m\times n}$.

Так же как и в коммутативном случае, можно доказать теоремы о базисных строках и столбцах соответствующих эрмитовых матриц.

Теорема 6.3 ([5]). *Для матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{H}^{m\times n}$ базисные строки матриц $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ линейно независимы слева, базисные столбцы матриц $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$ и $\mathbf{A}$ линейно независимы справа.*

Теорема 6.4. *Произвольный столбец матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{H}^{m\times n}$ является правой линейной комбинацией её базисных столбцов.*

Доказательство. Если столбцы с индексами $i_1, \dots, i_r$ базисные для матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{H}^{m\times n}$, то базисный главный минор её левой соответствующей эрмитовой матрицы $\mathbf{A}^* \mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ размещён на пересечении столбцов и строк с теми же индексами $i_1, \dots, i_r$. Обозначим

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A} =: \mathbf{D} = (d_{ij})_{n\times n}.$$

Дополним эрмитову матрицу $\mathbf{M}$, которая отвечает базисному главному минору матрицы $\mathbf{D}$, $(r+1)$-ми строкой и столбцом, которые состоят из соответствующих элементов её j-й строки и столбца, при этом $j \in \{i_1, \dots, i_r\}$. Обозначим полученную матрицу $\mathbf{D}_j$,

$$\mathbf{D}_j = \begin{pmatrix} d_{i_1 i_1} & \cdots & d_{i_1 i_r} & d_{i_1 j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{i_r i_1} & \cdots & d_{i_r i_r} & d_{i_r j} \\ d_{j\, i_1} & \cdots & d_{j i_r} & d_{jj} \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица $\mathbf{D}_j$ эрмитова и содержит два одинаковых столбца, то по следствию 4.1

$$\det \mathbf{D}_j = \mathrm{cdet}_j\, \mathbf{D}_j = \sum_{l=1}^{r} L_{i_l j} \cdot d_{i_l j} + L_{jj} \cdot d_{jj} = 0,$$

где $L_{i_l j}$ — левое алгебраическое дополнение элемента $d_{i_l j}$ матрицы $\mathbf{D}_j$. Поскольку $L_{jj} = \det \mathbf{M}$, а согласно определению базисного главного минора $\det \mathbf{M} \neq 0$, получим

$$d_{jj} = -\sum_{l=1}^{r} (\det \mathbf{M})^{-1} L_{i_l j} \cdot d_{i_l j} \quad \text{для всех} \quad j \in \{i_1, \dots, i_r\}. \tag{10}$$

Пусть теперь $j \notin \{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_r\}$, $i_k < j < i_{k+1}$. Рассмотрим матрицу $\mathbf{D}_j$, которую получим, дополняя матрицу $\mathbf{M}$ j-ми строкой и столбцом:

$$\mathbf{D}_j = \begin{pmatrix} d_{i_1 i_1} & \cdots & d_{i_1 i_k} & d_{i_1 j} & d_{i_1 i_{k+1}} & \cdots & d_{i_1 i_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{i_k i_1} & \cdots & d_{i_k i_k} & d_{i_k j} & d_{i_k i_{k+1}} & \cdots & d_{i_k i_r} \\ d_{j\, i_1} & \cdots & d_{j\, i_k} & d_{j\, j} & d_{j\, i_{k+1}} & \cdots & d_{j\, i_r} \\ d_{i_{k+1} i_1} & \cdots & d_{i_{k+1} i_k} & d_{i_{k+1} j} & d_{i_{k+1} i_{k+1}} & \cdots & d_{i_{k+1} i_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{i_r i_1} & \cdots & d_{i_r i_k} & d_{i_r j} & d_{i_r i_{k+1}} & \cdots & d_{i_r i_r} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{D}_j$ и в этом случае является эрмитовой. Её определитель — главный минор $(r+1)$-го порядка матрицы $\mathbf{D}$, который по определению базисного главного минора равен нулю:

$$\det \mathbf{D}_j = \mathrm{cdet}_j\, \mathbf{D}_j = \sum_{l=1}^{r} L_{i_l j} \cdot d_{i_l j} + L_{jj} \cdot d_{jj} = 0.$$

Поскольку $L_{jj} = \det \mathbf{M}$, а согласно определению базисного главного минора $\det \mathbf{M} \neq 0$, имеем

$$d_{jj} = -\sum_{l=1}^{r} (\det \mathbf{M})^{-1} L_{i_l j} \cdot d_{i_l j} \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, n,}, \quad j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}. \tag{11}$$

