

Уравнения, определяющие пары Белого, с приложениями к антивандермондовым системам*

Е. М. КРЕЙНЕС

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: elena.kreines@gmail.com

УДК 512.643+512.772

Ключевые слова: детские рисунки Гротендика, пары Белого, антивандермондовы системы.

Аннотация

В статье рассматриваются детские рисунки Гротендика, т. е. специальным образом вложенные графы на поверхностях, и пары Белого, т. е. рациональные функции с не более чем тремя критическими значениями на алгебраических кривых. Связь между этими объектами установлена Гротендиком. В статье исследуется комбинаторика систем уравнений, определяющих пару Белого для данного рисунка. Описываются некоторые свойства дополнительных, так называемых паразитических, решений таких систем. Как следствие получаются результаты об антивандермондовых системах уравнений.

Abstract

E. M. Kreines, Equations determining Belyi pairs, with applications to anti-Vandermonde systems, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 4, pp. 95–112.

This paper deals with Grothendieck dessins d'enfants, i.e., tamely embedded graphs on surfaces, and Belyi pairs, i.e., rational functions with at most three critical values on algebraic curves. The relationship between these objects was promoted by Grothendieck. We investigate combinatorics of systems of equations determining a Belyi pair corresponding to a given dessin. Some properties of extra, or so-called parasitic, solutions of such systems are described. As a corollary, we obtain some applications concerning anti-Vandermonde systems.

1. Введение

Теория правильно вложенных графов на поверхностях восходит к работам Александра Гротендика [11]. Гротендик называл такие графы «dessins d'enfants»

*Работа написана при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 07-01-00441а, гранта МК-2687.2007.1 и института Миттаг-Леффлера, Швеция.

(детские рисунки) из-за их простой комбинаторной структуры. Гротендик обратил внимание на взаимосвязанность детских рисунков и непостоянных рациональных функций с не более чем тремя критическими значениями на алгебраических кривых. Найденная взаимосвязь открывает много новых нетривиальных связей между различными объектами в теории категорий, алгебре, алгебраической геометрии, комплексном анализе, топологии и других областях математики. В частности, это соответствие даёт подход к визуализации алгебраических кривых над числовыми полями и к геометрической интерпретации действия общей группы Галуа $\text{Aut}(\overline{\mathbb{Q}})$ (здесь $\overline{\mathbb{Q}}$ обозначает поле алгебраических чисел). Истоки этой теории можно найти в [16, 20], а современное состояние этого направления и многочисленные приложения описываются в [15].

На сегодняшний день основной мотивацией развития этой теории являются различные задачи о пространствах модулей алгебраических кривых с нумерованными отмеченными точками и вопросы об алгебраических решениях уравнения Пенлеве VI (см. [13, 17, 21]). В обеих теориях важно находить конкретные пары Белого, отвечающие заданным детским рисункам. К сожалению, эта задача далеко не тривиальна даже в случае рисунков рода ноль, когда требуется отыскать только функцию Белого.

В этой статье мы выписываем общую систему уравнений в пространствах модулей и пространстве Гурвица, определяющую функции Белого всех рисунков заданного комбинаторного типа (набор валентностей всех вершин и граний рисунка), и исследуем некоторые свойства таких систем. Заметим, что для рисунков рода ноль (в этом случае система может быть записана более явно) не существует прямого способа получить решение системы общего вида за разумное время, так как степени могут оказаться достаточно большими. В настоящей работе развита некоторая общая техника исследования лишних, так называемых паразитических, решений этих систем, которая даёт возможность «правильной» нормализации, ведущей к уравнениям минимальных возможных степеней. В итоге мы покажем, что не существует паразитических решений систем, определяющих многочлены Шабата, которые являются парами Белого для деревьев. Кроме того, развитая техника позволяет нам исследовать решения так называемых антивандермондовых систем, которые выглядят в точности как системы с матрицей Вандермонда при замене коэффициентов на переменные. Такие системы рассматриваются в теории обработки сигналов (см. монографию [14] и библиографию в ней), где вандермондовы и антивандермондовы системы используются одновременно для решения конкретных вычислительных задач. Кроме того, эти системы связаны с ганкелевыми матрицами [12, 14].

Автор благодарна Г. Б. Шабату, Т. Иаррабино, Н. Я. Амбург, М. Леенсону и К. Фонтанари за интересные обсуждения.

2. Определения и обозначения

2.1. Детские рисунки

Определение 2.1. Граф Γ называется *двукрашенным*, если все его вершины раскрашены двумя различными цветами, например чёрным и белым, таким образом, что каждое ребро имеет две вершины различных цветов.

Определение 2.2. *Детский рисунок* D определяется как компактная связная гладкая ориентируемая поверхность M вместе с двукрашенным графом Γ , вложенным в M так, что дополнение $M \setminus \Gamma$ гомеоморфно дизъюнктному объединению открытых дисков. Каждый диск называется *гранью* рисунка. *Вершины* и *рёбра* рисунка — это вершины и рёбра соответствующего графа.

Будем обозначать через $\alpha(D)$, $\omega(D)$, $n(D)$, $\gamma(D)$ число чёрных вершин, белых вершин, рёбер и граней D соответственно. Будем писать просто α , ω , n , γ , если из контекста понятно, о каком рисунке D идёт речь.

Определение 2.3. *Валентность вершины* рисунка называется число рёбер, инцидентных этой вершине. *Валентность грани* называется число рёбер, инцидентных данной грани, поделённое на 2. Заметим, что если обе стороны некоторого ребра инцидентны одной грани, то при вычислении валентности этой грани данное ребро необходимо считать дважды.

