Об отображениях, сохраняющих иммананты*

Б. КУЗЬМА
Институт математики, физики и механики, Любляна, Словения
Приморский университет, Копер, Словения
e-mail: bojan.kuzma@pef.upr.si

УДК 512.643

Ключевые слова: иммананты, отображения матриц.

Аннотация

Характеризуются отображения, переводящие один иммaнант в другой. В отличие от предыдущих результатов, не предполагается сюръективности или линейности таких отображений; рудиментом предыдущих ограничений является выполнение функционального тождества $d_\chi\bigl(\Phi(A)+\lambda\Phi(B)\bigr)=d_{\chi'}(A+\lambda B)$. Как мы покажем, одно это условие позволяет доказать линейность и сюръективность отображения Φ.

Abstract

B. Kuzma, A note on immanant preservers, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 4, pp. 113—120.

We study the maps that transform one immanant into another. No surjectivity or linearity is imposed; the rudiments of the former are weakly embedded into the functional equation via $d_\chi\bigl(\Phi(A)+\lambda\Phi(B)\bigr)=d_{\chi'}(A+\lambda B)$. We show that this property alone implies that Φ is linear and bijective.

1. Введение

Определитель (детерминант) является одной из наиболее известных числовых функцией на квадратных матрицах. Это понятие восходит к работам древних китайских и японских математиков, однако современное определение детерминанта приписывается Гауссу [15]. Поскольку определитель имеет множество разнообразных приложений, он всегда рассматривается в базовых курсах линейной алгебры (см. также [18]). Определитель вычисляется относительно легко: даже для матриц большого размера n достаточно примерно $2/3\,n^3$ арифметических операций [10, с. 499].

Аналогично вводится понятие перманента ($\operatorname{per} A$), его определение практически полностью повторяет определение детерминанта — достаточно только заменить знаки «минус» на «плюс». Перманент стал рассматриваться практически одновременно с определителем (см. [1, 3]), он постоянно используется в комбинаторных приложениях и в теории вероятностей [16]. Несмотря на простое

*Работа выполнена при частичной поддержке грантов Министерства науки Словении.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 4, с. 113—120.

определение задача вычисления перманента очень сложна [10, с. 499]. Возникает естественный вопрос, не существует ли линейного преобразования Φ, определённого на матрицах, переводящего перманент в определитель, т. е. такого, что $\operatorname{per} A = \det \Phi(A)$. По крайней мере на матрицах второго порядка такое предположение оказывается верным, а именно

$$\operatorname{per}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & -b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Однако аналогичная формула не верна для больших n. В самом деле, один из классических результатов теории линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты, состоит в том, что не существует такого линейного преобразования при $n \geqslant 3$ [2, 14].

Имманант — это понятие, объединяющее понятия определителя и перманента. Оно было введено в работах Шура для нужд теории представлений конечных групп, однако этот термин устоялся позднее, в работах Литтлвуда и Ричардсона [12] (см. также [11, гл. VI]). Для удобства мы приводим здесь это определение.

Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ обозначает алгебру всех $(n\times n)$-матриц над $\mathbb{F}$. Если χ является неприводимым комплексным характером симметрической группы S_n, то *имманант* d_χ, ассоциированный с χ, определяется формулой

$$d_\chi(A) := \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \chi(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} \quad \big(\text{для любой матрицы } A = (A_{ij})_{i,j} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})\big).$$

Эта формула включает понятия определителя (когда χ является характером, отвечающим чётности подстановки) и перманента (когда χ — характер единичного представления, тождественно равный 1).

Принимая во внимание отрицательное решение вопроса о конвертации перманента в определитель, Пирс [17, с. 38, 39] поставил вопрос о возможности конвертации посредством линейного отображения для произвольной пары имманантов. В [4] на этот вопрос был получен отрицательный ответ для любой пары различных имманантов, исключая единственный спорадический случай матриц порядка 4.

В [5] Коэлью и Дуфнер исследовали *сюръективные* отображения Φ пространства комплексных матриц, которые отображают один имманант d_χ в другой имманант $d_{\chi'}$. Линейность этого отображения не требовалась, вместо неё рассматривалось модифицированное условие сохранения:

$$d_\chi\big(\Phi(A) + \lambda\Phi(B)\big) = d_{\chi'}(A + \lambda B) \quad \text{для любых} \quad \lambda \in \mathbb{C},\ A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}). \tag{1}$$

Коэлью и Дуфнер показали, что такое отображение Φ является автоматически линейным. Их работа была развитием идей Долинара и Шемрла (см. [6]), которые рассматривали аналогичные вопросы для определителя. Напомним, что Долинар и Шемрл рассматривали сюръективные отображения с условием (1), где $d_\chi = \det = d_{\chi'}$, и доказали, что такое отображение Φ имеет вид $\Phi(A) = MAN$

или $\Phi(A) = MA^{\mathrm{tr}}N$, где $\det(MN) = 1$. Последний результат может рассматриваться как нелинейная версия теоремы Фробениуса [8].