Объединяя выражения (10) и (11), получаем

$$d_{jj} = -\sum_{l=1}^{r} (\det \mathbf{M})^{-1} L_{i_l j} \cdot d_{i_l j} \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, n}.$$

Пусть $-(\det \mathbf{M})^{-1} L_{i_l j} = \mu_l$, тогда $d_{jj} = \sum\limits_{l=1}^{r} \mu_l \cdot d_{i_l j}$. Поскольку $d_{jj} = \sum\limits_{k=1}^{m} \bar{a}_{kj} \cdot a_{kj}$ и $d_{i_l j} = \sum\limits_{k=1}^{m} \bar{a}_{k i_l} \cdot a_{kj}$, имеем

$$\sum_{k=1}^{m} \bar{a}_{kj} \cdot a_{kj} = \sum_{l=1}^{r} \mu_l \cdot \sum_{k=1}^{m} \bar{a}_{k i_l} \cdot a_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{r} \mu_l \cdot \bar{a}_{k i_l} \cdot a_{kj}.$$

Отсюда получаем, что $\bar{a}_{kj} = \sum\limits_{l=1}^{r} \mu_l \cdot \bar{a}_{k i_l}$ для всех $k = \overline{1, m}$, тогда $a_{kj} = \sum\limits_{l=1}^{r} a_{k i_l} \cdot \bar{\mu}_l$ для всех $k = \overline{1, m}$. Это означает, что произвольный j-й столбец матрицы $\mathbf{A}$ является правой линейной комбинацией её базисных столбцов с коэффициентами $\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_r$,

$$\mathbf{a}_{.j_1} \cdot \bar{\mu}_1 + \ldots + \mathbf{a}_{.j_r} \cdot \bar{\mu}_r = \mathbf{a}_{.j} \quad \text{для всех} \quad j \in J_n. \qquad \square$$

Следующая теорема доказывается аналогично.

Теорема 6.5. *Произвольная строка матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{H}^{m \times n}$ является левой линейной комбинацией её базисных строк.*

Очевидным следствием теорем 6.1, 6.2, 6.4 и 6.5 является критерий невырожденности соответствующих эрмитовых матриц.

Теорема 6.6. *Линейная независимость справа столбцов матрицы* $\mathbf{A} \in \mathbf{H}^{m\times n}$ *или линейная независимость слева строк матрицы* $\mathbf{A}^*$ *является необходимым и достаточным условием отличия от нуля определителя* $\det \mathbf{A}^* \mathbf{A}$.

7. Свойства двойного определителя кватернионной матрицы

Пусть матрица $\mathbf{E}_{ij} = (e_{pq})_{n\times n}$ такая, что

$$e_{pq} = \begin{cases} 1, & \text{если } p = i,\ q = j, \\ 0, & \text{если } p \neq i,\ q \neq j. \end{cases}$$

Определение 7.1. Матрицу $\mathbf{P}_{ij}(b) := \mathbf{I} + b \cdot \mathbf{E}_{ij}$ для $i \neq j$ и произвольного $b \in \mathbf{H}$ будем называть элементарной унимодулярной. Матрицы $\mathbf{P}_{ij}(b)$ (для всех $i \neq j$ и $b \in \mathbf{H}$) порождают унимодулярную группу $\mathrm{SL}(n, \mathbf{H})$, её элементы будем называть унимодулярными матрицами.

Теорема 7.1. *Если* $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ — *эрмитова матрица и* $\mathbf{P}_{ij}(b)$ — *элементарная унимодулярная матрица над телом* $\mathbf{H}$, *то* $\det \mathbf{A} = \det\bigl(\mathbf{P}_{ij}(b)\mathbf{A}\mathbf{P}^*_{ij}(b)\bigr)$.

Доказательство. Сначала заметим, что для $\mathbf{U} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ и эрмитовой матрицы $\mathbf{A}$ матрица $\mathbf{U}^* \mathbf{A}\mathbf{U}$ также эрмитова. Действительно,

$$(\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U})^* = \mathbf{U}^*\mathbf{A}^*\,\mathbf{U} = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}.$$