Определение 2.4. Последовательность чисел

$$\langle a_1, \dots, a_\alpha \mid w_1, \dots, w_\omega \mid c_1, \dots, c_\gamma \rangle$$

называется *реализуемым комбинаторным типом*, если она может быть реализована как набор валентностей всех чёрных вершин, белых вершин и граней некоторого рисунка.

Определение 2.5. Два детских рисунка называются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм между соответствующими поверхностями, при котором один из рисунков преобразуется в другой.

Замечание 2.6. Непосредственно проверяется, что изоморфные детские рисунки имеют одинаковый комбинаторный тип. Однако комбинаторный тип не определяет детский рисунок с точностью до изоморфизма, что показывает, например, следующая пара детских рисунков.



Рис. 1. Неизоморфные рисунки одинакового комбинаторного типа $\langle 3, 2, 1 \mid 3, 1, 1, 1 \mid 6 \rangle$

В некоторых задачах удобнее рассматривать обычные, а не двукрашенные графы, вложенные в поверхность таким образом, что дополнение поверхности до графа гомеоморфно дизъюнктному объединению открытых дисков. В этом

случае мы будем говорить о *недвукрашенных детских рисунках*. Легко видеть, что недвукрашенные детские рисунки могут быть получены из двукрашенных забыванием раскраски. Наоборот, для каждого недвукрашенного детского рисунка мы можем добавить вершину другого цвета в середину каждого ребра для получения детского рисунка в смысле определения 2.2. Заметим, что недвукрашенный детский рисунок может иметь петли и кратные рёбра. В недвукрашенной теории мы будем говорить, что валентность грани — это число вершин, инцидентных этой грани (без деления на 2). Недвукрашенные детские рисунки могут рассматриваться как подкласс двукрашенных, в котором все вершины одного фиксированного цвета имеют валентность 2. Таким образом, мы просто не отмечаем эти вершины, так как они расположены в середине каждого ребра. Такой подход хорошо согласуется с последующим изложением.

2.2. Пары Белого

Определение 2.7. Пара Белого (\mathcal{X}, β) — это алгебраическая кривая \mathcal{X} вместе с непостоянной на этой кривой рациональной функцией $\beta: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{CP}^1$, которая имеет не более трёх критических значений. Функция β называется *функцией Белого*.

Замечание 2.8. С точностью до дробно-линейного преобразования \mathbb{CP}^1 мы можем зафиксировать критические значения функции β в точках $0, 1, \infty$ и сделаем это, т. е., если не оговорено противное, считается, что $\text{crit}(\beta) \subseteq \{0, 1, \infty\}$.

Определение 2.9. Пара Белого называется *чистой*, если все ветвления функции β над точкой 1 имеют порядок 2.

Замечание 2.10. Легко видеть, что если (\mathcal{X}, β) — пара Белого, то $(\mathcal{X}, 4\beta(1 - \beta))$ — чистая пара Белого.

Пары Белого являются в некотором смысле широко распространёнными объектами среди всех алгебраических кривых с рациональными функциями на них. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.11 [4]. Пусть \mathcal{X} — гладкая полная неприводимая алгебраическая кривая над \mathbb{C} . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) кривая \mathcal{X} изоморфна комплексификации кривой, определённой над числовым полем;
- 2) существует функция Белого на \mathcal{X} .

Известно, что если (\mathcal{X}, β) — пара Белого, то $\beta^{-1}([0, 1])$ — двукрашенный детский рисунок на топологической модели \mathcal{X} , рёбра которого суть $\{\beta^{-1}((0, 1))\}$, чёрные вершины — $\{\beta^{-1}(\{0\})\}$, белые вершины — $\{\beta^{-1}(\{1\})\}$. Если (\mathcal{X}, β) — чистая пара Белого, то $\beta^{-1}([0, 1])$ — недвукрашенный детский рисунок на топологической модели \mathcal{X} , рёбра которого имеют вид $\{\beta^{-1}((0, 1))\}$ и вершины имеют вид $\{\beta^{-1}(\{0\})\}$ (см. [11, 18]).

Более того, справедлив следующий результат.

Теорема 2.12 [11, 18]. Любой недвукрашенный детский рисунок может быть получен посредством приведённой выше конструкции из некоторой комплексной чистой пары Белого. Эта пара определяется единственным образом с точностью до изоморфизма.

Похожий результат справедлив для двукрашенных детских рисунков и (не обязательно чистых) пар Белого (см. [1]).

Связь между детскими рисунками и парами Белого оказывается ещё более глубокой.

Определение 2.13. Морфизм двукрашенных детских рисунков

$$D_1 = (X_1, \Gamma_1) \rightarrow D_2 = (X_2, \Gamma_2) -$$

это разветвлённое накрытие ориентируемых поверхностей $f: X_1 \rightarrow X_2$, при котором $f^{-1}(\Gamma_2) = \Gamma_1$.

Определение 2.14. Категория \mathcal{DESS} определяется следующим образом: её объектами являются двукрашенные детские рисунки, морфизмы между ними определены выше.

Определение 2.15. Объектами категории $\mathcal{BELPAIRS}$ являются пары Белого. Морфизм пар Белого $\mu: (\mathcal{X}_1, \beta_1) \rightarrow (\mathcal{X}_2, \beta_2)$ — это морфизм алгебраических кривых $\mu: \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$, такой что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_1 & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{X}_2 \\ & \searrow \beta_1 & \swarrow \beta_2 \\ & \mathbb{CP}^1 & \end{array}$$

является коммутативной.

Теорема 2.16 [1]. Категории \mathcal{DESS} и $\mathcal{BELPAIRS}$ являются эквивалентными.

Аналогичным способом определяются категории недвукрашенных детских рисунков и чистых пар Белого, они также являются эквивалентными.

