Решётка идемпотентных матриц над дистрибутивными решётками

В. Г. КУМАРОВ
Мурманский государственный педагогический университет
e-mail: kvg@bk.ru

УДК 512.643

Ключевые слова: идемпотентные матрицы, решёточные матрицы, булевы матрицы, решётки, квазипорядки.

Аннотация

В работе изучается частично упорядоченное множество идемпотентных матриц над дистрибутивными решётками относительно индуцированного частичного порядка, определённого на множестве решёточных матриц. Установлено, что это множество является решёткой, приводятся формулы для нахождения точной верхней и нижней граней. Описаны атомы и коатомы решётки идемпотентных матриц над конечными дистрибутивными решётками. Установлен ряд свойств решётки квазипорядков n-элементного множества $\mathrm{Qord}(n)$: доказано, что при $n \geqslant 3$ эта решётка не является градуированной, найдены наибольшая и наименьшая длины максимальной цепи. Установлено, что интервал $([E, I]_{\leqslant}, \leqslant)$ идемпотентных матриц порядка n над $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$-решётками изоморфен решётке квазипорядков $\mathrm{Qord}(n)$. С помощью этого изоморфизма найдена высота решётки идемпотентных $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матриц. Получен структурный критерий идемпотентности матриц над дистрибутивными решётками.

Abstract

V. G. Kumarov, Idempotent matrix lattices over distributive lattices, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 4, pp. 121—144.

In this paper, the partially ordered set of idempotent matrices over distributive lattices with the partial order induced by a set of lattice matrices is studied. It is proved that this set is a lattice; the formulas for meet and join calculation are obtained. In the lattice of idempotent matrices over a finite distributive lattice, all atoms and coatoms are described. We prove that the lattice of quasi-orders over an n-element set $\mathrm{Qord}(n)$ is not graduated for $n \geqslant 3$ and calculate the greatest and least lengths of maximal chains in this lattice. We also prove that the interval $([I, J]_{\leqslant}, \leqslant)$ of idempotent $(n \times n)$-matrices over $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$-lattices is isomorphic to the lattice of quasi-orders $\mathrm{Qord}(n)$. Using this isomorphism, we calculate the lattice height of idempotent $(\tilde{0}, \tilde{1})$-matrices. We obtain a structural criterion of idempotent matrices over distributive lattices.

Обозначения и терминология

Пусть P — некоторое множество. Обозначим через $|P|$ число элементов множества P, $P \times P = \{(a, b) \mid a, b \in P\}$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 4, с. 121—144.

Любое подмножество $\rho \subseteq P \times P$ называется бинарным отношением на множестве P. Если $(a, b) \in \rho$, то говорят, что элемент a находится в отношении ρ с элементом b, и пишут $a \,\rho\, b$. Бинарное отношение $\rho \subseteq P \times P$ называется

— *рефлексивным*, если $a \,\rho\, a$ для любого $a \in P$;
— *антисимметричным*, если для любых $a, b \in P$ из того, что $a \,\rho\, b$ и $b \,\rho\, a$, следует $a = b$;
— *транзитивным*, если для любых $a, b, c \in P$ из того, что $a \,\rho\, b$ и $b \,\rho\, c$, следует $a \,\rho\, c$.

Бинарное отношение называется отношением частичного порядка, если оно обладает свойствами рефлективности, антисимметричности и транзитивности. Бинарное отношение, обладающее свойствами рефлективности и транзитивности, называется квазипорядком.

Система (P, ρ), где ρ — частичный порядок на множестве P, называется частично упорядоченным множеством. В дальнейшем частичный порядок мы обозначаем через $\leqslant$.

Частично упорядоченные множества $(P_1, \leqslant_1)$ и $(P_2, \leqslant_2)$ называются изоморфными, если существует такое взаимно-однозначное отображение $\varphi \colon P_1 \to P_2$, что для любых $a, b \in P_1$ неравенство $a \leqslant_1 b$ равносильно неравенству $\varphi(a) \leqslant_2 \varphi(b)$.

Пусть $(P, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Элементы $a, b \in P$ называются сравнимыми по отношению $\leqslant$, если $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$. Частично упорядоченное множество $(P, \leqslant)$, любые два элемента которого сравнимы по отношению $\leqslant$, называется линейно упорядоченным множеством или цепью.

Элемент $a \in P$ называется минимальным (максимальным) элементом частично упорядоченного множества $(P, \leqslant)$, если не существует такого элемента $b \in P$, что $b \leqslant a$ $(a \leqslant b)$ и $b \neq a$. Множество минимальных (максимальных) элементов частично упорядоченного множества $(P, \leqslant)$, если оно существует, мы будем обозначать через $\min P$ $(\max P)$. Если множество $\min P$ $(\max P)$ состоит из одного элемента, то этот элемент называется наименьшим (наибольшим) элементом частично упорядоченного множества $(P, \leqslant)$ и обозначается через $\tilde{0}$ $(\tilde{1})$.

Пусть $(P, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, $a, b, c \in P$ и $a \leqslant b$. Обозначим

$$[a, b] = \{x \in P \mid a \leqslant x \leqslant b\}, \quad [c) = \{x \in P \mid c \leqslant x\}, \quad (c] = \{x \in P \mid x \leqslant c\}.$$

Если $|\,[a, b]\,| = 2$, то говорят, что элемент a покрывает элемент b (или b покрывается элементом a), и пишут $a \lessdot b$. Элементы, покрывающие $\tilde{0}$ в частично упорядоченном множестве $(P, \leqslant)$, называются атомами, а покрываемые наибольшим элементом $\tilde{1}$ — коатомами.

Диаграммой Хассе частично упорядоченного множества $(P, \leqslant)$ называется фигура плоскости, изображаемая следующим образом:

1) элементы множества P изображаются точками плоскости;
2) если $a \leqslant b$ и $a \neq b$, то элемент a изображается ниже элемента b;
3) точки a и b соединены ребром, только если $a \lessdot b$ или $b \lessdot a$.

На рис. 1 представлены диаграммы Хассе следующих частично упорядоченных множеств:

— $([1,3], \leqslant)$, где $[1,3] = \{1,2,3\}$, $\leqslant$ — естественный частичный порядок, определённый на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$;
— $(\mathrm{div}(12), |)$, где $\mathrm{div}(12)$ — множество натуральных делителей числа 12, $|$ — отношение делимости, определённое на множестве $\mathbb{N}$;
— $(2^U, \subseteq)$, где 2^U — совокупность всех подмножеств множества $U = \{1,2,3\}$.

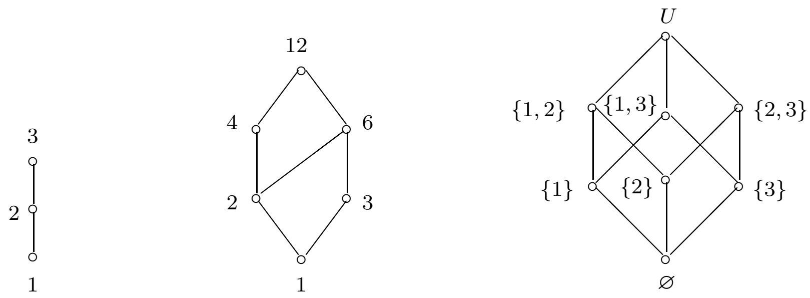


Рис. 1. Примеры диаграмм Хассе

Если $a \leqslant b$, то $(a,b,\leqslant)$-цепью частично упорядоченного множества $(P,\leqslant)$ называется последовательность $(a = p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k = b)$ элементов множества P, такая что $p_1 \lessdot p_2 \lessdot p_3 \lessdot \ldots \lessdot p_k$. Цепь $(\tilde{0}, \tilde{1}, \leqslant)$ называется максимальной. Длиной $(a,b,\leqslant)$-цепи $(a = p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k = b)$ называется число $k-1$. Наибольшая длина максимальной цепи частично упорядоченного множества $(P,\leqslant)$ с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$ называется его высотой.

Если для элементов a и b частично упорядоченного множества $(P,\leqslant)$ множество $\max\{x \in P \mid x \leqslant a,\ x \leqslant b\}$ $(\min\{x \in P \mid a \leqslant x,\ b \leqslant x\})$ состоит из одного элемента, то этот элемент называется точной нижней (верхней) гранью или пересечением (объединением) элементов a и b и обозначается через $a \wedge b$ $(a \vee b)$. Частично упорядоченное множество, для любых двух элементов a, b которого существуют $a \wedge b$ и $a \vee b$, называется решёткой.

В любой решётке имеет место неравенство дистрибутивности:

$$a \wedge (b \vee c) \geqslant (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad \text{для любых} \quad a, b, c \in P.$$

Решётка называется атомарной, если каждый её элемент есть $\vee$-объединение какого-то множества атомов. Решётка называется коатомарной, если каждый её элемент есть $\wedge$-пересечение какого-то множества коатомов.