Продолжая исследование Долинара и Шемрла, Тан и Янг [19] отказались от условия сюръективности для определителя. Более того, они получили результаты для произвольных полей, а не только для $\mathbb{C}$.

Следуя [19], мы откажемся от ограничения сюръективности для произвольных иммanантов. Таким образом, наша основная теорема обобщает как результат из [5], так и результат [19] и формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant 3$ — целое число. Предположим, что $\mathbb{F}$ — поле и $|\mathbb{F}| \geqslant n+1$. Пусть также χ, χ' являются двумя неприводимыми комплексными характерами симметрической группы S_n. Предположим, что $\Phi\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ — произвольное отображение, обладающее свойством*

$$d_\chi(A + \lambda B) = d_{\chi'}\big(\Phi(A) + \lambda\Phi(B)\big) \quad (A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}), \quad \lambda \in \mathbb{F}). \tag{2}$$

Тогда Φ автоматически является линейным и биективным.

2. Доказательство

Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — стандартный базис, состоящий из векторов-столбцов в $\mathbb{F}^n$, и пусть E_{ij} — стандартный базис для $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. *Обобщённой матрицей перестановки*, ассоциированной с заданной перестановкой $\tau \in \mathrm{S}_n$, является матрица вида $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i E_{i\,\tau(i)}$. Для фиксированной перестановки τ множество всех таких матриц является векторным пространством размерности n. Заметим, что в каждой строке i содержится не более одного ненулевого коэффициента, этот элемент находится в точности в позиции $\big(i, \tau(i)\big)$. Временно забывая вторую координату $\tau(i)$, рассмотрим эти матрицы как «векторы»-столбцы в $\mathbb{F}^n$. Будем производить операции, предполагающие использование только сложения и умножения на скаляры (матричное умножение не рассматривается) — см. доказательство леммы 4, приведённое ниже.

Пусть $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ и индексы (i, j) заданы. Обозначим через $B_{(i,j)}$ матрицу порядка n, полученную из B заменой (i, j)-го коэффициента на 1 и обнулением оставшихся коэффициентов i-й строки и j-го столбца. Заметим, что если χ — неприводимый характер, то $d_\chi(A + xB)$ является многочленом (степени не выше n) от x и коэффициент при x^{n-1} равен

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot d_\chi\big(B_{(i,j)}\big).$$

Определим также *χ-иммaнантную присоединённую матрицу* $\mathrm{adj}_\chi(B)$ для матрицы B как матрицу, (i, j)-й коэффициент которой равен $d_\chi\big(B_{(i,j)}\big)$. Легко проверить, что если $\chi = \varepsilon$ является характером, отвечающим чётности перестановки, то $\mathrm{adj}_\varepsilon(B)$ получается транспонированием из классической присоединённой матрицы, т. е. $\operatorname{adj}_\varepsilon(B)^{\mathrm{tr}} B = \det(B)\,\mathrm{Id}$. Тогда $d_\chi\bigl(B_{(i,j)}\bigr) = \det\bigl(B_{(i,j)}\bigr)$. Мы можем разложить этот определитель по i-й строке, чтобы получить (i,j)-й элемент разложения матрицы B.

Доказательство теоремы 1 основывается на следующих леммах.

Лемма 2. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0, 1, 1-n\}$. *Тогда* n *векторов* $\mathbf{x}_i := \lambda \mathbf{e}_i + \sum\limits_{k \neq i} \mathbf{e}_k \in \mathbb{F}^n$ *являются линейно независимыми.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу, i-й столбец которой равен $\mathbf{x}_i$. Она имеет вид $(\lambda - 1)\,\mathrm{Id} + \mathbb{I}$, где $\mathbb{I}$ — матрица, все коэффициенты которой равны 1. Её определитель равен $(\lambda-1)^{n-1}(n-1+\lambda) \neq 0$ (используется вид характеристического многочлена для матрицы ранга один $\mathbb{I}$), последнее показывает линейную независимость столбцов матрицы. $\square$

Лемма 3. *Пусть* $\tau \in \mathrm{S}_n$ *и* $B := \sum \alpha_i E_{i\,\tau(i)}$ — *невырожденная обобщённая матрица перестановки. Если* χ — *характер неприводимого представления, то*

$$\operatorname{adj}_\chi(B) = \Bigl(\chi(\tau) \cdot \prod_k \alpha_k\Bigr) \cdot \sum_i \alpha_i^{-1} E_{i\,\tau(i)}.$$

Доказательство. Если $(i,j) \neq \bigl(i, \tau(i)\bigr)$, то $B_{(i,j)}$ имеет нуль в столбце с номером $\tau(i)$, значит, $d_\chi\bigl(B_{(i,j)}\bigr) = 0$. Для указанных пар (i,j) получаем, что (i,j)-й коэффициент матрицы $\operatorname{adj}_\chi(B)$ обнуляется.