2.3. Определяющие системы и паразитические решения

Теорема 2.17. Пусть

$$\text{Val} := \langle a_1, \dots, a_\alpha \mid w_1, \dots, w_\omega \mid c_1, \dots, c_\gamma \rangle -$$

некоторый реализуемый комбинаторный тип, \mathcal{X} — гладкая неприводимая кривая рода $g = \frac{1}{2}(2 - \alpha - \omega + n - \gamma)$ над \mathbb{C} . Предположим, что существуют такие попарно различные точки

$$A_1, \dots, A_\alpha, W_1, \dots, W_\omega, C_1, \dots, C_\gamma \in \mathcal{X}$$

и функция $\beta \in \mathbb{C}(\mathcal{X})$, что справедливы следующие равенства для дивизоров:

$$(\beta) = \sum_{j=1}^{\alpha} a_j A_j - \sum_{j=1}^{\gamma} c_j C_j, \quad (\beta - 1) = \sum_{j=1}^{\omega} w_j W_j - \sum_{j=1}^{\gamma} c_j C_j.$$

Тогда (\mathcal{X}, β) — пара Белого.

Доказательство. Предположим, что β имеет критическое значение $V \notin \{0, 1, \infty\}$. В этом случае прообраз V является эффективным (так как ветвления β над точкой ∞ уже посчитаны). Следовательно,

$$(d\beta) = \sum_{j=1}^{\alpha} (a_j - 1)A_j + \sum_{j=1}^{\omega} (w_j - 1)W_j - \sum_{j=1}^{\gamma} (c_j + 1)C_j + V.$$

Вычислим степени дивизоров с обеих сторон этого уравнения. В левой части получаем

$$\deg(d\beta) = 2g - 2.$$

В правой части, так как точки A_i, W_j, C_k попарно различны, получаем

$$\begin{aligned} \deg\left(\sum_{j=1}^{\alpha} (a_j - 1)A_j + \sum_{j=1}^{\omega} (w_j - 1)W_j - \sum_{j=1}^{\gamma} (c_j + 1)C_j + V\right) &= \\ &= \sum_{j=1}^{\alpha} (a_j - 1) + \sum_{j=1}^{\omega} (w_j - 1) - \sum_{j=1}^{\gamma} (c_j + 1) + \deg W = \\ &= \sum_{j=1}^{\alpha} a_j - \alpha + \sum_{j=1}^{\omega} w_j - \omega - \sum_{j=1}^{\gamma} c_j - \gamma + \deg V. \end{aligned}$$

Так как Val — комбинаторный тип, получаем, что

$$\sum_{j=1}^{\alpha} a_j = \sum_{j=1}^{\omega} w_j = \sum_{j=1}^{\gamma} c_j = n.$$

Следовательно, $\deg(d\beta) = 2g - 2 + \deg V$, поэтому $\deg V = 0$. \square

Заметим, что результат не будет справедливым, если мы опустим предположение, что точки A_i, B_j, C_k являются попарно различными. Далее будут приведены соответствующие примеры.

Теперь на базе этой теоремы можно построить систему уравнений, определяющую пару Белого заданного реализуемого комбинаторного типа.

2.4. Уравнения в пространствах модулей

Пусть $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ обозначает пространство модулей алгебраических кривых рода g над \mathbb{C} .

Определение 2.18. Для каждой последовательности положительных чисел

$$\text{Val} := \langle a_1, \dots, a_\alpha \mid w_1, \dots, w_\omega \mid c_1, \dots, c_\gamma \rangle,$$

удовлетворяющей условию

$$\sum_{i=1}^{\alpha} a_i = \sum_{j=1}^{\omega} w_j = \sum_{k=1}^{\gamma} c_k,$$

обозначим

$$n = \sum_{j=1}^{\alpha} a_j, \quad g = \frac{1}{2}(2 + n - \alpha - \omega - \gamma)$$

и рассмотрим следующую систему уравнений в пространстве $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$. Существуют кривая $\mathcal{X} \in \mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ и точки

$$A_1, \dots, A_\alpha, W_1, \dots, W_\omega, C_1, \dots, C_\gamma \in \mathcal{X},$$

такие что существует рациональная функция $\beta: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ с дивизорами функций β и $\beta - 1$, равными

$$\begin{cases} (\beta) = \sum_{j=1}^{\alpha} a_j A_j - \sum_{j=1}^{\gamma} c_j C_j, \\ (\beta - 1) = \sum_{j=1}^{\omega} w_j W_j - \sum_{j=1}^{\gamma} c_j C_j. \end{cases} \quad (2.1)$$

Эта система называется *определяющей системой* для пары Белого в пространстве модулей и обозначается $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\text{Val})$.

2.5. Уравнения в пространствах Гурвица

Пусть $\mathcal{H}_{g,n}(\mathbb{C})$ обозначает пространство Гурвица связных алгебраических кривых рода g над полем \mathbb{C} с непостоянными рациональными функциями степени n на этих кривых.

Определение 2.19. Для любой последовательности положительных чисел

$$\text{Val} := \langle a_1, \dots, a_\alpha \mid w_1, \dots, w_\omega \mid c_1, \dots, c_\gamma \rangle,$$

удовлетворяющей условию

$$\sum_{i=1}^{\alpha} a_i = \sum_{j=1}^{\omega} w_j = \sum_{k=1}^{\gamma} c_k,$$

будем рассматривать следующую систему уравнений в $\mathcal{H}_{g,n}(\mathbb{C})$, где

$$n = \sum_{j=1}^{\alpha} a_j, \quad g = \frac{1}{2}(2 + n - \alpha - \omega - \gamma).$$

Существуют пара $(\mathcal{X}, \beta) \in \mathcal{H}_{g,n}$ и точки

$$A_1, \dots, A_\alpha, W_1, \dots, W_\omega, C_1, \dots, C_\gamma \in \mathcal{X},$$

такие что справедливы следующие равенства для дивизоров:

$$\begin{cases} (\beta) = \sum_{j=1}^{\alpha} a_j A_j - \sum_{j=1}^{\gamma} c_j C_j, \\ (\beta - 1) = \sum_{j=1}^{\omega} w_j W_j - \sum_{j=1}^{\gamma} c_j C_j. \end{cases} \quad (2.2)$$

Эта система называется *определяющей системой* для пары Белого в пространстве Гурвица и обозначается $\mathcal{S}(\text{Val})$.