Пусть $(P,\leqslant)$ — решётка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$. Говорят, что элемент a имеет дополнение в решётке $(P,\leqslant)$, если существует такой элемент $b \in P$, что $a \wedge b = \tilde{0}$ и $a \vee b = \tilde{1}$. Элемент b называется при этом дополнением элемента a и обозначается через $\bar{a}$. Решётка, любой элемент которой имеет дополнение, называется решёткой с дополнениями.

Решётка $(P, \leqslant)$ называется

— *дистрибутивной*, если для любых $a, b, c \in P$ справедливо равенство
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c);$$

— *модулярной*, если для любых $a, b, c \in P$, таких что $a \leqslant c$, справедливо равенство
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c;$$

— *градуированной*, если для любых $a, b \in P$ все $(a, b, \leqslant)$-цепи имеют одну и ту же длину.

Дистрибутивная решётка с дополнениями называется булевой решёткой. Для любых элементов a и b булевой решётки имеют место равенства
$$\bar{\bar{a}} = a, \quad \overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}, \quad \overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}.$$

Элемент a решётки $(P, \leqslant)$ называтся $\vee$-неприводимым, если для любых $x, y \in P$ из равенства $a = x \vee y$ следует, что $a = x$ или $a = y$. Множество всех $\vee$-неприводимых элементов решётки $(P, \leqslant)$ обозначим через $\mathrm{join}(P, \leqslant)$.

Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка, $m, n, k \in \mathbb{N}$. Обозначим через $P^{m \times n}$ множество всех $(m \times n)$-матриц с элементами из P. Элементы матриц $A, B, C, \ldots$, расположенные в i-й строке и j-м столбце, мы обозначаем соответственно через $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \ldots$.

Элементы множеств $P^{1 \times n}$ и $P^{m \times 1}$ будем также называть векторами-строками и векторами-столбцами соответственно.

Если $(P, \leqslant)$ — решётка с $\tilde{0}$, то матрицу, все элементы которой равны $\tilde{0}$, будем называть нулевой или наименьшей матрицей и обозначать через 0.

Если $(P, \leqslant)$ — решётка с $\tilde{1}$, то решёточную матрицу, все элементы которой равны $\tilde{1}$, будем называть наибольшей решёточной матрицей и обозначать через I.

В решётке с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$ определены

— единичная $(n \times n)$-матрица E, на главной диагонали которой расположены $\tilde{1}$, а на остальных местах — $\tilde{0}$;

— квадратная $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матрица E_{ij} с единственным ненулевым элементом $\tilde{1}$, расположенным в i-й строке и j-м столбце.

Матрица B, такая что $b_{ij} = a_{ji}$, называется транспонированной к A матрицей и обозначается через ${}^{t}\!A$.

Для любой матрицы $A \in P^{m \times n}$ будем обозначать через $A_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ и $A^j = {}^{t}(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ соответственно её i-ю вектор-строку и j-й вектор-столбец. Объединения элементов (координат) этих векторов $a_{i1} \vee \ldots \vee a_{in}$ и $a_{1j} \vee \ldots \vee a_{mj}$ будем называть соответственно i-й строчечной и j-й столбцовой суммами матрицы A.

Определим на множестве $P^{m \times n}$ частичный порядок: для любых матриц $A, B \in P^{m \times n}$ отношение $A \leqslant B$ равносильно тому, что $a_{ij} \leqslant b_{ij}$ для всех $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Частично упорядоченное множество $(P^{m \times n}, \leqslant)$ является решёткой, в которой
$$A \vee B = \|a_{ij} \vee b_{ij}\|_{m \times n}, \quad A \wedge B = \|a_{ij} \wedge b_{ij}\|_{m \times n}.$$

Для любого $\lambda \in P$ и любой матрицы $A \in P^{m\times n}$ положим

$$\lambda \wedge A = \|\lambda \wedge a_{ij}\|_{m\times n}, \quad \lambda \vee A = \|\lambda \vee a_{ij}\|_{m\times n}.$$

Если $(P, \leqslant)$ — решётка с дополнениями, то решётка $(P^{m\times n}, \leqslant)$ также является решёткой с дополнениями, причём дополнением к матрице $A \in P^{m\times n}$ будет являться матрица $\bar{A}$, полученная из матрицы A заменой каждого элемента на его дополнение.

Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка, $A \in P^{n\times n}$. Множество $\{a_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ конечно и порождает конечную подрешётку $(P(A), \leqslant)$ решётки $(P, \leqslant)$ с $\tilde{0} = \bigwedge\limits_{i=1}^{n}\bigwedge\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$ и $\tilde{1} = \bigvee\limits_{i=1}^{n}\bigvee\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$. Обозначим

$$E(A) = \left\{ B \in P^{n\times n} \;\middle|\; b_{ij} \geqslant \bigvee_{r=1}^{n}\bigvee_{k=1}^{n} a_{rk},\ \text{если } i = j,\ b_{ij} \leqslant \bigwedge_{r=1}^{n}\bigwedge_{k=1}^{n} a_{rk},\ \text{если } i \neq j \right\}.$$

Определим на множестве решёточных матриц операцию умножения: для любых матриц $A \in P^{m\times k}$, $B \in P^{k\times n}$ положим $A \cdot B = AB = C_{m\times n}$, где для всех $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee \ldots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj}) = \bigvee_{r=1}^{k} (a_{ir} \wedge b_{rj}).$$

Отметим некоторые свойства этой операции.

1. Для любых $A \in P^{m\times k}$, $B \in P^{k\times n}$ $AB = \bigvee\limits_{r=1}^{k} \|a_{ir} \wedge b_{rj}\|$.
2. Для любых $A \in P^{m\times k}$, $B \in P^{k\times n}$ ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$.
3. Пусть $A, B \in P^{m\times k}$, $C, D \in P^{k\times n}$. Если $A \leqslant B$ и $C \leqslant D$, то $AC \leqslant BD$. В частности, если $A \leqslant B$, то $AC \leqslant BC$; если $C \leqslant D$, то $AC \leqslant AD$.
4. $AB = BA = A$ для любой матрицы $B \in E(A)$.
5. Если решётка $(P, \leqslant)$ дистрибутивна, то
   а) для любых $A \in P^{m\times k}$, $B \in P^{k\times l}$, $C \in P^{l\times n}$ $A(BC) = (AB)C$;
   б) для любых $A, B \in P^{m\times k}$, $C, D \in P^{k\times n}$ $A(C \vee D) = AC \vee AD$, $(A \vee B)C = AC \vee BC$.

Будем говорить, что матрица $A \in P^{m\times k}$ делит слева матрицу $B \in P^{m\times n}$ (матрица B делится слева на матрицу A), если найдётся такая матрица $X \in P^{k\times n}$, что $AX = B$. Аналогичным образом даётся определение делимости решёточных матриц справа.

Квадратная матрица $A \in P^{n\times n}$ называется идемпотентной, если $A^2 = A \cdot A = A$. Множество идемпотентных $(n \times n)$-матриц над решёткой $(P, \leqslant)$ будем обозначать через $\mathrm{idemp}_n(P, \leqslant)$, $\mathrm{Idemp}_n(P, \leqslant) = (\mathrm{idemp}_n(P, \leqslant), \leqslant)$ — частично упорядоченное множество идемпотентных матриц относительно частичного порядка, индуцированного множеством $(P^{n\times n}, \leqslant)$. Идемпотентные матрицы над цепями и $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$-решётками изучались в [2, 6, 7, 10, 11].

Пусть $(P,\leqslant)$ — дистрибутивная решётка. Ввиду конечности решётки $(P(A),\leqslant)$ множество степеней $\{A, A^2, A^3, \ldots\}$ также конечно. Пусть k — наименьшее натуральное число, такое что $A^k = A^t$ для некоторого $t \in \{1, \ldots, k-1\}$. Числа t и $k-t$ мы будем называть индексом и периодом матрицы A и обозначать соответственно через $\mathrm{index}(A)$ и $\mathrm{period}(A)$.

Пусть U — некоторое множество, $|U| = n$. Частично упорядоченное множество всех подмножеств множества U по отношению включения $\subseteq$ будем называть булеаном и обозначать через $\mathrm{Bul}(U) = \mathrm{Bul}(n) = (2^U, \subseteq)$.

Совокупность $\pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_r\}$ подмножеств множества U называется разбиением множества U, если

1) $\pi_i \cap \pi_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$;
2) $\pi_1 \cup \ldots \cup \pi_r = U$.

Элементы $\pi_1, \ldots, \pi_r$ разбиения π называют также его блоками.

Определим на множестве $\mathrm{part}(U)$ всех разбиений множества U частичный порядок: для любых $\pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_r\}$, $\sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\} \in \mathrm{part}(U)$ положим, что $\pi \leqslant \sigma$ тогда и только тогда, когда каждое π_i является подмножеством некоторого σ_j $(i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, s)$. Относительно введённого частичного порядка частично упорядоченное множество $\mathrm{Part}(U) = (\mathrm{part}(U), \leqslant)$ является решёткой.