Умножая матрицу $\mathbf{A}$ слева на $\mathbf{P}_{ij}(b)$, мы складываем j-ю строку, умноженную слева на b, с i-й строкой. Умножением матрицы $\mathbf{A}$ справа на $\mathbf{P}^*_{ij}(b)$ складываются j-й столбец, умноженный справа на $\bar{b}$, с j-м столбцом. Следовательно,

$$\mathbf{P}_{ij}(b)\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^*_{ij}(b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} + a_{1j}\bar{b} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + ba_{j1} & \dots & (ba_{jj} + a_{ij})\bar{b} + ba_{ji} + a_{ii} & \dots & a_{in} + ba_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} + a_{nj}\bar{b} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда в силу теорем 2.4 и 2.5 получим

$$\det\bigl(\mathbf{P}_{ij}(b)\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^*_{ij}(b)\bigr) = \mathrm{cdet}_i\bigl(\mathbf{P}_{ij}(b)\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^*_{ij}(b)\bigr) =$$

$$= \mathrm{cdet}_i \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + ba_{j1} & \dots & a_{ii} + ba_{ji} & \dots & a_{in} + ba_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} +$$

$$
+\operatorname{cdet}_i \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}\overline{b} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+ba_{j1} & \dots & ba_{jj}+a_{ij} & \dots & a_{in}+ba_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}\overline{b} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =
$$

$$
= \operatorname{cdet}_i \mathbf{A} + \operatorname{cdet}_i \mathbf{A}_{i.}(b\cdot \mathbf{a}_{j.}) + \operatorname{cdet}_i \mathbf{A}_{.i}(\mathbf{a}_{.j})\cdot \overline{b} +
$$

$$
+\operatorname{cdet}_i \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ba_{j1} & \dots & ba_{jj} & \dots & ba_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot b.
$$

Матрица

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ba_{j1} & \dots & ba_{jj} & \dots & ba_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \big(\mathbf{A}_{.i}(\mathbf{a}_{.j})\big)_{i.}(b\cdot \mathbf{a}_{j.})
$$

получается из матрицы $\mathbf{A}$ последовательной заменой её i-го столбца j-м столбцом, а затем i-й строки полученной матрицы её j-й строкой, умноженной слева на элемент $b\in\mathbf{H}$. Таким образом, её i-й строкой является $b\cdot\mathbf{a}_{j.}$, а её j-й строкой — $\mathbf{a}_{j.}$, поэтому по теореме 4.3 имеем $\operatorname{cdet}_i\big(\mathbf{A}_{.i}(\mathbf{a}_{.j})\big)_{i.}(b\cdot\mathbf{a}_{j.})=0$. Кроме того, по теореме 4.2 $\operatorname{cdet}_i \mathbf{A}_{.i}(\mathbf{a}_{.j})=0$, и по теореме 4.3 получим $\operatorname{cdet}_i \mathbf{A}_{i.}(b\cdot\mathbf{a}_{j.})=0$.

Итак,

$$
\det\big(\mathbf{P}_{ij}(b)\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^*_{ij}(b)\big) = \operatorname{cdet}_i \mathbf{A} = \det \mathbf{A}. \qquad \square
$$

Теорема 7.2. *Для эрмитовой матрицы* $\mathbf{A}\in \mathrm{M}(n,\mathbf{H})$ *и произвольной матрицы* $\mathbf{U}\in \mathrm{SL}(n,\mathbf{H})$

$$
\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{U}^*).
$$

Доказательство. Для любой матрицы $\mathbf{U}\in\mathrm{SL}(n,\mathbf{H})$ существуют $k\in\mathbf{N}$ и такое множество элементарных унимодулярных матриц $\{\mathbf{P}_1,\dots,\mathbf{P}_k\}\subset \subset \mathrm{SL}(n,\mathbf{H})$, что $\mathbf{U}=\mathbf{P}_k\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}_1$, и тогда $\mathbf{U}^*=\mathbf{P}_1^*\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}_k^*$.

Докажем теорему индукцией по k.

1. Случай $k=1$ доказан теоремой 7.1.

2. Пусть условие теоремы выполняется для $k-1$, т. е. $\mathbf{U}=\mathbf{P}_{k-1}\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}_1$ и

$$
\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{P}_{k-1}\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}_1^*\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}_{k-1}^*).
$$

Обозначим

$$
\tilde{\mathbf{A}} := \mathbf{P}_{k-1}\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}_1^*\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}_{k-1}^*.
$$

Как показано в теореме 7.1, матрица $\tilde{\mathbf{A}}$ эрмитова.

3. Пусть теперь $\mathbf{U}=\mathbf{P}_k\cdot\mathbf{P}_{k-1}\ldots\cdot\mathbf{P}_1$. Тогда

$$
\det(\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{U}^*) = \det(\mathbf{P}_k\cdot\tilde{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{P}_k^*) = \det\tilde{\mathbf{A}} = \det\mathbf{A}. \qquad \square
$$

Теорема 7.3. *Пусть* $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ *— эрмитова матрица. Тогда* $\mathbf{A}$ *унимодулярно подобна диагональной матрице, т. е. существуют* $\mathbf{U} \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{H})$ *и* $\mu_i \in \mathbf{R}$ *для* $i = \overline{1, n}$, *для которых* $\mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^* = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, *где* $\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ *— диагональная матрица, и* $\det \mathbf{A} = \mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_n$.