2.6. Некоторые замечания и случаи родов 0 и 1

Замечание 2.20. Из теорем 2.17 и 2.12 получаем, что если Val задаёт комбинаторный тип, то системы (2.1), (2.2) имеют решения и пары Белого детских рисунков, отвечающих Val , содержатся среди этих решений. В самом деле, обе системы в точности утверждают, что прообразами $0, 1$ и ∞ являются $A_1, \dots, A_\alpha, W_1, \dots, W_\omega$ и C_1, \dots, C_γ соответственно и их кратности равняются заданным валентностям. Также по теореме 2.12 каждая пара Белого любого детского рисунка, имеющего комбинаторный тип Val , может быть найдена из систем (2.1), (2.2). Отдельной задачей является установление соответствия между всеми рисунками, отвечающими Val , и всеми парами Белого степени n , найденными как решения этих систем уравнений. Эта задача может быть решена непосредственным рисованием $\beta^{-1}([0, 1])$. Иногда для установления этого соответствия могут быть использованы также некоторые соображения симметрии. Мы не будем останавливаться на вопросе поиска этого соответствия.

Если $g = 0$, мы можем переписать системы (2.1) и (2.2) в следующей более явной форме.

Определение 2.21. Пусть Val — некоторый реализуемый комбинаторный тип,

$$g := \sum_{j=1}^{\alpha} a_j = 0.$$

Тогда система полиномиальных уравнений $\mathcal{S}_0(\text{Val})$, полученная из формального полиномиального равенства

$$K_1(z - A_1)^{a_1} \dots (z - A_\alpha)^{a_\alpha} - (z - C_1)^{c_1} \dots (z - C_\gamma)^{c_\gamma} = K_2(z - W_1)^{w_1} \dots (z - W_\omega)^{w_\omega}$$

рассмотрением коэффициентов при одинаковых степенях переменной z в обеих частях этого равенства, называется *определяющей системой* для функций Белого, отвечающих различным реализациям комбинаторного типа Val .

Если $g = 1$, то определяющая система выглядит следующим образом.

Определение 2.22. Пусть E_λ обозначает кривую, задаваемую уравнением $y^2 = x(x - 1)(x - \lambda)$, $D: \mathbb{C}(E_\lambda) \rightarrow \mathbb{C}(E_\lambda)$ — дифференциальный оператор на рациональных функциях на E_λ , определяемый равенством

$$Df := \frac{df}{(dx)/y} = y \frac{f'_x + (3x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda)f'_y}{x}.$$

Пусть задана функция

$$\beta := \frac{P(x) + Q(x)y}{R(x) + S(x)y},$$

где

$$P(x) := \sum_{i=0}^n p_i x^i, \quad R(x) := \sum_{i=0}^n r_i x^i, \quad Q(x) := \sum_{i=0}^{n-2} q_i x^i, \quad S(x) := \sum_{i=0}^{n-2} s_i x^i.$$

Тогда *определяющая система* имеет вид

$$\begin{cases} y(A_i)^2 = x(A_i)(x(A_i) - 1)(x(A_i) - \lambda), & i = 1, \dots, \alpha, \\ y(B_j)^2 = x(B_j)(x(B_j) - 1)(x(B_j) - \lambda), & j = 1, \dots, \omega, \\ y(C_k)^2 = x(C_k)(x(C_k) - 1)(x(C_k) - \lambda), & k = 1, \dots, \gamma, \\ (D^{(l_i)}\beta)(A_i) = 0, & l_i = 0, \dots, a_i - 1, \quad i = 1, \dots, \alpha, \\ (D^{(m_j)}\beta)(B_j) = 0, & m_j = 0, \dots, w_j - 1, \quad j = 1, \dots, \omega, \\ (D^{(t_k)}\beta)(C_k) = 0, & t_k = 0, \dots, c_k - 1, \quad k = 1, \dots, \gamma. \end{cases}$$

Здесь параметр λ , точки $A_i, B_j, C_k \in E_\lambda$ и коэффициенты p_i, q_j, r_l, s_m — неизвестные.

2.7. Паразитические решения определяющих систем

Определение 2.23. Пусть Val задаёт реализуемый комбинаторный тип. Решение системы $\mathcal{S}(\text{Val})$ (или системы $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(\text{Val})$) называется *паразитическим*, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1) род кривой \mathcal{X} не равен $\frac{1}{2} \left(2 + \sum_{j=1}^{\alpha} a_j - \alpha - \omega - \gamma \right)$;
- 2) $\deg \beta$ отлично от $\sum_{j=1}^{\alpha} a_j$ (число рёбер детского рисунка);
- 3) β не является функцией Белого;
- 4) β является функцией Белого некоторого детского рисунка, комбинаторный тип которого отличается от Val .

Определение 2.24. Паразитическое решение называется *геометрическим*, если (\mathcal{X}, β) является парой Белого, и *негеометрическим* в противном случае.

Некоторые исследования определяющих систем уравнений и паразитических решений для детских рисунков рода 0 были проведены в [3, 6, 7].