Пусть $(P,\leqslant)$ — решётка. Если для элементов $a, b \in P$ существует наибольшее решение неравенства $a \wedge x \leqslant b$, то оно обозначается через $\left\langle{b \atop a}\right\rangle$ и называется относительным псевдодополнением элемента a в b. Решётка, для любых двух элементов a, b которой существует $\left\langle{b \atop a}\right\rangle$, называется брауэровой. Любая брауэрова решётка дистрибутивна [3], и любая конечная дистрибутивная решётка брауэрова.

В дальнейшем мы будем использовать стандартные свойства относительных псевдодополнений, которые можно найти, к примеру, в [1, 3]. В частности, во всякой решётке с $\tilde{1}$ равенство $\left\langle{b \atop a}\right\rangle = \tilde{1}$ равносильно тому, что $a \leqslant b$.

1. Матричные уравнения вида $AX = B$ и $XA = B$

Пусть $(P,\leqslant)$ — решётка, $A \in P^{m\times n}$, $x \in P^{n\times 1}$, $b \in P^{m\times 1}$ и для любых $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ существуют $\left\langle{b_i \atop a_{ij}}\right\rangle$. Определим вектор

$$\left\langle{b \atop A}\right\rangle = {}^t\!\left(\bigwedge_{i=1}^{m}\left\langle{b_i \atop a_{i1}}\right\rangle, \ldots, \bigwedge_{i=1}^{m}\left\langle{b_i \atop a_{in}}\right\rangle\right).$$

В [4] доказан следующий критерий совместности систем линейных уравнений.

Теорема 1.1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Система линейных уравнений $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда выполняется равенство $A\left\langle{b \atop A}\right\rangle = b$.*
2. *Вектор $\left\langle{b \atop A}\right\rangle$ является наибольшим среди всех векторов x, таких что $Ax \leqslant b$.*

3. *Вектор* $A\left\langle {b \atop A} \right\rangle$ *является наибольшим среди всех векторов, не превосходящих вектора* b *и имеющих вид* Ax. □

Пример. Пусть $(P, \leqslant)$ — произвольная решётка, $r \in P^{1\times m}$, $c \in P^{1\times n}$. Рассмотрим вопрос о существовании матрицы $A \in P^{m\times n}$ с вектором строчечных сумм r и вектором столбцовых сумм s. Решение данной задачи равносильно выяснению совместности системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_{i1} \vee x_{i2} \vee \ldots \vee x_{in} = r_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ x_{1j} \vee x_{2j} \vee \ldots \vee x_{mj} = c_j, \quad j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Наибольшим решением системы линейных неравенств

$$\begin{cases} x_{i1} \vee x_{i2} \vee \ldots \vee x_{in} \leqslant r_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ x_{1j} \vee x_{2j} \vee \ldots \vee x_{mj} \leqslant c_j, \quad j = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

является, очевидно, матрица Y, такая что $y_{ij} = r_i \wedge c_j$ для всех $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Подставляя её элементы в систему уравнений, пользуясь неравенством дистрибутивности, получим

$$\begin{aligned} r_i &= (r_i \wedge c_1) \vee (r_i \wedge c_2) \vee \ldots \vee (r_i \wedge c_n) \leqslant \\ &\leqslant r_i \wedge (c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_n) \leqslant r_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ c_j &= (r_1 \wedge c_j) \vee (r_2 \wedge c_j) \vee \ldots \vee (r_m \wedge c_j) \leqslant \\ &\leqslant c_j \wedge (r_1 \vee r_2 \vee \ldots \vee r_m) \leqslant c_j, \quad j = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} r_i \wedge (c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_n) = r_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ c_j \wedge (r_1 \vee r_2 \vee \ldots \vee r_m) = c_j, \quad j = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

что равносильно системе

$$\begin{cases} r_i \leqslant c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_n, \quad i = 1, \ldots, m, \\ c_j \leqslant r_1 \vee r_2 \vee \ldots \vee r_m, \quad j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Система, составленная из первых m неравенств последней системы, равносильна неравенству

$$r_1 \vee r_2 \vee \ldots \vee r_m \leqslant c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_n,$$

а система, составленная из последних n неравенств, — неравенству

$$c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_n \leqslant r_1 \vee r_2 \vee \ldots \vee r_m.$$

Поэтому над любой решёткой критерием существования матрицы с вектором строчечных сумм r и вектором столбцовых сумм c является выполнение равенства

$$c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_n = r_1 \vee r_2 \vee \ldots \vee r_m.$$ □

Отметим, что над брауэровыми решётками теорема 1.1 даёт критерий совместности любой системы линейных уравнений.

Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка, $A, B \in P^{n\times n}$. Если для всех $i, j, r = 1, \ldots, n$ существуют $\left\langle\begin{smallmatrix} b_{rj} \\ a_{ri}\end{smallmatrix}\right\rangle$ и $\left\langle\begin{smallmatrix} b_{ir} \\ a_{jr}\end{smallmatrix}\right\rangle$, то определены матрицы

$$\left\langle\begin{matrix} B \\ A\end{matrix}\right\rangle_{\mathrm{l}} = \left\| \bigwedge_{r=1}^{n} \left\langle\begin{matrix} b_{rj} \\ a_{ri}\end{matrix}\right\rangle \right\|, \quad \left\langle\begin{matrix} B \\ A\end{matrix}\right\rangle_{\mathrm{r}} = \left\| \bigwedge_{r=1}^{n} \left\langle\begin{matrix} b_{ir} \\ a_{jr}\end{matrix}\right\rangle \right\|.$$

Лемма 1.1. *Пусть $(P, \leqslant)$ — булева решётка. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любых $a, b \in P$ существует псевдодополнение $\left\langle\begin{smallmatrix} b \\ a\end{smallmatrix}\right\rangle$, и оно равно $b \vee \bar{a}$.*
2. *Для любых $A, B \in P^{n\times n}$ $\left\langle\begin{smallmatrix} B \\ A\end{smallmatrix}\right\rangle_{\mathrm{l}} = \overline{{}^tA \cdot \bar{B}}$, $\left\langle\begin{smallmatrix} B \\ A\end{smallmatrix}\right\rangle_{\mathrm{r}} = \overline{\bar{B} \cdot {}^tA}$.*

Доказательство.

Докажем утверждение 1. Необходимо показать, что неравенство $a \wedge x \leqslant b$ равносильно неравенству $x \leqslant b \vee \bar{a}$.

Если $a \wedge x \leqslant b$, то $(a \wedge x) \vee \bar{a} \leqslant b \vee \bar{a}$, $(a \vee \bar{a}) \wedge (x \vee \bar{a}) \leqslant b \vee \bar{a}$, $x \leqslant x \vee \bar{a} \leqslant b \vee \bar{a}$.

Если $x \leqslant b \vee \bar{a}$, то $a \wedge x \leqslant a \wedge (b \vee \bar{a})$, $a \wedge x \leqslant a \wedge b \leqslant b$.

Докажем утверждение 2. Положим $\left\langle\begin{smallmatrix} B \\ A\end{smallmatrix}\right\rangle_{\mathrm{l}} = C$, $\overline{{}^tA \cdot \bar{B}} = D$. Имеем

$$c_{ij} = \bigwedge_{r=1}^{n} \left\langle\begin{matrix} b_{rj} \\ a_{ri}\end{matrix}\right\rangle = \bigwedge_{r=1}^{n} (b_{rj} \vee \bar{a}_{ri}) = \bigwedge_{r=1}^{n} \overline{(\bar{b}_{rj} \wedge a_{ri})} = \overline{\bigvee_{r=1}^{n} (\bar{b}_{rj} \wedge a_{ri})} = d_{ij}. \qquad \square$$

Лемма 1.2. *Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка, $A, B \in P^{n\times n}$, для всех $i, j, r = 1, \ldots, n$ существуют $\left\langle\begin{smallmatrix} b_{rj} \\ a_{ri}\end{smallmatrix}\right\rangle$ и $\left\langle\begin{smallmatrix} b_{ir} \\ a_{jr}\end{smallmatrix}\right\rangle$, $\left\langle\begin{smallmatrix} B \\ A\end{smallmatrix}\right\rangle_{\mathrm{l}} = C$, $\left\langle\begin{smallmatrix} B \\ A\end{smallmatrix}\right\rangle_{\mathrm{r}} = D$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *$c_{ij} = \tilde{1}$ тогда и только тогда, когда $A^i \leqslant B^j$.*
2. *$d_{ij} = \tilde{1}$ тогда и только тогда, когда $A_j \leqslant B_i$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Следующие утверждения равносильны:

$$c_{ij} = \tilde{1}, \quad \bigwedge_{r=1}^{n} \left\langle\begin{matrix} b_{rj} \\ a_{ri}\end{matrix}\right\rangle = \tilde{1}, \quad \left\langle\begin{matrix} b_{rj} \\ a_{ri}\end{matrix}\right\rangle = \tilde{1} \text{ для всех } r = 1, \ldots, n,$$
$$a_{ri} \leqslant b_{rj} \text{ для всех } r = 1, \ldots, n, \quad A^i \leqslant B^j. \qquad \square$$

Отметим, что леммы 1.1 и 1.2 дают два способа вычисления матриц $\left\langle\begin{smallmatrix} B \\ A\end{smallmatrix}\right\rangle_{\mathrm{l}}$ и $\left\langle\begin{smallmatrix} B \\ A\end{smallmatrix}\right\rangle_{\mathrm{r}}$ над $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$-решётками.