Доказательство. Рассмотрим первый столбец матрицы $\mathbf{A}$. Возможны следующие случаи.

1. Пусть $a_{11} \neq 0$, тогда $\mu_1 = a_{11} \in \mathbf{R}$. Последовательно умножая матрицу $\mathbf{A}$ слева на элементарные унимодулярные матрицы $\mathbf{P}_{i1}\bigl(-\frac{a_{i1}}{\mu_1}\bigr)$ для $i = \overline{2, n}$, получим матрицу, в которой все элементы первого столбца, исключая элемент главной диагонали, нулевые. Поскольку для любого $i = \overline{2, n}$ справедливо $\overline{-\frac{a_{i1}}{\mu_1}} = -\frac{a_{1i}}{\mu_1}$, то $\mathbf{P}^*_{i1}\bigl(-\frac{a_{i1}}{\mu_1}\bigr) = \mathbf{P}_{1i}\bigl(-\frac{a_{1i}}{\mu_1}\bigr)$. Последовательно умножая матрицу $\mathbf{A}$ справа на элементарные унимодулярные матрицы $\mathbf{P}^*_{i1}(-\frac{a_{i1}}{\mu_1})$, получим, что все элементы первой строки, исключая элемент главной диагонали, являются нулевыми. В силу теоремы 7.1 эта матрица также эрмитова.

2. Пусть $a_{11} = 0$ и найдётся такое $i \in I_n$, что $a_{i1} \neq 0$. Умножая матрицу $\mathbf{A}$ слева на элементарные унимодулярные матрицы $\mathbf{P}_{1i}(a_{1i})$ и справа на $\mathbf{P}_{i1}(a_{i1})$, получим матрицу $\tilde{\mathbf{A}}$ с элементом $\tilde{a}_{11} = \mathrm{n}(a_{i1})(2 + a_{ii}) \in \mathbf{R}$. Пусть теперь $\mu_1 = \tilde{a}_{11}$. Снова последовательно умножая матрицу $\tilde{\mathbf{A}}$ слева на $\mathbf{P}_{i1}\bigl(-\frac{\tilde{a}_{i1}}{\mu_1}\bigr)$ и справа на $\mathbf{P}^*_{i1}\bigl(-\frac{\tilde{a}_{i1}}{\mu_1}\bigr)$ для $i = \overline{2, n}$, получим матрицу, в которой все элементы первого столбца и строки, исключая элемент главной диагонали, нулевые.

3. Пусть $a_{i1} = 0$ для всех $i \in I_n$, тогда $\mu_1 = a_{11}$.

Продолжая описанную выше процедуру для каждого элемента главной диагонали и элементов соответствующих строк и столбцов, через конечное число умножений матрицы $\mathbf{A}$ на элементарные унимодулярные матрицы $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{ij}(b_k)$ слева и на элементарные унимодулярные матрицы $\mathbf{P}^*_k = \mathbf{P}_{ji}(\bar{b}_k)$ справа получим диагональную матрицу с диагональными элементами $\mu_i \in \mathbf{R}$ для всех $i = \overline{1, n}$. Пусть $\mathbf{U} = \prod\limits_k \mathbf{P}_k$, тогда в силу теоремы 7.2

$$\det(\mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^*) = \det\bigl(\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)\bigr) = \mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_n. \qquad \square$$

Теорема 7.4. *Пусть* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$. *Тогда* $\det \mathbf{A}\mathbf{A}^* = \det \mathbf{A}^*\mathbf{A}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$. Легко видеть, что

$$\det \begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & -\mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Квадратную матрицу

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

порядка $2n$ можно представить в виде произведения n^2 элементарных унимодулярных матриц $2n$-го порядка, т. е. для каждого $k = \overline{1, n^2}$ найдутся $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{n+1, n^2}$ и $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}^{(k)}_{ij}(a_{ij})$, такие что

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \prod_k \mathbf{P}_k.$$

Так как

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2n, \mathbf{H}),$$

по теореме 7.2 получим

$$(-1)^n \det \mathbf{A}\mathbf{A}^* = \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{A}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} = \det \left(\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{I} \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \det \begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \det \left(\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{A}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} = (-1)^n \det \mathbf{A}^* \mathbf{A}. \qquad \square$$

Определение 7.2. Для квадратной матрицы $\mathbf{A}$ над телом $\mathbf{H}$ определитель соответствующей ей эрмитовой матрицы будем называть её двойным определителем, $\mathrm{ddet}\, \mathbf{A} := \det(\mathbf{A}^* \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)$.