3. Необходимое условие для существования паразитического решения в случае рода 0

Как следует из теоремы 2.17, паразитические решения возникают только в случае слияния некоторых из точек A_i, W_j, C_k друг с другом. Для того чтобы «предсказывать» паразитические решения, надо понять, какие точки могут совпадать, а какие не могут.

Теорема 3.1. Пусть Val — некоторый комбинаторный тип рода 0 (т. е. $2 + \sum_{i=1}^{\alpha} a_i - \alpha - \omega - \gamma = 0$). Предположим, что у $\mathcal{S}_0(\text{Val})$ есть геометрическое паразитическое решение. Тогда существуют индексы $i, j, 1 \leq i \leq \alpha, 1 \leq j \leq \gamma$, такие что $A_i = C_j$.

Доказательство. Будем обозначать найденное геометрическое паразитическое решение через σ . Так как это решение является геометрическим, то существует детский рисунок, отвечающий σ . Обозначим этот рисунок через D_σ . Так как Val — комбинаторный тип, обозначим через D какой-нибудь детский рисунок, отвечающий этому типу, и пусть β — его функция Белого. Предположим, что для произвольных i, j для решения σ справедливо, что $A_i \neq C_j$, и рассмотрим следующие случаи.

1. Существует пара $(i, j), i \neq j$, такая что $A_i = A_j$. Так как отсутствуют сокращения, сумма степеней в числителе σ равна сумме степеней в числителе β . Следовательно, число рёбер D_σ совпадает с числом ребер D , однако число чёрных вершин D_σ не превышает $\alpha - 1$. Но D_σ должен удовлетворять формуле Эйлера, которая приводит к тому, что или число граней, или число белых вершин должно превышать соответствующее число для D . Следовательно, σ не является решением для $\mathcal{S}_0(\text{Val})$. Противоречие.

2. Существует пара (i, j) , такая что $C_i = C_j$, или существует пара (i, j) , такая что $W_i = W_j$. Эти случаи рассматриваются аналогично предыдущему.

3. Существует пара (i, j) , такая что $A_i = W_j$. Теперь, записывая

$$\begin{aligned} -(z - C_1)^{c_1} \dots (z - C_\gamma)^{c_\gamma} = \\ = -K_1(z - A_1)^{a_1} \dots (z - A_\alpha)^{a_\alpha} + K_2(z - W_1)^{w_1} \dots (z - W_\omega)^{w_\omega} \end{aligned}$$

и подставляя $B_j = A_i$, получим, что правая часть этого равенства делится на $z - A_i$. Тогда по основной теореме алгебры существует такое k , что $z - C_k$ делится на $z - A_i$. Значит, $C_k = A_i$, что противоречит нашему предположению. \square

Теорема 3.2. Пусть Val — комбинаторный тип рода 0 (т. е. $2 + \sum_{i=1}^{\alpha} a_i - \alpha - \omega - \gamma = 0$). Предположим, что у $\mathcal{S}_0(\text{Val})$ есть паразитическое решение. Тогда существуют индексы $i, j, 1 \leq i \leq \alpha, 1 \leq j \leq \gamma$, такие что $A_i = C_j$.

Доказательство. Пусть $n = \sum_{j=1}^{\alpha} a_j$ равняется числу вершин детского рисунка, отвечающего Val . Предположим, что

$$(K_1, K_2; A_1, \dots, A_\alpha; C_1, \dots, C_\gamma; W_1, \dots, W_\omega)$$

является решением $\mathcal{S}_0(\text{Val})$ и для всех $i, j, i = 1, \dots, \alpha, j = 1, \dots, \gamma$, справедливо, что $A_i \neq C_j$. Тогда степень функции

$$\sigma = K_1 \frac{(z - A_1)^{a_1} \dots (z - A_\alpha)^{a_\alpha}}{(z - C_1)^{c_1} \dots (z - C_\gamma)^{c_\gamma}}$$

равна $2n$. Следовательно, её производная имеет в точности $4n - 2$ нуля, с учётом кратности. В то же время, как следует из системы $\mathcal{S}(\text{Val})$, σ имеет не менее

$$\sum_{i=1}^{\alpha} a_i - \alpha + \sum_{j=1}^{\gamma} c_j - \gamma + 2n - n = 2n - \alpha + 2n - \gamma + n = 4n - 2$$

критических значений, с учётом кратности. Следовательно, у σ нет критических точек, кроме

$$A_1, \dots, A_\alpha; C_1, \dots, C_\gamma; W_1, \dots, W_\omega.$$

Однако значения σ в этих точках задаются уравнениями $\mathcal{S}_0(\text{Val})$ и принадлежат множеству $\{0, 1, \infty\}$. Следовательно, σ является функцией Белого. По определению, если σ является паразитическим решением, то оно геометрическое паразитическое решение. Теорема 3.1 завершает доказательство. \square

4. Комбинаторика паразитических решений

Теорема 4.1. Пусть

$$\text{Val} := \langle a_1, \dots, a_\alpha \mid w_1, \dots, w_\omega \mid c_1, \dots, c_\gamma \rangle -$$

некоторая последовательность положительных целых чисел, не обязательно комбинаторный тип. Множество различных (с точностью до дробно-линейных преобразований) геометрических паразитических решений $\mathcal{S}(\text{Val})$ является конечным.