Теорема 1.2. *Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка, $A, B \in P^{n\times n}$ и для всех $i, j, r = 1, \ldots, n$ существуют $\left\langle\begin{smallmatrix} b_{rj} \\ a_{ri}\end{smallmatrix}\right\rangle$, $\left\langle\begin{smallmatrix} b_{ir} \\ a_{jr}\end{smallmatrix}\right\rangle$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Матричное уравнение $AX = B$ разрешимо тогда и только тогда, когда выполняется равенство $A\left\langle\begin{smallmatrix} B \\ A\end{smallmatrix}\right\rangle_{\mathrm{l}} = B$.*
2. *Матрица $\left\langle\begin{smallmatrix} B \\ A\end{smallmatrix}\right\rangle_{\mathrm{l}}$ является наибольшим решением матричного неравенства $AX \leqslant B$.*

3. *Матрица* $A\left\langle{B \atop A}\right\rangle_{\mathrm{l}}$ *является наибольшей среди всех решёточных матриц, не превосходящих матрицу* B *и делящихся на* A *слева.*
4. *Матричное уравнение* $XA = B$ *разрешимо тогда и только тогда, когда выполняется равенство* $\left\langle{B \atop A}\right\rangle_{\mathrm{r}} A = B$.
5. *Матрица* $\left\langle{B \atop A}\right\rangle_{\mathrm{r}}$ *является наибольшим решением матричного неравенства* $XA \leqslant B$.
6. *Матрица* $\left\langle{B \atop A}\right\rangle_{\mathrm{r}} A$ *является наибольшей среди всех решёточных матриц, не превосходящих матрицу* B *и делящихся на* A *справа.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Нужное утверждение получается применением теоремы 1.1 с учётом того, что матричное уравнение $AX = B$ равносильно системе линейных уравнений

$$\bigvee_{r=1}^{n} (a_{ir} \wedge x_{rj}) = b_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n. \qquad \square$$

Как и ранее, отметим, что над брауэровыми решётками теорема 1.2 даёт критерии разрешимости любых матричных уравнений вида $AX = B$ и $XA = B$, что совпадает с результатом, полученным в [14].

Следствие 1.1. *Пусть* $(P, \leqslant)$ — *булева решётка,* $A \in P^{m\times k}$, $B \in P^{m\times n}$, $C \in P^{k\times n}$.

1. *Матричное уравнение* $AX = B$ *над решёткой* $(P, \leqslant)$ *разрешимо тогда и только тогда, когда ему удовлетворяет матрица* $\overline{{}^{t}A \cdot \bar{B}}$.
2. *Матричное уравнение* $XC = B$ *над решёткой* $(P, \leqslant)$ *разрешимо тогда и только тогда, когда ему удовлетворяет матрица* $\overline{\bar{B} \cdot {}^{t}C}$. $\square$

Вопрос о разрешимости матричных уравнений над $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$-решётками изучался в [6, 7]. Частным случаем следствия 1.1 является критерий разрешимости матричного уравнения $AX = B$ над $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$-решётками. Этот критерий получен в [6].

Лемма 1.3. *Пусть* $(P, \leqslant)$ — *брауэрова решётка,* $A \in P^{n\times n}$, $B \in E(A)$. *Справедливы следующие утверждения.*

1. $\left\langle{A \atop A}\right\rangle_{\mathrm{l}}, \left\langle{A \atop A}\right\rangle_{\mathrm{r}} \geqslant B$.
2. $A\left\langle{A \atop A}\right\rangle_{\mathrm{l}} = \left\langle{A \atop A}\right\rangle_{\mathrm{r}} A = A$.

Доказательство. Утверждение 1 следует из свойства 4) умножения решёточных матриц и утверждений 2 и 5 теоремы 1.2.

Докажем утверждение 2. Так как матричные уравнения $AX = A$ и $XA = A$ разрешимы (им удовлетворяет, например, матрица B), то нужное утверждение получается применением теоремы 1.2. $\square$

Лемма 1.4. *Пусть* $(P, \leqslant)$ — *решётка,* $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$, $A \in P^{n\times n}$. *Следующие утверждения равносильны.*

1. $A^2 \leqslant A$.

2. *Для всех* $i, j = 1, \dots, n$ *из равенства* $a_{ij} = \tilde{1}$ *следует, что* $A^i \leqslant A^j$.
3. *Для всех* $i, j = 1, \dots, n$ *из равенства* $a_{ij} = \tilde{1}$ *следует, что* $A_j \leqslant A_i$.

Доказательство. Докажем равносильность условий 1 и 2. Ввиду теоремы 1.2 неравенство $A^2 \leqslant A$ равносильно неравенству $A \leqslant \left\langle {A \atop A} \right\rangle_1$, или

$$a_{ij} \leqslant \bigwedge_{r=1}^{n} \left\langle {a_{rj} \atop a_{ri}} \right\rangle \quad \text{для всех} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Каждое из этих неравенств выполняется тогда и только тогда, когда из $a_{ij} = \tilde{1}$ следует, что $\bigwedge\limits_{r=1}^{n} \left\langle {a_{rj} \atop a_{ri}} \right\rangle = \tilde{1}$. Последнее равносильно тому, что $\left\langle {a_{rj} \atop a_{ri}} \right\rangle = \tilde{1}$, или, что то же самое, $a_{ri} \leqslant a_{rj}$ для всех $r = 1, \dots, n$. □

2. Свойства идемпотентных матриц

Лемма 2.1. *Пусть* $(P, \leqslant)$ — *решётка,* $A, B, C \in P^{n \times n}$, A — *идемпотентная матрица. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если* $B \leqslant A$ *и* $C \leqslant A$, *то* $BC \leqslant A$.
2. *Если решётка* $(P, \leqslant)$ *дистрибутивна, то*
   1) $a_{ij} \geqslant a_{ir_1} \wedge a_{r_1 r_2} \wedge \ldots \wedge a_{r_k j}$ *для всех индексов* $i, j, r_1, \dots, r_k \in \in \{1, \dots, n\}$, *где* $k \geqslant 1$;
   2) *для любого* $p \in P$ *матрица* $p \wedge A$ *идемпотентна.*
3. *Если* $(P, \leqslant)$ — *дистрибутивная решётка с* $\tilde{0}$ *и* $\tilde{1}$, *то для любого* $p \in P$ *матрицы* $A \vee (p \wedge E)$ *и* $A \vee (p \wedge I)$ *являются идемпотентными.*

Доказательство. Утверждение 1 справедливо, поскольку $BC \leqslant A^2 = A$.

Докажем утверждение 2 а). Так как матрица A идемпотентна, то для любого $k \geqslant 1$ выполняется равенство $A = A^{k+1}$, т. е. для всех $i, j = 1, \dots, n$

$$a_{ij} = \bigvee_{r_1=1}^{n} \bigvee_{r_2=1}^{n} \ldots \bigvee_{r_k=1}^{n} (a_{ir_1} \wedge a_{r_1 r_2} \wedge \ldots \wedge a_{r_k j}),$$

откуда следует доказываемое.

Докажем утверждения 2 б) и 3. Имеем

$$\begin{aligned}
&(p \wedge A)^2 = p \wedge A^2 = p \wedge A,\\
&\big(A \vee (p \wedge E)\big)^2 = A^2 \vee A(p \wedge E) \vee (p \wedge E)A \vee (p \wedge E)^2 =\\
&\quad = A \vee (p \wedge AE) \vee (p \wedge EA) \vee (p \wedge E) = A \vee (p \wedge A) \vee (p \wedge E) = A \vee (p \wedge E),\\
&A \vee (p \wedge I) = A^2 \vee A(p \wedge I) \vee (p \wedge I)A \vee (p \wedge I)^2 =\\
&\quad = A \vee (p \wedge AI) \vee (p \wedge IA) \vee (p \wedge I) = A \vee (p \wedge I),
\end{aligned}$$

так как $AI, IA \leqslant I$. □

Лемма 2.2. *Пусть $(P, \leqslant)$ — брауэрова решётка. Для любой матрицы $A \in P^{n\times n}$ матрицы $\left\langle{A \atop A}\right\rangle_{\mathrm{l}}$ и $\left\langle{A \atop A}\right\rangle_{\mathrm{r}}$ идемпотентны.*

Доказательство. Пусть $A\left\langle{A \atop A}\right\rangle_{\mathrm{l}} = D$. По лемме 1.3 $D^2 \cdot A = D \cdot (D \cdot A) = D \cdot A = A$, откуда по утверждению 2 теоремы 1.2 $D^2 \leqslant D$.