Теорема 7.5. *Для любой пары* $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \subset \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ $\mathrm{ddet}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathrm{ddet}\, \mathbf{A} \cdot \mathrm{ddet}\, \mathbf{B}$.

Доказательство. В силу теоремы 7.3 для эрмитовой матрицы $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$ найдётся матрица $\mathbf{U} \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{H})$, такая что

$$\mathbf{U}^* \cdot \mathbf{A}^* \mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{U})^* \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

где $\alpha_i \in \mathbf{R}$. Если $\mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = (q_{ij})_{n \times n}$, то $\alpha_i = \sum\limits_k \bar{q}_{ki} q_{ki} = \sum\limits_k n(q_{ki}) \in \mathbf{R}_+$ для всех $i = \overline{1, n}$, где $\mathbf{R}_+$ — множество неотрицательных действительных чисел. Поэтому для каждого $\alpha_i \in \mathbf{R}_+$ для $i = \overline{1, n}$ найдётся $\sqrt{\alpha_i} \in \mathbf{R}_+$. Для эрмитовой матрицы $(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})^*(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})$ найдутся $\mathbf{W} \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{H})$ и $\beta_i \in \mathbf{R}_+$ для $i = \overline{1, n}$, такие что $\mathbf{W}^*(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})^*(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{W} = \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Тогда в соответствии с теоремами 7.3 и 7.4 и ввиду того, что $(\mathbf{U}^*)^{-1} = (\mathbf{U}^{-1})^*$, получим

$$\mathrm{ddet}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{B}^*(\mathbf{A}^*\mathbf{A})\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B}^*(\mathbf{U}^*)^{-1}\mathbf{U}^*(\mathbf{A}^*\mathbf{A})\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B}) =$$
$$= \det\big((\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})^* \,\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B}\big) =$$
$$= \det\big((\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})^*(\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})\big) =$$
$$= \det\big((\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})(\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})^*\big) =$$
$$= \det\big(\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})^* \,\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})\big) =$$
$$= \det\big(\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})(\mathbf{W}^{-1})^* \,\mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)\mathbf{W}^{-1} \times$$
$$\times \mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})\big) = \det\Big(\big((\mathbf{W}^{-1})^{\mathrm{T}}\big)^* \,\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n}) \times$$
$$\times \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n) \,\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})(\mathbf{W}^{-1})^{\mathrm{T}}\Big) =$$
$$= \det\big(\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n}) \,\mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n) \,\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})\big) =$$
$$= \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \cdot \beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_n = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = \det \mathbf{B} \cdot \det \mathbf{A}. \qquad \square$$

Замечание 7.1. Доказательства теорем 7.4 и 7.5 аналогичны доказательствам в [9, с. 533], но отличаются от них использованием других детерминантных функционалов.

Замечание 7.2. Из теорем 6.6 и 7.5 следует, что для любой матрицы $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ $\operatorname{ddet} \mathbf{A}$ удовлетворяет аксиомам 1, 2, 3. Из [7,10] следует, что

$$\operatorname{ddet} \mathbf{A} = \operatorname{Mdet}(\mathbf{A}^* \mathbf{A}) = \operatorname{Sdet} \mathbf{A} = \operatorname{Ddet}^2 \mathbf{A},$$

где $\operatorname{Sdet} \mathbf{A}$ — определитель Стади, $\operatorname{Ddet} \mathbf{A}$ — определитель Дьедонне.

8. Детерминантное представление кватернионной обратной матрицы

Определение 8.1. Пусть

$$\operatorname{ddet} \mathbf{A} = \operatorname{cdet}_j(\mathbf{A}^* \mathbf{A}) = \sum_i \mathbb{L}_{ij} \cdot a_{ij}$$

для $j = \overline{1, n}$. Тогда будем называть $\mathbb{L}_{ij}$ левым двойным алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$.

Определение 8.2. Пусть

$$\operatorname{ddet} \mathbf{A} = \operatorname{rdet}_i(\mathbf{A}\mathbf{A}^*) = \sum_j a_{ij} \cdot \mathbb{R}_{ij}$$

для $i = \overline{1, n}$. Тогда будем называть $\mathbb{R}_{ij}$ правым двойным алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$.