С другой стороны, равенство $(i,j) = \bigl(i, \tau(i)\bigr)$ позволяет получить, что

$$B_{(i,j)} = E_{i\,\tau(i)} + \sum_{k \neq i} \alpha_k E_{k\,\tau(k)} =: (\hat\beta_{kt})_{kt},$$

что совпадает с матрицей B за исключением коэффициента $\alpha_i E_{i\,\tau(i)}$, который принимает вид $E_{i\,\tau(i)}$. В сумме $d_\chi\bigl(B_{(i,j)}\bigr) = \sum\limits_\sigma \chi(\sigma) \prod \hat\beta_{k\sigma(k)}$ все слагаемые, за исключением одного, отвечающего перестановке $\sigma := \tau$, являются нулевыми. Следовательно,

$$d_\chi\bigl(B_{(i,j)}\bigr) = \chi(\tau) \prod \hat\beta_{k\tau(k)} = \chi(\tau) \cdot \frac{1}{\alpha_i} \prod \alpha_k.$$

Значит, $\bigl(i, \tau(i)\bigr)$-й коэффициент матрицы $\operatorname{adj}_\chi(B)$ равен $\bigl(\chi(\tau) \prod \alpha_k\bigr) \cdot \alpha_i^{-1}$. $\square$

Лемма 4. *Пусть* χ — *характер неприводимого представления, тогда существует* n^2 *матриц* $B_1, \ldots, B_{n^2}$, *таких что их* χ*-иммaнантные присоединённые матрицы* $C_i := \operatorname{adj}_\chi(B_i)$ *являются линейно независимыми.*

Доказательство. Достаточно показать, что χ-иммaнантные присоединённые матрицы для всех обобщённых матриц перестановок порождают всё $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. На самом деле достаточно доказать, что каждая матрица E_{ij} лежит в их оболочке. Существует перестановка τ, удовлетворяющая условию $\tau(i) = j$ и такая, что $\chi(\tau) \neq 0$. Так как $|\mathbb{F}| \geqslant 4$, то существует $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0, 1, (1-n)\}$. Рассмотрим теперь обобщённые матрицы перестановки $B_p := \lambda^{-1} E_{p\,\tau(p)} + \sum\limits_{i \neq p} E_{i\,\tau(i)}$ для $p = 1, \ldots, n$.

Из леммы 3 следует, что

$$\frac{\lambda}{\chi(\tau)} \cdot \mathrm{adj}_\chi(B_p) = \lambda E_{p\,\tau(p)} + \sum_{i \neq p} E_{i\,\tau(i)}.$$

Заметим, что ненулевые коэффициенты этих n матриц расположены на одних и тех же местах. Кроме того, в каждой строке с номером i существует ровно один ненулевой коэффициент, находящийся на месте $\big(i, \tau(i)\big)$. Забудем на время вторую координату. В этом случае каждую матрицу $\frac{\lambda}{\chi(\tau)} \cdot \mathrm{adj}_\chi(B_p)$ можно рассматривать как «вектор-столбец» в $\mathbb{F}^n$, все координаты которого, кроме p-й, равны 1, а p-я координата равна λ.

По лемме 2 и в силу выбора λ некоторая линейная комбинация этих «векторов» равна $\mathbf{e}_i$. Переведём все обратно на матричный язык: некоторая линейная комбинация $\frac{\lambda}{\chi(\tau)} \cdot \mathrm{adj}_\chi(B_p)$ равна матрице $E_{i\,\tau(i)} = E_{ij}$, как и утверждалось. □

Дальнейшее изложение следует схеме Тана и Янга [19]. Для удобства мы приводим здесь эти красивые рассуждения.