Докажем обратное неравенство. Пусть $B \in E(A)$, $C \in E(D)$. Рассмотрим матрицу $F \in P^{n\times n}$, такую что $f_{ij} = b_{ij} \vee c_{ij}$ при $i = j$ и $f_{ij} = b_{ij} \wedge c_{ij}$ при $i \neq j$. Ясно, что $F \in E(A) \cap E(D)$. По лемме 1.3 $D \geqslant F$, откуда следует, что $D^2 \geqslant D$. □

Лемма 2.3. *Пусть $(P, \leqslant)$ — брауэрова решётка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, $A \in P^{n\times n}$. Следующие утверждения равносильны.*

1. *Матрица A идемпотентна, и $A \geqslant E$.*
2. $A = \left\langle{A \atop A}\right\rangle_{\mathrm{l}} = \left\langle{A \atop A}\right\rangle_{\mathrm{r}}$.

Доказательство. Докажем импликацию $1 \Longrightarrow 2$. Имеем

$$A \leqslant \left\langle{A \atop A}\right\rangle_{\mathrm{l}} = E\left\langle{A \atop A}\right\rangle_{\mathrm{l}} \leqslant A\left\langle{A \atop A}\right\rangle_{\mathrm{l}} = A,$$

откуда получаем, что $\left\langle{A \atop A}\right\rangle_{\mathrm{l}} = A$.

Импликация $2 \Longrightarrow 1$ следует из леммы 1.3. □

Теорема 2.1. *Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка, $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$, $A \in P^{n\times n}$ и $A \geqslant E$. Следующие утверждения равносильны.*

1. *Матрица A идемпотентна.*
2. *Для любых $i, j = 1, \ldots, n$ равенство $a_{ij} = \tilde{1}$ равносильно неравенству $A^i \leqslant A^j$.*
3. *Для любых $i, j = 1, \ldots, n$ равенство $a_{ij} = \tilde{1}$ равносильно неравенству $A_j \leqslant A_i$.*

Доказательство. Так как $A^2 = A$ — частный случай неравенства $A^2 \leqslant A$, то импликация $1 \Longrightarrow 2$ следует из леммы 1.4.

Докажем импликацию $2 \Longrightarrow 1$. По лемме 1.4 $A^2 \leqslant A$. Но из неравенства $A \geqslant E$ следует, что $A^2 \geqslant A$, поэтому $A^2 = A$. □

Теорема 2.2. *Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решётка с $\tilde{0}$, $A \in \mathrm{idemp}_n(P, \leqslant)$ и $a_{kl} \geqslant p$ для любого элемента a_{kl} матрицы A, не равного $\tilde{0}$. Если для некоторых $i \neq j$ выполняется неравенство $a_{ij} \geqslant p$, то найдётся такой индекс s, что $a_{ss} \geqslant p$.*

Доказательство. Изложим алгоритм поиска индекса s, удовлетворяющего условию теоремы. Этот алгоритм строит последовательность индексов $s_1 = j$, $s_2, \ldots, s_k \in \{1, \ldots, n\}$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $a_{is_1}, \ldots, a_{is_k} \geqslant p$;
2) $a_{s_2 s_1}, \ldots, a_{s_k s_{k-1}} \geqslant p$, $k > 1$;
3) $s_1 = j \neq i$, $s_2 \neq i, \ldots, s_k \neq i$;
4) $s_k \notin \{s_{k-1}, \ldots, s_2, s_1\}$ для всех $k > 1$.

Шаг 1. Строим одноэлементную последовательность $s_1 = j$ и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Этот шаг применяется к уже построенной последовательности индексов $s_1 = j, s_2, \ldots, s_k \in \{1, \ldots, n\}$, удовлетворяющей условиям 1)—4). Так как матрица A идемпотентна и $a_{is_k} \geqslant p$, то существует такой индекс s_{k+1}, что $a_{is_{k+1}} \wedge a_{s_{k+1}s_k} \geqslant p$. Последнее равносильно тому, что $a_{is_{k+1}} \geqslant p$ и $a_{s_{k+1}s_k} \geqslant p$.

Если выполняется одно из равенств $i = s_{k+1}$ или $s_k = s_{k+1}$, то работу алгоритма следует прекратить. Искомый индекс s будет равен s_{k+1}.

Если индекс s_{k+1} совпадет с некоторым индексом s_r, где $r \in \{1, \ldots, k\}$, то по лемме 2.1

$$a_{s_r s_r} \geqslant a_{s_{k+1}s_k} \wedge a_{s_k s_{k-1}} \wedge \ldots \wedge a_{s_{r+1}s_r} \geqslant p,$$

следовательно, работу алгоритма следует прекратить. Искомый индекс s будет равен s_r.

Если же индекс s_{k+1} удовлетворяет условиям 1)—4), то переходим к шагу 2 с последовательностью $s_1 = j, s_2, \ldots, s_k, s_{k+1} \in \{1, \ldots, n\}$. Из условия 4) следует, что описанный алгоритм завершит свою работу не более чем за $n+1$ шаг. □

3. Решётка идемпотентных матриц

Лемма 3.1. *Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решётка, $A \in P^{n\times n}$. Если $A \leqslant A^2$, то имеют место следующие утверждения.*

1. $A^k = A^{\mathrm{index}(A)}$ *для всех* $k \geqslant \mathrm{index}(A)$.
2. $\bigvee\limits_{r\geqslant 1} A^r = A^{\mathrm{index}(A)}$.
3. *Матрица* $A^{\mathrm{index}(A)}$ *идемпотентна.*

Доказательство. Пусть $k = \mathrm{index}(A) + \mathrm{period}(A)$. Тогда

$$A \leqslant A^2 \leqslant A^3 \leqslant \ldots \leqslant A^{\mathrm{index}(A)} \leqslant \ldots \leqslant A^k = A^{\mathrm{index}(A)}.$$

Таким образом,

$$A^k = A^{\mathrm{index}(A)} \quad \text{для всех} \quad k \geqslant \mathrm{index}(A),$$

откуда и вытекают утверждения леммы. □

Теорема 3.1. *Для любой дистрибутивной решётки $(P, \leqslant)$ частично упорядоченное множество $\mathrm{Idemp}_n(P, \leqslant)$ является решёткой, в которой операции объединения ($\sqcup$) и пересечения ($\sqcap$) определяются равенствами*

$$A \sqcup B = (A \vee B)^{\mathrm{index}(A\vee B)}, \quad A \sqcap B = (A \wedge B)^n.$$

Доказательство. Покажем, что $A \sqcup B = (A\vee B)^{\mathrm{index}(A\vee B)}$. Так как $(A\vee B)^2 \geqslant A \vee B$, то из леммы 3.1 следует, что матрица $(A \vee B)^{\mathrm{index}(A\vee B)}$ идемпотентна. Пусть C — идемпотентная матрица, $A \leqslant C$, $B \leqslant C$. Тогда $A \vee B \leqslant C$ и, следовательно, $(A \vee B)^{\mathrm{index}(A\vee B)} \leqslant C^{\mathrm{index}(A\vee B)} = C$.

Покажем, что $A \sqcap B = (A \wedge B)^n$. Из выполнения неравенства $(A \wedge B)^2 \leqslant A^2 \wedge B^2 = A \wedge B$ следует, что

$$(A \wedge B)^{n+1} \leqslant (A \wedge B)^n \leqslant \ldots \leqslant (A \wedge B)^2 \leqslant A \wedge B. \tag{1}$$

Поэтому из неравенства

$$(A \wedge B)^n \leqslant \bigvee_{k>n} (A \wedge B)^k,$$

доказанного в [5], следует, что

$$(A \wedge B)^n \leqslant (A \wedge B)^{n+1}. \tag{2}$$

Из неравенств (1) и (2) получаем, что $(A \wedge B)^n = (A \wedge B)^{n+1}$. Значит, $(A \wedge B)^n$ — идемпотентная матрица. Пусть теперь C — произвольная идемпотентная матрица, такая что $C \leqslant A$, $C \leqslant B$. Тогда $C \leqslant A \wedge B$, $C^n \leqslant (A \wedge B)^n$, $C \leqslant (A \wedge B)^n$. □

То, что частично упорядоченное множество идемпотентных матриц над $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$-решётками и цепями является решёткой, показано в [7, 9, 15]. Формула $A \sqcap B = (A \wedge B)^n$ для нахождения точной нижней грани в решётке $\mathrm{Idemp}_n(P, \leqslant)$ над цепями приведена в [9].