Теорема 8.1. *Необходимым и достаточным условием обратимости матрицы* $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ *является условие* $\operatorname{ddet} \mathbf{A} \neq 0$. *Тогда существует матрица* $\mathbf{A}^{-1} = (\mathrm{L}\mathbf{A})^{-1} = (\mathrm{R}\mathbf{A})^{-1}$, *где*

$$(\mathrm{L}\mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^* = \frac{1}{\operatorname{ddet} \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathbb{L}_{11} & \mathbb{L}_{21} & \ldots & \mathbb{L}_{n1} \\ \mathbb{L}_{12} & \mathbb{L}_{22} & \ldots & \mathbb{L}_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbb{L}_{1n} & \mathbb{L}_{2n} & \ldots & \mathbb{L}_{nn} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$(\mathrm{R}\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^*(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)^{-1} = \frac{1}{\operatorname{ddet} \mathbf{A}^*} \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{11} & \mathbb{R}_{21} & \ldots & \mathbb{R}_{n1} \\ \mathbb{R}_{12} & \mathbb{R}_{22} & \ldots & \mathbb{R}_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbb{R}_{1n} & \mathbb{R}_{2n} & \ldots & \mathbb{R}_{nn} \end{pmatrix} \tag{13}$$

и

$$\mathbb{L}_{ij} = \operatorname{cdet}_j(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.j}(\mathbf{a}^*_{.i}), \quad \mathbb{R}_{ij} = \operatorname{rdet}_i(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{i.}(\mathbf{a}^*_{j.})$$

для всех $i, j = \overline{1, n}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть существует обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ к матрице $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$. Ввиду того что $\operatorname{rank} \mathbf{A} \geqslant \operatorname{rank}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}) = \operatorname{rank} \mathbf{I} = n$, имеем $\operatorname{rank} \mathbf{A} = n$. Поскольку $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank} \mathbf{A}^* \mathbf{A}$, столбцы матрицы $\mathbf{A}$ линейно независимы справа. Тогда по теореме 6.6 $\det \mathbf{A}^* \mathbf{A} = \operatorname{ddet} \mathbf{A} \neq 0$.

Достаточность. Так как $\operatorname{ddet} \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^* \mathbf{A} \neq 0$, по теореме 5.1 существует обратная матрица $(\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1}$ эрмитовой матрицы $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$. Умножая её справа на $\mathbf{A}^*$, получим левую обратную $(\mathrm{L}\mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^*$. Раскрывая матрицу $(\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} = \left(\frac{L_{ij}}{\operatorname{ddet} \mathbf{A}}\right)_{n \times n}$ как левую обратную, получим

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{L}\mathbf{A})^{-1} &= \left(\mathrm{L}(\mathbf{A}^* \mathbf{A})\right)^{-1} \mathbf{A}^* = \\
&= \frac{1}{\operatorname{ddet} \mathbf{A}} \begin{pmatrix}
\sum\limits_k L_{k1} a^*_{k1} & \sum\limits_k L_{k1} a^*_{k2} & \ldots & \sum\limits_k L_{k1} a^*_{kn} \\
\sum\limits_k L_{k2} a^*_{k1} & \sum\limits_k L_{k2} a^*_{k2} & \ldots & \sum\limits_k L_{k2} a^*_{kn} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\sum\limits_k L_{kn} a^*_{k1} & \sum\limits_k L_{kn} a^*_{k2} & \ldots & \sum\limits_k L_{kn} a^*_{kn}
\end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{\operatorname{ddet} \mathbf{A}} \begin{pmatrix}
\operatorname{cdet}_1 (\mathbf{A}^* \mathbf{A})_{.1} (\mathbf{a}^*_{.1}) & \operatorname{cdet}_1 (\mathbf{A}^* \mathbf{A})_{.1} (\mathbf{a}^*_{.2}) & \ldots & \operatorname{cdet}_1 (\mathbf{A}^* \mathbf{A})_{.1} (\mathbf{a}^*_{.n}) \\
\operatorname{cdet}_2 (\mathbf{A}^* \mathbf{A})_{.2} (\mathbf{a}^*_{.1}) & \operatorname{cdet}_2 (\mathbf{A}^* \mathbf{A})_{.2} (\mathbf{a}^*_{.2}) & \ldots & \operatorname{cdet}_2 (\mathbf{A}^* \mathbf{A})_{.2} (\mathbf{a}^*_{.n}) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\operatorname{cdet}_n (\mathbf{A}^* \mathbf{A})_{.n} (\mathbf{a}^*_{.1}) & \operatorname{cdet}_n (\mathbf{A}^* \mathbf{A})_{.n} (\mathbf{a}^*_{.2}) & \ldots & \operatorname{cdet}_n (\mathbf{A}^* \mathbf{A})_{.n} (\mathbf{a}^*_{.n})
\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ввиду того что