Доказательство теоремы 1. Для заданной матрицы A определим

$$v_A := (\text{1-я строка } A,\ \text{2-я строка } A, \ldots,\ n\text{-я строка } A)^{\mathrm{tr}} \in \mathbb{F}^{n^2}.$$

Для $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ $p(x) := d_\chi(A + xB)$ является многочленом (степени не выше n) от x, и коэффициент при x^{n-1} равен

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot d_\chi\big(B_{(i,j)}\big).$$

Следовательно, тождество (2) над полем $\mathbb{F}$, $|\mathbb{F}| \geqslant n+1$, преобразуется в тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot d_\chi\big(B_{(i,j)}\big) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Phi(A)_{ij} \cdot d_{\chi'}\big(\Phi(B)_{(i,j)}\big),$$

которое, в свою очередь, мы перепишем как

$$(v_{\mathrm{adj}_\chi(B)})^{\mathrm{tr}} v_A = \big(v_{\mathrm{adj}_{\chi'}(\Phi(B))}\big)^{\mathrm{tr}} v_{\Phi(A)}. \tag{3}$$

Теперь подставим матрицы $B_1, \ldots, B_{n^2}$ из леммы 4 на место матрицы B, обозначим $C_i := \mathrm{adj}_\chi(B_i)$. Пусть X и Y являются матрицами из $\mathrm{M}_{n^2}(\mathbb{F})$, заданными следующим образом:

$$X := \begin{pmatrix} (v_{C_1})^{\mathrm{tr}} \\ (v_{C_2})^{\mathrm{tr}} \\ \vdots \\ (v_{C_{n^2}})^{\mathrm{tr}} \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} \big(v_{\mathrm{adj}_{\chi'}(\Phi(B_1))}\big)^{\mathrm{tr}} \\ \big(v_{\mathrm{adj}_{\chi'}(\Phi(B_2))}\big)^{\mathrm{tr}} \\ \vdots \\ \big(v_{\mathrm{adj}_{\chi'}(\Phi(B_{n^2}))}\big)^{\mathrm{tr}} \end{pmatrix}.$$

Так как уравнение (3) справедливо для любой матрицы B, получим систему из n^2 уравнений

$$X v_A = Y v_{\Phi(A)}, \quad A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}). \tag{4}$$

В силу выбора матриц B_i n^2 матриц C_i являются линейно независимыми, значит, матрица X является невырожденной. Подставим $A := E_{ij}$ в уравнение (4), чтобы получить равенство

$$Xv_{E_{ij}} = Yv_{\Phi(E_{ij})} \quad (1 \leqslant i, j \leqslant n).$$

Следовательно, получаем $X\,\mathrm{Id}_{n^2} = YJ$, где J является матрицей порядка n^2 со столбцами $v_{\Phi(E_{ij})}$, расположенными в естественном порядке. Так как $X\,\mathrm{Id}_{n^2} = X$ является невырожденной матрицей, аналогичное равенство должно быть справедливо для матрицы Y. Соответственно, мы можем переписать уравнение (4) в виде

$$v_{\Phi(A)} = Y^{-1}Xv_A, \quad A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}),$$

т. е. $Y^{-1}X$ является матричным представлением для Φ в базисе E_{ij}, упорядоченном естественным способом. Однако такое отображение Φ является, очевидно, линейным и биективым. □

Заключительные замечания

1. Рассматривая $\lambda := 0$ в (2), получим $d_\chi\big(\Phi(A)\big) = d_{\chi'}(A)$, т. е. Φ является *линейной биекцией*, отображающей один имманант в другой.

Линейные преобразования имманантов известны. Для удобства приведём полную классификацию отображений, удовлетворяющих условию (2).

1) Не существует отображений, удовлетворяющих уравнению (2), исключая случай $\chi = \chi'$ и случай $n = 4$, когда характеры (χ, χ') отвечают разбиениям $[3, 1]$ и $[2, 1, 1]$ соответственно (см. [4, теорема 2.1]). Естественное взаимно-однозначное соответствие между характерами неприводимых представлений симметрической группы порядка n и разбиениями числа n описано в [9, лекция 4].
2) При $n = 4$ и $\{\chi, \chi'\} = \{[3,1], [2,1,1]\}$ отображение $\Upsilon_0 := X \mapsto C_0 * X$ преобразует d_χ в $d_{\chi'}$. Здесь $C_0 := \mathbb{I} - 2(E_{13} + E_{21} + E_{32} + E_{41} + E_{42} + E_{43})$ является матрицей с коэффициентами, равными ± 1, и $C_0 * X$ — произведение Адамара (= поэлементное произведение) [4, замечание 2.1]. В этом случае отображение удовлетворяет условию (2), если оно является композицией Υ_0 и отображения из пункта 3) ниже.
3) Если $n > 3$ и $\chi = \chi'$ являются нелинейными характерами, отображение удовлетворяет условию (2), если имеет вид $X \mapsto C * P_1XP_2$ или $A \mapsto C * P_2A^{\mathrm{tr}}P_2$ для некоторых матриц перестановок P_1, P_2 и некоторой матрицы C (см. [7, теорема 2.1] и [5, следствие 2.1]).
4) При $n = 3$ и $\chi = \chi' = [2, 1]$ отображение удовлетворяет условию (2), если имеет вид $X \mapsto C * Y(X)$ для некоторой матрицы C. Здесь $Y(X)$ получается из X перестановкой некоторых коэффициентов матрицы X (см. [7, теорема 3]).