Доказательство. Пусть D_σ — детский рисунок, отвечающий паразитическому решению σ . Так как D_σ удовлетворяет условию $\mathcal{S}(\text{Val})$, получаем

$$\alpha(D_\sigma) \leq \alpha, \quad \omega(D_\sigma) \leq \omega, \quad \gamma(D_\sigma) \leq \gamma, \quad n(D_\sigma) \leq \sum_{j=1}^{\alpha} a_j.$$

Кроме того, комбинаторный тип D_σ имеет верхнюю границу Val. По [8] получаем, что возникает только конечное число абстрактных графов. Каждый абстрактный граф вложим в поверхность конечным числом способов, а значит, порождает только конечное число детских рисунков. По теореме об эквивалентности категорий пар Белого и детских рисунков (см. [1, 18]) существует только конечное множество B различных, с точностью до дробно-линейных преобразований, функций Белого, отвечающих заданному конечному множеству детских

рисунков. Следовательно, все решения $\mathcal{S}(\text{Val})$ содержатся в конечном множестве функций Белого, отвечающих рисунку, комбинаторный тип которого поординатно ограничен сверху Val . Тогда $\mathcal{S}(\text{Val})$ имеет не более конечного числа геометрических паразитических решений. \square

Замечание 4.2. Заметим, что даже в простейших случаях может получиться бесконечное число негеометрических паразитических решений.

Пример 4.3. $D_{0,2,0}$ — детский рисунок следующего вида.

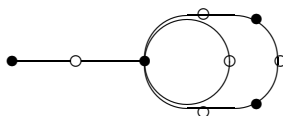


Рис. 2

Теорема 4.4. Комбинаторный тип

$$\text{Val}_{0,2,0} := \langle 5, 2, 2, 1 \mid 2, 2, 2, 2, 2 \mid 5, 4, 1 \rangle,$$

единственная реализация которого — детский рисунок $D_{0,2,0}$ из примера 4.3, обладает однопараметрическим семейством негеометрических паразитических решений.

Доказательство. Мы будем использовать следующие обозначения для комплексных координат критических точек β . Пусть A_0 — координата вершины валентности 1 рисунка $D_{0,2,0}$, A_1 и A_2 — координаты чёрных вершин валентности 2, A — координата вершины валентности 5, C_1, C_2, C_3 — координаты центров граней валентностей 1, 4, 5 соответственно, K_1 — коэффициент пропорциональности. Прямые подстановки показывают, что значения

$$A_0 = -1, \quad A = C_2 = 0, \quad A_1 = t, \quad A_2 = -\frac{1}{8} \frac{8t+5}{2t+1},$$

$$C_1 = \frac{1}{8} \frac{(1+12t+16t^2)^2}{(4t+3)(4t+1)(2t+1)}, \quad C_3 = \infty, \quad K_1 = 8^3 \frac{2t+1}{(4t+3)(4t+1)}$$

порождают однопараметрическое семейство паразитических решений

$$\sigma = 8^3 \frac{2t+1}{(4t+3)(4t+1)} \frac{z(z+1)(z-t)^2(z+\frac{8t+5}{16t+8})^2}{z - \frac{(1+12t+16t^2)^2}{8(4t+3)(4t+1)(2t+1)}}.$$

Вычисляя производную по z от функции σ и сравнивая значения σ в её корнях, легко установить, что если $t = 0$ или $t = -\frac{5}{8}$, то σ является функцией Белого и для любых других значений t функция σ не является функцией Белого. \square

Следствие 4.5. Существуют комбинаторные типы, обладающие бесконечным числом паразитических решений.

5. Серии графов с геометрическими паразитическими решениями

Теорема 5.1. Пусть

$$\text{Val} := \left\langle a_1, \dots, a_\varphi, a, \underbrace{2, \dots, 2}_{2\mu} \mid w_1, \dots, w_\psi, \underbrace{2, \dots, 2}_{2\mu+2} \mid c_1, \dots, c_\xi, 2\mu + 2 \right\rangle -$$

реализуемый комбинаторный тип некоторого детского рисунка D рода 0, в который входит следующий фрагмент.

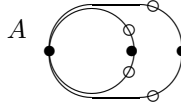


Рис. 3

Валентность вершины в точке A равна $a \geq 5$, обе простые замкнутые цепи этого фрагмента содержат μ чёрных вершин валентности 2 и $\mu + 1$ белую вершину валентности 2, причём валентность грани между этими двумя цепями равна $2\mu + 2$, что означает, что между ними нет других рёбер детского рисунка D . Тогда у системы $\mathcal{S}_0(\text{Val})$ есть геометрическое паразитическое решение σ , отвечающее детскому рисунку D_σ комбинаторного типа

$$\text{Val}_\sigma := \left\langle a_1, \dots, a_\varphi, a - 2, \underbrace{2, \dots, 2}_\mu \mid w_1, \dots, w_\psi, \underbrace{2, \dots, 2}_{\mu+1} \mid c_1, \dots, c_\xi \right\rangle,$$

который может быть получен из D удалением грани валентности $2\mu + 2$ вместе с одной из двух простых замкнутых цепей, изображённых на рисунке 3.

Доказательство. Система $\mathcal{S}(\text{Val})$ задаётся формальным равенством многочленов

$$\begin{aligned} & - K(z - C_1)^{c_1} \dots (z - C_\xi)^{c_\xi} (z - C)^{2\mu+2} + \\ & + (z - A_1)^{a_1} \dots (z - A_\varphi)^{a_\varphi} (z - A)^a (z - M_1)^2 \dots (z - M_{2\mu})^2 = \\ & = (K - 1)(z - W_1)^{w_1} \dots (z - W_\psi)^{w_\psi} (z - N_1)^2 \dots (z - N_{2\mu+2})^2, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где буквы C_i обозначают комплексные числа, равные координатам центров граней детского рисунка D , A_i и M_i — координаты чёрных вершин, W_i и N_i — координаты белых вершин рисунка D .

Рассмотрим теперь детский рисунок D_σ , который отличается от D только тем, что вместо фрагмента, изображённого на рис. 3, содержит простую замкнутую цепь, приведённую на рис. 4. Валентность вершины в точке A равна $a - 2$, и существуют μ чёрных и $\mu + 1$ белая вершина валентности 2, входящие в эту цепь. Легко проверить, что комбинаторный тип D_σ равен Val_σ .