$$\operatorname{ddet} \mathbf{A} = \operatorname{cdet}_j (\mathbf{A}^* \mathbf{A}) = \sum_i \operatorname{cdet}_j (\mathbf{A}^* \mathbf{A})_{.j} (\mathbf{a}^*_{.i}) \cdot a_{ij} = \sum_i \mathbb{L}_{ij} \cdot a_{ij}$$

для всех $j = \overline{1, n}$, получим (12).

Теперь докажем формулу (13). В соответствии с теоремой 5.1 существует обратная матрица $(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)^{-1}$. Умножая её слева на $\mathbf{A}^*$ и раскрывая $(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)^{-1} = \left(\frac{R_{ij}}{\operatorname{ddet} \mathbf{A}}\right)_{n \times n}$ как правую обратную, получим

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{R}\mathbf{A})^{-1} &= \mathbf{A}^* \left(\mathrm{R}(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)\right)^{-1} = \\
&= \frac{1}{\operatorname{ddet} \mathbf{A}} \begin{pmatrix}
\sum\limits_k a^*_{1k} R_{1k} & \sum\limits_k a^*_{1k} R_{2k} & \ldots & \sum\limits_k a^*_{1k} R_{nk} \\
\sum\limits_k a^*_{2k} R_{1k} & \sum\limits_k a^*_{2k} R_{2k} & \ldots & \sum\limits_k a^*_{2k} R_{nk} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\sum\limits_k a^*_{nk} R_{1k} & \sum\limits_k a^*_{1k} R_{1k} & \ldots & \sum\limits_k a^*_{nk} R_{nk}
\end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{\operatorname{ddet} \mathbf{A}} \begin{pmatrix}
\operatorname{rdet}_1 (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{.1} (\mathbf{a}^*_{.1}) & \operatorname{rdet}_2 (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{.2} (\mathbf{a}^*_{.1}) & \ldots & \operatorname{rdet}_n (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{.n} (\mathbf{a}^*_{.1}) \\
\operatorname{rdet}_1 (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{.1} (\mathbf{a}^*_{.2}) & \operatorname{rdet}_2 (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{.2} (\mathbf{a}^*_{.2}) & \ldots & \operatorname{rdet}_n (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{.n} (\mathbf{a}^*_{.2}) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\operatorname{rdet}_1 (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{.1} (\mathbf{a}^*_{.n}) & \operatorname{rdet}_2 (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{.2} (\mathbf{a}^*_{.n}) & \ldots & \operatorname{rdet}_n (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{.n} (\mathbf{a}^*_{.n})
\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ввиду того что

$$\operatorname{ddet} \mathbf{A} = \operatorname{rdet}_i (\mathbf{A}\mathbf{A}^*) = \sum_j a_{ij} \cdot \operatorname{rdet}_i (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{i.} (\mathbf{a}^*_{j.}) = \sum_j a_{ij} \cdot \mathbb{R}_{ij}$$

для всех $i = \overline{1, n}$, выполняется формула (13). Равенство

$$(\mathrm{L}\mathbf{A})^{-1} = (\mathrm{R}\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$$

следует из свойств обратной матрицы над телом. □

Замечание 8.1. Теорема 8.1 представляет обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$ произвольной квадратной матрицы $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$, если $\operatorname{ddet} \mathbf{A} \neq 0$, через аналог классической присоединённой. Если мы обозначим её $\mathrm{Adj}[[\mathbf{A}]]$, то над телом $\mathbf{H}$ имеет место следующая формула:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}[[\mathbf{A}]]}{\operatorname{ddet} \mathbf{A}}.$$

9. Правила Крамера для кватернионных систем линейных уравнений

Теорема 9.1. *Пусть*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ —} \tag{14}$$

правая система линейных уравнений с матрицей коэффициентов $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$, *столбцом свободных элементов* $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{H}^{n \times 1}$ *и столбцом неизвестных* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$. *Если* $\operatorname{ddet} \mathbf{A} \neq 0$, *тогда система* (14) *имеет единственное решение, которое представляется формулой*

$$x_j = \frac{\operatorname{cdet}_j (\mathbf{A}^* \mathbf{A})_{.j} (\mathbf{f})}{\operatorname{ddet} \mathbf{A}}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{15}$$

где $\mathbf{f} = \mathbf{A}^* \mathbf{y}$.