Следствие 3.1. *Если матрицы A и B дистрибутивной решётки коммутируют, то $A \sqcup B = A \vee B \vee AB$.* □

Следствие 3.2. *Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решётка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, $A, B \in \mathrm{Idemp}_n(P, \leqslant)$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $A, B \geqslant E$ или $A, B \leqslant E$, то $A \sqcap B = A \wedge B$.*
2. *Матрицы $A, B \geqslant E$ коммутируют тогда и только тогда, когда $A \sqcup B = AB$.*
3. *Если матрица B диагональна, то $A \sqcup B = A \vee B$. В частности, $A \sqcup E = A \vee E$.*
4. *Если $AB = I$, то $A \sqcup B = AB = I$.*
5. *Если $AB = 0_{n \times n}$, то $A \sqcup B = A \vee B \vee BA$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $A, B \geqslant E$. Ясно, что $A \sqcap B \leqslant A \wedge B$. Поэтому достаточно показать, что $A \wedge B$ — идемпотентная матрица. Пусть $A \wedge B = C$. Тогда $C \leqslant A$ и $C \leqslant B$. Откуда находим, что $C^2 \leqslant A^2 = A$, $C^2 \leqslant B^2 = B$, $C^2 \leqslant A \wedge B = C$. Очевидно, $C \geqslant E$, поэтому $C^2 \geqslant C$. В итоге получаем, что $C^2 = C$.

Пусть $A, B \leqslant E$. Тогда $A \wedge B$ — диагональная матрица, а любая диагональная матрица является идемпотентной.

Докажем утверждение 2. Если матрицы A, B коммутируют, то по предыдущему утверждению $A \sqcup B = A \vee B \vee AB$. Так как $A, B \geqslant E$, то $AB \geqslant A$, $AB \geqslant B$ и, следовательно, $A \sqcup B = AB$.

Проверим справедливость утверждения 3. Из того, что $B \leqslant E$, по свойствам операции умножения решёточных матриц получаем, что

$$AB, ABA, ABAB, ABABA, \ldots \leqslant A, \quad BA, BAB, BABA, BABAB, \ldots \leqslant B,$$

откуда следует доказываемое.

Утверждения 4 и 5 очевидны. □

4. Решётка квазипорядков на конечном множестве

Пусть P — некоторое множество, T — бинарное отношение на множестве P. Определим на множестве P бинарное отношение ${}^{\delta}T$: $a\ {}^{\delta}T\ b$ тогда и только тогда, когда для всех $u, v \in P$ условие $a\ T\ u$ равносильно $b\ T\ u$, условие $v\ T\ a$ равносильно $v\ T\ b$. Другими словами, $a\ {}^{\delta}T\ b$ равносильно тому, что a и b «неразличимы» по отношению T.

Очевидно, что бинарное отношение ${}^{\delta}T$ является отношением эквивалентности на множестве P. Для всех $a \in P$ обозначим через $\tilde{a}$ класс эквивалентности, которому принадлежит a, через $P/{}^{\delta}T$ — фактор-множество множества P по отношению эквивалентности ${}^{\delta}T$.

Определим на фактор-множестве $P/{}^{\delta}T$ отношение $\tilde{T}$: $\tilde{a}\ \tilde{T}\ \tilde{b}$ равносильно $a\ T\ b$.

Следующий результат получен Г. Биркгофом [1].

Теорема 4.1. *Бинарное отношение T является квазипорядком на множестве P тогда и только тогда, когда $\tilde{T}$ — частичный порядок на фактор-множестве $P/{}^{\delta}T$.* □

Пусть U — конечное множество, $|U| = n$. Обозначим через $\mathrm{qord}(U) = \mathrm{qord}(n)$ множество всех квазипорядков на U. Так как пересечение квазипорядков есть квазипорядок, то частично упорядоченное множество $\mathrm{Qord}(U) = (\mathrm{qord}(U), \leqslant)$ есть нижняя полурешётка с $\tilde{0} = \{(a, a) \mid a \in U\}$ и $\tilde{1} = U^2$, где через $\leqslant$ обозначено отношение включения. Как известно [3], любая нижняя полурешётка с $\tilde{1}$ является решёткой, поэтому $\mathrm{Qord}(n)$ — решётка.

Для графического представления квазиупорядоченного множества (U, R) удобно использовать диаграмму Хассе частично упорядоченного множества $(U/{}^{\delta}R, \tilde{R})$. Если при этом класс эквивалентности $\tilde{a} \in U/{}^{\delta}R$ содержит более одного элемента, изобразим его квадратом, внутри которого кружками обозначим элементы, принадлежащие $\tilde{a}$; класс эквивалентности, содержащий один элемент, будем обозначать кружком. Получившуюся диаграмму будем называть диаграммой Хассе квазиупорядоченного множества (U, R).

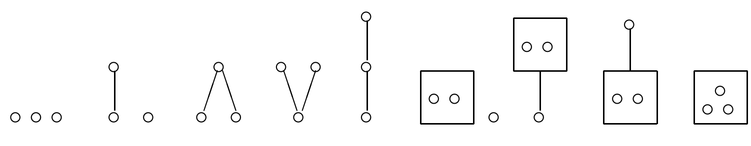


Рис. 2. Неизоморфные трёхэлементные квазипорядки

Опишем теперь отношение покрытия в решётке $\mathrm{Qord}(U)$. Пусть $R, S \in \mathrm{qord}(U)$. Если ${}^{\delta}R = {}^{\delta}S$, то $R \lessdot S$ в решётке $\mathrm{Qord}(U)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{R} \lessdot \tilde{S}$ в решётке $\mathrm{Qord}(U/{}^{\delta}R)$. Если ${}^{\delta}R \neq {}^{\delta}S$, то $R \lessdot S$ в решётке $\mathrm{Qord}(U)$

тогда и только тогда, когда $U/{}^{\delta}R \lessdot U/{}^{\delta}S$ в решётке $\mathrm{Part}(U)$, т. е. существует два блока $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \in U/{}^{\delta}R$, такие что $\tilde{a} = \tilde{a}_1 \cup \tilde{a}_2 \in U/{}^{\delta}S$, а остальные блоки разбиений $U/{}^{\delta}R$ и $U/{}^{\delta}S$ совпадают. При этом диаграмма Хассе квазипорядка R получается из диаграммы Хассе квазипорядка S разбиением блока $\tilde{a}$ на два блока $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$, такие что в квазиупорядоченном множестве (U, R)

1) блок $\tilde{a}_1$ покрывает единственный элемент, а именно $\tilde{a}_2$;
2) блок $\tilde{a}_1$ покрывается только теми элементами, которые покрывали $\tilde{a}$ в квазиупорядоченном множестве (U, S);
3) блок $\tilde{a}_2$ покрывает только те элементы, которые покрывал $\tilde{a}$ в квазиупорядоченном множестве (U, S);
4) остальные элементы диаграммы Хассе квазиупорядоченного множества (U, S) не меняются.

Схематично преобразование диаграммы Хассе квазипорядка S в диаграмму Хассе квазипорядка R изображено на рис. 3.

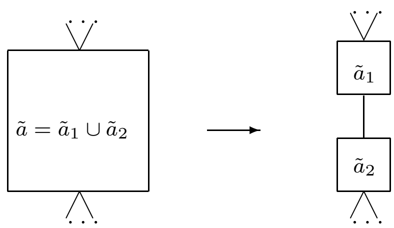


Рис. 3

Пара (a, b), где $a\ R\ b$, $a \neq b$, называется ребром отношения R. Обозначим через $\mathrm{ned}(R)$ число всех рёбер отношения R. Для $n \geqslant 2$ решётка $\mathrm{Qord}(n)$ является атомной, её атомами являются однорёберные частичные порядки.

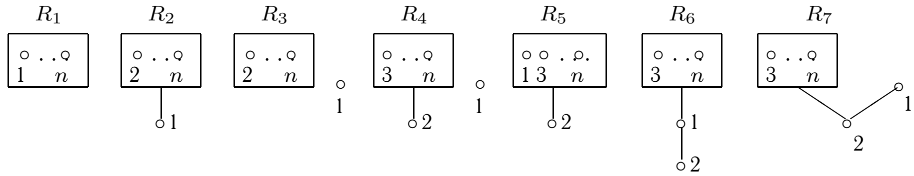
Лемма 4.1. *Пусть $n \geqslant 1$, R_s — линейный порядок на множестве $\mathrm{Qord}(n)$. Тогда длина любой $(\tilde{0}, R_s, \lessdot)$-цепи в решётке $\mathrm{Qord}(n)$ равна $\mathrm{ned}(R_s) = \binom{n}{2}$.*

Доказательство. Действительно, пусть R_k, R_m — некоторые элементы $(\tilde{0}, R_s, \lessdot)$-цепи. Тогда $R_k \lessdot R_m$, только если R_k получается из R_m удалением одного из рёбер. Отсюда и следует нужное утверждение. $\square$

Теорема 4.2. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Для $n \geqslant 3$ решётка $\mathrm{Qord}(n)$ не является градуированной.*
2. *Для $n \geqslant 1$ высота решётки $\mathrm{Qord}(n)$ равна $n(n+1)/2 - 1$.*
3. *Для $n \geqslant 1$ в решётке $\mathrm{Qord}(n)$ существует максимальная цепь длины $2(n-1)$, и длина любой максимальной $(\tilde{0}, \tilde{1}, \leqslant)$-цепи больше или равна $2(n-1)$.*
4. *Если $(R_1, R_2, \ldots, R_l)$ — максимальная $(\tilde{0}, \tilde{1}, \leqslant)$-цепь в решётке $\mathrm{Qord}(n)$, где $l = 2(n-1)$, то для $n \geqslant 3$ диаграмма Хассе квазипорядка R_{l-2} имеет вид $\square\,\square$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Рассмотрим квазипорядки



Имеем $R_4 \lessdot R_3 \lessdot R_2 \lessdot R_1$ и $R_4 \lessdot R_7 \lessdot R_6 \lessdot R_5 \lessdot R_1$, т. е. существуют цепи различной длины.