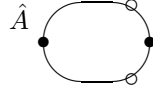


Рис. 4

Следовательно, существуют комплексные числа

$$\hat{K}; \hat{A}_1, \dots, \hat{A}_\varphi, \hat{A}, \hat{M}_1, \dots, \hat{M}_\mu; \hat{C}_1, \dots, \hat{C}_\xi \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1,$$

такие что рациональная функция

$$\sigma(z) = \hat{K} \frac{(z - \hat{A}_1)^{a_1} \dots (z - \hat{A}_\varphi)^{a_\varphi} (z - \hat{A})^{a-2} (z - \hat{M}_1)^2 \dots (z - \hat{M}_\mu)^2}{(z - \hat{C}_1)^{c_1} \dots (z - \hat{C}_\xi)^{c_\xi}}$$

является функцией Белого для D_σ . Тогда существуют комплексные числа

$$\hat{W}_1, \dots, \hat{W}_\psi, \hat{N}_1, \dots, \hat{N}_{\mu+1} \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1,$$

такие что следующее уравнение справедливо для всех $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$:

$$\sigma(z) - 1 = (\hat{K} - 1) \frac{(z - \hat{W}_1)^{w_1} \dots (z - \hat{W}_\psi)^{w_\psi} (z - \hat{N}_1)^2 \dots (z - \hat{N}_{\mu+1})^2}{(z - \hat{C}_1)^{c_1} \dots (z - \hat{C}_\xi)^{c_\xi}}. \quad (5.2)$$

Проверим, что значения

$$\begin{aligned} K &= \hat{K}; \quad A_1 = \hat{A}_1, \dots, \quad A_\varphi = \hat{A}_\varphi, \quad A = \hat{A}, \\ M_1 &= \hat{M}_1, \dots, \quad M_\mu = \hat{M}_\mu, \quad M_{\mu+1} = \hat{A}, \dots, \quad M_{2\mu} = \hat{A}; \\ C_1 &= \hat{C}_1, \dots, \quad C_\psi = \hat{C}_\psi, \quad C = \hat{A}; \\ W_1 &= \hat{W}_1, \dots, \quad W_\psi = \hat{W}_\psi; \\ N_1 &= \hat{N}_1, \dots, \quad N_{\mu+1} = \hat{N}_{\mu+1}, \quad N_{\mu+2} = \hat{A}, \dots, \quad N_{2\mu+2} = \hat{A} \end{aligned} \quad (5.3)$$

удовлетворяют системе уравнений, определяемой равенством (5.1). В самом деле, как следует из (5.2), справедливо формальное равенство многочленов

$$\begin{aligned} & - \hat{K} (z - \hat{C}_1)^{c_1} \dots (z - \hat{C}_\psi)^{c_\psi} + \\ & + (z - \hat{A}_1)^{a_1} \dots (z - \hat{A}_\varphi)^{a_\varphi} (z - \hat{A})^{a-2} (z - \hat{M}_1)^2 \dots (z - \hat{M}_\mu)^2 = \\ & = (\hat{K} - 1) (z - \hat{W}_1)^{w_1} \dots (z - \hat{W}_\psi)^{w_\psi} (z - \hat{N}_1)^2 \dots (z - \hat{N}_{\mu+1})^2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Домножая его на $(z - \hat{A})^{2\mu+2}$ с обеих сторон, мы получаем равенство для произвольного $z \in \mathbb{C}$. Однако, как легко заметить, подставляя значения из (5.3) в уравнение (5.1), мы получим равенство (5.4), домноженное на $(z - \hat{A})^{2\mu+2}$ с обеих сторон, т. е. верное равенство. Следовательно, последовательность (5.3) удовлетворяет системе $\mathcal{S}_0(\text{Val})$. Тот факт, что решение является геометрическим и удовлетворяет условиям теоремы, следует напрямую из алгоритма его построения. \square

Заметим, что существует бесконечно много комбинаторных типов, удовлетворяющих этой теореме.

Следствие 5.2. Пусть $D_{\lambda\mu}$ — следующий детский рисунок рода 0.

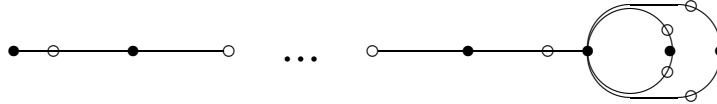


Рис. 5

Он состоит из «ручки» с λ белыми и λ чёрными вершинами валентности 2 и двух простых замкнутых цепей, имеющих общую вершину и $\mu + 1$ белую и μ чёрных вершин валентности 2 на каждой из этих цепей. Пусть

$$\text{Val} = \left\langle \underbrace{5, 2, \dots, 2, 1}_{\lambda+2\mu} \mid \underbrace{2, \dots, 2}_{\lambda+2\mu+3} \mid 2\lambda + \mu + 3, 2\mu + 2, \mu + 1 \right\rangle,$$

его единственная реализация — $D_{\lambda\mu}$. Тогда для всех $\lambda \geq 0$ и $\mu \geq 0$ система $\mathcal{S}_0(\text{Val})$ имеет геометрическое паразитическое решение, отвечающее детскому рисунку $\hat{D}_{\lambda\mu}$, представленному на рис. 6.

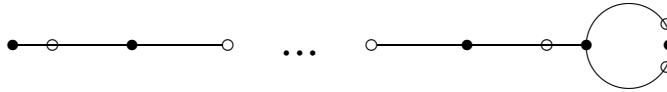


Рис. 6

Замечание 5.3. Отметим, что в приведённом выше примере раскраска не играет роли. В частности, подобный результат может быть получен, если самая левая вершина является белой, в то время как вершина валентности 5 остаётся чёрной.