5) В случае $\chi = \det = \chi'$ отображение удовлетворяет условию (2), если оно имеет вид $X \mapsto MXN$ или $X \mapsto MX^{\mathrm{tr}}N$, где $\det(MN) = 1$ (последний результат принадлежит Тану и Янгу [19]).
6) В случае $\chi = \mathrm{per} = \chi'$ отображение удовлетворяет условию (2), если оно имеет вид $X \mapsto PXQ$ или $X \mapsto PX^{\mathrm{tr}}Q$, где P, Q — обобщённые матрицы перестановок с условием $\mathrm{per}(PQ) = 1$ (см. [13]).

2. Аналогично мы можем доказать, что *сюръективное отображение* Φ, удовлетворяющее условию (2) не для всех, а только для двух различных ненулевых скаляров $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$, таких что $(\lambda_1/\lambda_2)^k \neq 1$ тогда и только тогда, когда $1 \leqslant k \leqslant n-2$, является линейным (и биективным). Доказательство вновь, по сути, повторяет доказательство теоремы 2 в [19]. Необходимо лишь воспользоваться результатом [5, лемма 3.6], позволяющим заключить, что равенство $d_{\chi'}(A+X) = d_{\chi'}(B+X)$ для всех X влечёт равенство $A = B$.

Литература

[1] Binet J. P. M. Mémoire sur un système de formules analytic, et leur application à des considérations géometriques // J. École Polyt. — 1812. — Vol. 9. — P. 280—302.

[2] Botta P. On the conversion of the determinant into the permanent // Can. Math. Bull. — 1968. — Vol. 11. — P. 31—34.

[3] Cauchy A.-L. Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeur égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entres les varibles qu'elles renferment // J. École Polyt. — 1812. — Vol. 10. — P. 29—112.

[4] Coelho M. P., Duffner M. A. On the conversion of an immanant into another // Linear and Multilinear Algebra. — 1998. — Vol. 44. — P. 111—130.

[5] Coelho M. P., Duffner M. A. Immanant preserving and immanant converting maps // Linear Algebra Appl. — 2006. — Vol. 418, no. 1. — P. 177—187.

[6] Dolinar G., Šemrl P. Determinant preserving maps on matrix algebras // Linear Algebra Appl. — 2002. — Vol. 348, nos. 1—3. — P. 189—192.

[7] Duffner M. A. On the conversion of an immanant into another // Linear and Multilinear Algebra. — 1998. — Vol. 44. — P. 111—130.

[8] Frobenius G. Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen // Sitzungsber. Deutsch. Akad. Wiss. — 1897. — S. 994—1015.

[9] Fulton W., Harris J. Representration Theory. — New York: Springer, 1991.

[10] Knuth D. E. The Art of Computer Programming. — Amsterdam: Addison-Wesley, 1997. — Vol. 2: Seminumerical algorithms.

[11] Littlewood D. E. The Theory of Group Characters. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1950.

[12] Littlewood D. E., Richardson A. R. Group characters and algebra // Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A — 1934. — Vol. 233. — P. 99—141.

[13] Marcus M., May F. C. The permanent function // Can. J. Math. — 1962. — Vol. 14. — P. 177—189.

[14] Marcus M., Minc H. On the relation between the determinant and the permanent // Illinois J. Math. — 1961. — Vol. 5. — P. 376—381.

[15] Miller G. A. On the history of determinants // Amer. Math. Monthly. — 1930. — Vol. 37, no. 5. — P. 216—219.

[16] Minc H. Permanents / With a foreword by Marvin Marcus // Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Vol. 6. — Reading: Addison-Wesley, 1978.

[17] Pierce S. Algebraic sets, polynomials, and other functions. A survey of linear preserver problems // Linear and Multilinear Algebra. — 1992. — Vol. 33. — P. 31—52.

[18] Sheldon A. Down with determinants! // Amer. Math. Monthly. — 1995. — Vol. 102, no. 2. — P. 139—154.

[19] Tan V., Wang F. On determinant preserver problems // Linear Algebra Appl. — 2003. — Vol. 369. — P. 311—317.