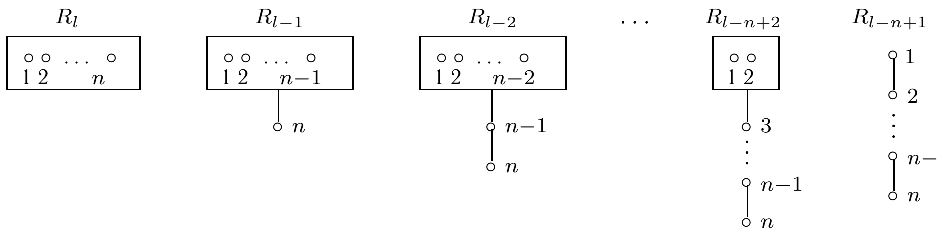
Проверим справедливость утверждения 2. Докажем, что длина любой максимальной $(\tilde{0}, \tilde{1}, \leqslant)$-цепи не превосходит $n(n+1)/2 - 1$. Доказательство будем проводить индукцией по числу n. Пусть $(R_0, R_1, \ldots, R_l)$ — некоторая максимальная $(\tilde{0}, \tilde{1}, \leqslant)$-цепь решётки $\mathrm{Qord}(n)$ наибольшей длины, s — наименьший индекс, такой что R_s не является частичным порядком. По теореме Шпильрайна [12] R_{s-1} — линейный порядок. Поэтому длина $(R_0, \ldots, R_{s-1})$-цепи равна $\binom{n}{2}$.

Из того, что R_{s-1} — линейный порядок, следует также, что диаграмма Хассе квазипорядка R_s содержит ровно один двухэлементный блок $\{u, v\}$ и в диаграммах Хассе квазипорядков R_k, где $k \geqslant s$, элементы u и v расположены в одном блоке. Для всех $k \geqslant s$ в диаграммах Хассе квазипорядков R_k заменим элементы u и v одним элементом w и обозначим полученные квазипорядки через R'_k.

Рассмотрим множество $U' = (U - \{u, v\}) \cup \{w\}$, $|U'| = n - 1$. Пусть $(T_r, \ldots, T_{s-1}, T_s, \ldots, T_l)$ — некоторая максимальная цепь решётки $\mathrm{Qord}(U')$, такая что $T_k = R'_k$ для всех $k \geqslant s$. По индукционному предположению наибольшая длина такой цепи равна $(n-1)n/2 - 1$. Так как по построению T_s — линейный порядок, длина $(T_r, \ldots, T_s)$-цепи равна $\mathrm{ned}(T_s) = \mathrm{ned}(R'_s) = \binom{n-1}{2}$.

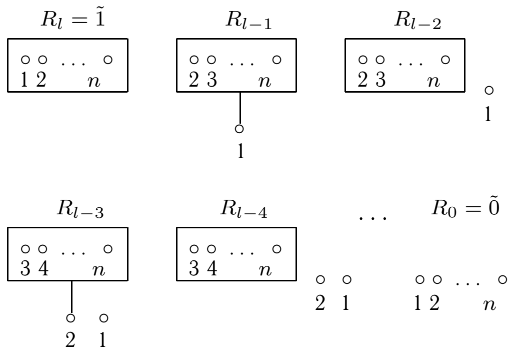
Длины цепей $(T_s, \ldots, T_l)$ и $(R_s, \ldots, R_l)$ равны, поэтому длина $(R_s, \ldots, R_l)$-цепи не превосходит $(n-1)n/2 - 1 - \binom{n-1}{2}$, $l \leqslant \binom{n}{2} + 1 + (n-1)n/2 - 1 - \binom{n-1}{2} = n(n+1)/2 - 1$.

Приведём теперь пример максимальной $(\tilde{0}, \tilde{1}, \leqslant)$-цепи в решётке $\mathrm{Qord}(n)$ длины $n(n+1)/2 - 1$. Определим квазипорядки



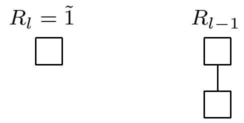
Остальные квазипорядки $R_{l-n}, R_{l-n-1}, \ldots, R_1$ в соответствии с леммой 4.1 можно определить как элементы произвольной максимальной $(\tilde{0}, R_{l-n+1}, \lessdot)$-цепи.

Перейдём к доказательству утверждения 3. Приведём сначала пример максимальной $(\tilde{0}, \tilde{1}, \leqslant)$-цепи длины $l = 2(n-1)$ в решётке $\mathrm{Qord}(U)$, где $U = [1, n]$:

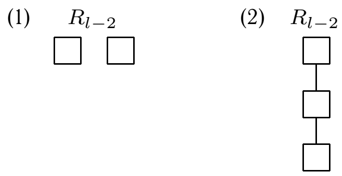


Докажем теперь индукцией по n, что длина любой максимальной $\leqslant$-цепи в $\mathrm{Qord}(n)$ не меньше $2(n-1)$. Предположим, что утверждение доказано для числа $n-1$, $n \geqslant 3$.

Пусть $R_0, R_1, \ldots, R_l$ — некоторая максимальная $(\tilde{0}, \tilde{1}, \leqslant)$-цепь в решётке $\mathrm{Qord}(U)$, где $|U| = n$. Имеем



Для R_{l-2} имеются две возможности:



Пусть имеет место (1), $U/{}^{\delta}R_{l-2} = \{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\}$. Используя индукционное предположение, получим, что

$$l \geqslant 2(|\tilde{a}_1| - 1) + 2(|\tilde{a}_2| - 1) + 2 = 2(n-1).$$

Пусть имеет место (2), $U/{}^{\delta}R_{l-2} = \{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3\}$. Используя индукционное предположение, получим, что

$$l \geqslant 2(|\tilde{a}_1| - 1) + 2(|\tilde{a}_2| - 1) + 2(|\tilde{a}_3| - 1) + 3 + 2 = 2n - 1 > 2(n-1). \qquad \square$$

5. Решётка идемпотентных $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матриц

Пусть $(P, \leqslant)$ — решётка, $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$. На рис. 4 изображена решётка идемпотентных матриц над решёткой $(P, \leqslant)$ порядка 2. Эта решётка является градуированной.

Каждая матрица $A \in P^{n \times n}$ определяет на множестве индексов $U = \{1, \ldots, n\}$ бинарное отношение T_A: условие $(i, j) \in T_A$ равносильно тому, что $a_{ij} = \tilde{1}$.

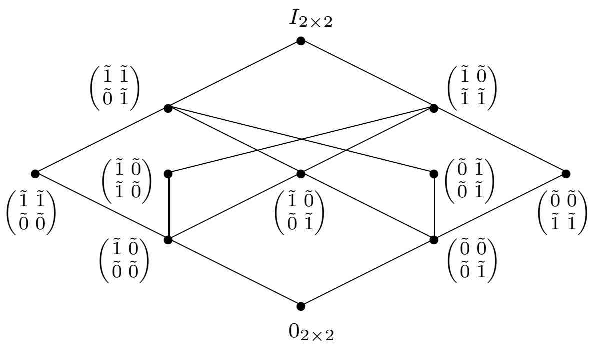


Рис. 4

Лемма 5.1. *Пусть* $(P, \leqslant)$ — *решётка,* $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$, A — *идемпотентная матрица,* $A \geqslant E$. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Условие* $(i, j) \in T_A$ *равносильно неравенству* $A^i \leqslant A^j$.
2. *Условие* $(i, j) \in T_A$ *равносильно неравенству* $A_j \leqslant A_i$.
3. *Отношение* T_A *является квазипорядком.*
4. *Если* $A, B \in [E, I]_{\leqslant}$, *то из* $A \leqslant B$ *следует, что* $T_A \subseteq T_B$.

Доказательство. Утверждения 1 и 2 следуют из теоремы 2.1.

Докажем утверждение 3. Так как $A \geqslant E$, то для любого $i \in U$ $a_{ii} = \tilde{1}$, $(i, i) \in T_A$. Поэтому отношение T_A рефлексивно.

Пусть $(i, j), (j, k) \in T_A$. Тогда $A^i \leqslant A^j$, $A^j \leqslant A^k$, $A^i \leqslant A^k$. Поэтому $(i, k) \in \in T_A$, и отношение T_A транзитивно.