Доказательство. По теореме 8.1 матрица $\mathbf{A}$ обратимая, т. е. существует единственная обратная к ней матрица $\mathbf{A}^{-1}$. Из этого следует существование и единственность решений системы (14). Рассмотрим $\mathbf{A}^{-1}$ как левую обратную $(\mathrm{L}\mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^*$, тогда из (14) получим

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{y}.$$

Обозначим $\mathbf{f} := \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{y}$, где $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ — n-мерный вектор-столбец над $\mathbf{H}$. Рассматривая $(\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1}$ как левую обратную, представим решение системы (14) покомпонентно:

$$x_j = (\operatorname{ddet} \mathbf{A})^{-1} \sum_{i=1}^{n} L_{ij} \cdot f_i, \quad j = \overline{1, n},$$

где L_{ij} — левое алгебраическое дополнение в матрице $(\mathbf{A}^* \mathbf{A})$. Отсюда непосредственно следует (15). □

Теорема 9.2. *Пусть*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{y} \text{ —} \tag{16}$$

левая система линейных уравнений с матрицей коэффициентов $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$, *строкой свободных элементов* $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{H}^{1\times n}$ *и строкой неизвестных* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. *Если* $\mathrm{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$, *то система* (16) *имеет единственное решение, которое представляется формулой*

$$x_i = \frac{\mathrm{rdet}_i(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{i.}(\mathbf{z})}{\mathrm{ddet}\,\mathbf{A}}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{17}$$

где $\mathbf{z} = \mathbf{y}\mathbf{A}^*$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9.1.

Замечание 9.1. Формулы (15) и (17) являются естественным и очевидным обобщением правила Крамера для квадратных систем линейных уравнений над телом кватернионов.

Ещё более близкую аналогию можно получить в следующих частных случаях, которые следуют из теоремы 5.1.

Теорема 9.3. *Пусть в правой системе линейных уравнений* (14) *матрица коэффициентов* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ *эрмитова. Тогда система имеет единственное решение, которое представляется формулой*

$$x_j = \frac{\mathrm{cdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{y})}{\det \mathbf{A}}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Теорема 9.4. *Пусть в левой системе линейных уравнений* (16) *матрица коэффициентов* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{H})$ *эрмитова. Тогда система имеет единственное решение, которое представляется формулой*

$$x_i = \frac{\mathrm{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}(\mathbf{y})}{\det \mathbf{A}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Литература

[1] Гельфанд И. М., Ретах В. С. Детерминанты матриц над некоммутативными кольцами // Функц. анализ и его прил. — 1991. — Т. 25, № 2. — С. 13—35.

[2] Гельфанд И. М., Ретах В. С. Теория некоммутативных детерминантов и характеристические функции графов // Функц. анализ и его прил. — 1992. — Т. 26, № 4. — С. 33—45.

[3] Кирчей И. И. Дробно-рациональная регуляризация системы линейных уравнений над телом кватернионов // Мат. методы и физико-механические поля. — 1996. — Т. 39, № 2. — С. 89—95.

[4] Кирчей И. И. Классическая присоединённая матрица для эрмитовой над телом // Мат. методы и физико-механические поля. — 2001. — Т. 44, № 3. — С. 33—48.

[5] Кирчей И. И. Аналог классической присоединённой матрицы над телом с инволюцией // Мат. методы и физико-механические поля. — 2003. — Т. 46, № 4. — С. 81—91.

[6] Понизовский И. С. Об определителе матриц с элементами из некоторого кольца // Мат. сб. — 1958. — Т. 45 (87), № 1. — С. 3—16.

[7] Aslaksen H. Quaternionic determinants // Math. Intelligencer. — 1996. — Vol. 18, no. 3. — P. 57—65.

[8] Chen L. Definition of determinant and Cramer solutions over quaternion field // Acta Math. Sinica (New Ser.). — 1991. — Vol. 7, no. 2. — P. 171—180.

[9] Chen L. Inverse matrix and properties of double determinant over quaternion field // Sci. China, Ser. A. — 1991. — Vol. 34. — P. 528—540.

[10] Cohen N., De Leo S. The quaternionic determinant // Electron. J. Linear Algebra. — 2000. — Vol. 7. — P. 100—111.

[11] Dyson F. J. Quaternion determinants // Helv. Phys. Acta. — 1972. — Vol. 45. — P. 289—302.