6. Антивандермондовы системы и их решения

Определение 6.1. Функция Белого сферического детского рисунка, имеющего единственную грань с центром в бесконечности, является многочленом, и этот многочлен называется *многочленом Шабата*.

Заметим, что сферический рисунок имеет единственную грань тогда и только тогда, когда его граф является деревом.

Теорема 6.2. Пусть

$$\text{Val} = \langle a_1, \dots, a_\alpha \mid w_1, \dots, w_\omega \mid c_1 \rangle$$

задаёт реализуемый комбинаторный тип для сферического детского рисунка. Определяющая система для многочлена Шабата этого рисунка не имеет паразитических решений.

Теорема 6.6. *Для любых положительных целых чисел w_1, \dots, w_ω система (6.2) не имеет паразитических решений. Если w_1, \dots, w_ω попарно различны, то любое решение имеет кратность один.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что для произвольных положительных целых чисел w_1, \dots, w_ω существует дерево диаметра 4, белые вершины которого имеют валентности w_1, \dots, w_ω , центральная вершина имеет валентность ω и все другие чёрные вершины имеют валентность 1, т. е. такой комбинаторный тип (6.1) является реализуемым. Следовательно, по теореме 6.2 у системы (6.2) нет паразитических решений.

Если w_1, \dots, w_ω попарно различны, то существуют в точности $(\omega - 1)!$ неизоморфных деревьев, комбинаторный тип которых имеет вид (6.1). Так как у системы (6.2) нет паразитических решений, она также не имеет негеометрических паразитических решений. Следовательно, по теореме 4.1 у неё только конечное число решений. Следовательно, по теореме Безу [9, с. 268] система (6.2) имеет не более $(\omega - 1)!$ решений, а именно произведение степеней всех уравнений. Так как различным рисункам отвечают различные решения, мы получаем искомый результат. \square

Литература

- [1] Адрианов Н. М. Арифметическая теория графов на поверхностях: Дис... канд. физ.-мат. наук. — М., 1997.
- [2] Адрианов Н. М., Кочетков Ю. Ю., Шабат Г. Б., Суворов А. Д. Плоские деревья и группы Матье // *Фундамент. и прикл. мат.* — 1995. — Т. 1, вып. 2. — С. 377–384.
- [3] Амбург Н. Я., Крейнс Е. М., Шабат Г. Б. Паразитические решения систем уравнений, определяющих пары Белого плоских деревьев // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика.* — 2004. — № 1. — С. 20–25.
- [4] Белый Г. Б. О расширениях Галуа максимальных циклотомических полей // *Изв. АН СССР. Сер. мат.* — 1979. — Т. 43. — С. 269–276.
- [5] Кочетков Ю. Ю. Деревья диаметра 4 // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2002. — Т. 8, вып. 2. — С. 475–494.
- [6] Крейнс Е. М. Паразитические решения систем уравнений на функции Белого в пространствах Гурвица // *Успехи мат. наук.* — 2001. — Т. 56, № 6. — С. 155–156.
- [7] Крейнс Е. М. Семейства геометрических паразитических решений систем уравнений на функции Белого рода 0 // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2003. — Т. 9, вып. 1. — С. 103–111.
- [8] Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973.
- [9] Шафаревич И. Р. Основания алгебраической геометрии. — М.: Наука, 1972.
- [10] Bètréma J., Pérè D., Zvonkin A. Plane trees and their Shabat polynomials, catalog. — Rapport interne de LaBRI. No. 75–92. — Bordeaux, 1992.
- [11] Grothendieck A. Esquisse d'un programme // *London Math. Soc. Lect. Notes Ser. Vol. 242.* — Cambridge Univ. Press, 1997. — P. 5–48.

- [12] Iohvidov I. S. *Hankel and Toeplitz Matrices and Forms, Algebraic Theory*. — Boston: Birkhäuser, 1982.
- [13] Iwasaki K., Kimura H., Shimomura Sh., Yoshida M. *From Gauss to Painlevé*. — Vieweg Verlag, 1991. — (Aspects Math.; Vol. 16).
- [14] Kravanja P., van Barel M. *Computing the Zeros of Analytic Functions*. — Springer, 2000. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1727).
- [15] Lando S. K., Zvonkin A. K. *Graphs on Surfaces and Their Applications / With an appendix by D. Zagier*. — Springer, 2004. — (Encycl. Math. Sci.; Vol. 141).
- [16] Lochak P., Schneps L. *Geometric Galois Actions. Vol. 1, 2*. — Cambridge Univ. Press, 1997. — (London Math. Soc. Lect. Notes Ser.; Vol. 242, 243).
- [17] Looijenga E. Cellular decompositions of compactified moduli spaces of pointed curves // *The Moduli Space of Curves / R. Dijkgraaf et al., eds.* — Basel: Birkhäuser, 1995. — P. 369–400.
- [18] Shabat G. B., Voevodsky V. A. Drawing curves over number fields // *The Grothendieck Festschrift. Vol. III*. — Birkhäuser, 1990. — (Progress Math.; Vol. 88). — P. 199–227.
- [19] Shabat G., Zvonkin A. Plane trees and algebraic numbers // *Jerusalem Combinatorics. '93 / H. Barcelo, G. Kalai, eds.* — Amer. Math. Soc., 1994. — (Contemp. Math.; Vol. 178). — P. 233–275.
- [20] *The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants / L. Schneps, ed.* — Cambridge Univ. Press, 1994. — (London Math. Soc. Lect. Notes Ser.; Vol. 200).
- [21] Zvonkine D. *Strebel differentials on stable curves and Kontsevich's proof of Witten's conjecture*. — 2002. — [arXiv:math.AG/0209071](https://arxiv.org/abs/math/0209071).