Утверждение 4 вытекает из определения отношения T_A. □

Определим функцию $\varphi\colon [E, I]_{\leqslant} \to \mathrm{Qord}(n)$, такую что $\varphi(A) = T_A$ для любой идемпотентной матрицы $A \in [E, I]_{\leqslant}$.

Теорема 5.1. *Интервал* $[E, I]_{\leqslant}$ *решётки* $\mathrm{Idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ *изоморфен решётке квазипорядков* $\mathrm{Qord}(n)$, *и изоморфизмом является функция* φ.

Доказательство. Очевидно, что φ — инъекция. Пусть T — квазипорядок на множестве U. Определим матрицу A следующим образом: $a_{ij} = \tilde{1}$ равносильно тому, что $(i, j) \in T$. Тогда по лемме 1.4 $A^2 \leqslant A$. Так как $A \geqslant E$, то $A^2 \geqslant A$. Следовательно, матрица A идемпотентна и $\varphi(A) = T$. Таким образом, φ — сюръекция. Неравенства $A \leqslant B$ и $\varphi(A) = T_A \subseteq T_B = \varphi(B)$ равносильны. □

Из доказанной теоремы и теоремы 4.2 вытекает следствие.

Следствие 5.1. *Пусть* $[E, I]_{\leqslant} \subseteq \mathrm{idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если* $n \geqslant 3$, *то интервал* $([E, I]_{\leqslant}, \leqslant)$ *неградуированный.*
2. *Высота интервала* $([E, I]_{\leqslant}, \leqslant)$ *равна* $n(n+1)/2 - 1$.

3. *Для всех $n \geqslant 1$ в интервале $([E, I]_{\leqslant}, \leqslant)$ существует максимальная $\leqslant$-цепь длины $2(n-1)$, и длина любой максимальной $\leqslant$-цепи в этом интервале больше или равна $2(n-1)$.*
4. *Число всех атомов интервала $([E, I]_{\leqslant}, \leqslant)$ равно $n(n-1)$.*
5. *Число всех коатомов интервала $([E, I]_{\leqslant}, \leqslant)$ равно $2^n - 2$.* □

Теорема 5.2. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $n \geqslant 3$, то решётка $\mathrm{Idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ неградуированная.*
2. *Высота решётки $\mathrm{Idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ равна $(n^2 + 3n - 2)/2$.*
3. *Атомами решётки $\mathrm{Idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ являются матрицы E_{ii}, $i = 1, \ldots, n$.*
4. *Для любого коатома A решётки $\mathrm{Idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ справедливо неравенство $A \geqslant E$.*
5. *Коатомами решётки $\mathrm{Idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ являются коатомы её интервала $([E, I]_{\leqslant}, \leqslant)$.*
6. *Число всех коатомов решётки $\mathrm{Idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ равно $2^n - 2$.*

Доказательство. Докажем утверждение 2. Пусть $(A_0, A_1, \ldots, A_k)$ — максимальная $(0, I, \lessdot)$-цепь решётки $\mathrm{Idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ длины k. Для всех $i = 1, \ldots, k$ положим $A_i \vee E = B_i$. Последовательность $(B_0, B_1, \ldots, B_k)$ является $(E, I, \leqslant)$-маршрутом интервала $([E, I]_{\leqslant}, \leqslant)$. Пусть s — число всех попарно различных элементов последовательности $(B_0, B_1, \ldots, B_k)$. Цепь, составленная из этих попарно различных элементов, будет являться $(E, I, \leqslant)$-цепью интервала $([E, I]_{\leqslant}, \leqslant)$ решётки $\mathrm{Idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ длины $s-1$, где $s - 1 \leqslant n(n+1)/2 - 1$. Если $B_i = B_{i+1}$, то идемпотентная матрица A_{i+1} получается из идемпотентной матрицы A_i заменой некоторого элемента главной диагонали, равного $\tilde{0}$, на $\tilde{1}$. Поэтому число всех таких i, что $B_i = B_{i+1}$, не превосходит n, и для длины k любой $(0, I, \lessdot)$-цепи справедливо неравенство $k \leqslant (s-1) + n \leqslant (n^2 + 3n - 2)/2$.

Покажем теперь, что в решётке $\mathrm{Idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ существует $(0, I, \lessdot)$-цепь длины $(n^2 + 3n - 2)/2$. По следствию 5.1 в интервале $([E, I]_{\leqslant}, \leqslant)$ решётки $\mathrm{Idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ существует $(E, I, \lessdot)$-цепь длины $n(n+1)/2 - 1$. Так как интервал $([0, E]_{\leqslant}, \leqslant)$ решётки $\mathrm{Idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ — булеан, то любая $(0, E, \lessdot)$-цепь имеет длину n. Поэтому в решётке $\mathrm{Idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ существует $(0, I, \lessdot)$-цепь длины $(n^2 + 3n - 2)/2$.

Утверждение 3 непосредственно вытекает из теоремы 2.2.

Утверждение 4 следует из того, что для любой идемпотентной матрицы A матрица $A \vee E$ также является идемпотентной. □

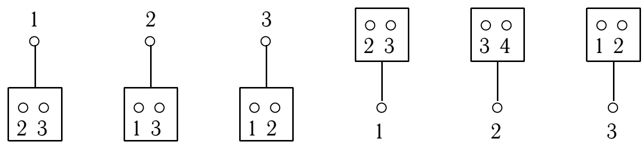


Рис. 5

Пример. Диаграммы Хассе всех коатомов решётки $\mathrm{Qord}(3)$ изображены на рис. 5. Теперь мы находим все коатомы решётки $\mathrm{Idemp}_3(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{0} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{0} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Следствие 5.2. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Наименьшее число элементов, равных* $\tilde{0}$, *в любом коатоме решётки* $\mathrm{Idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ *равно* $n - 1$.
2. *Если число* $\tilde{0}$ *в матрице* $A \in \mathrm{idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\} \leqslant)$ *меньше, чем* $n-1$, *то* $A = I$.
3. *Пересечение всех коатомов решётки* $\mathrm{Idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ *равно* E.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Наибольшее число элементов, равных $\tilde{1}$, в коатомах A решётки $\mathrm{Idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ равно наибольшей мощности отношений T_A, которая равна $n^2 - n + 1$. $\square$

Из теоремы 2.2 следует, что атомами $\mathrm{Idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ являются матрицы $E_{11}, \ldots, E_{nn}$. Поэтому в $\mathrm{Idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ объединение всех атомов равно пересечению всех коатомов и равно E. Следовательно, решётка $\mathrm{Idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$ неатомарна и некоатомарна.

6. Свойства решётки $\mathrm{Idemp}_n(P, \leqslant)$

Теорема 6.1. *Пусть* $(P, \leqslant)$ — *конечная дистрибутивная решётка,* m — *число всех атомов, а* q — *объединение всех атомов решётки* $(P, \leqslant)$. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *При* $|P| \geqslant 2$ *и* $n \geqslant 3$ *решётка* $\mathrm{Idemp}_n(P, \leqslant)$ *неградуированная, немодулярная и недистрибутивная.*
2. *Атомами* $\mathrm{Idemp}_n(P, \leqslant)$ *являются матрицы вида* $a \wedge E_{ii}$, *где* a — *атом решётки* $(P, \leqslant)$. *Объединение всех атомов* $\mathrm{Idemp}_n(P, \leqslant)$ *равно матрице* $q \wedge E$.
3. *Интервалы* $([0_{n\times n}, q \wedge E_{n\times n}]_{\leqslant}, \leqslant)$ *решёток* $\mathrm{Idemp}_n(P, \leqslant)$ *и* $(P^{n\times n}, \leqslant)$ *совпадают и изоморфны булеану* $\mathrm{Bul}(nm)$.
4. *Интервал* $([0_{n\times n}, E_{n\times n}]_{\leqslant}, \leqslant)$ *решётки* $(P^{n\times n}, \leqslant)$ *изоморфен решётке* $(P, \leqslant)^n$.
5. *Коатомами* $\mathrm{Idemp}_n(P, \leqslant)$ *являются матрицы вида* $b \vee A$, *где* b — *коатом* $(P, \leqslant)$, A — *коатом решётки* $\mathrm{Idemp}_n(\{\tilde{0}, \tilde{1}\}, \leqslant)$. *Пересечение всех коатомов решётки* $\mathrm{Idemp}_n(P, \leqslant)$ *равно* $d \vee E$, *где* d — *пересечение всех коатомов решётки* $(P, \leqslant)$.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть a — коатом решётки $(P, \leqslant)$. Имеем

$$a \wedge I_{3\times 3} \lessdot \begin{pmatrix} \tilde{1} & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} \lessdot \begin{pmatrix} \tilde{1} & a & a \\ a & \tilde{1} & a \\ a & a & \tilde{1} \end{pmatrix} \lessdot \begin{pmatrix} \tilde{1} & a & a \\ \tilde{1} & \tilde{1} & a \\ a & a & \tilde{1} \end{pmatrix} \lessdot \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{1} & a \\ \tilde{1} & \tilde{1} & a \\ a & a & \tilde{1} \end{pmatrix} \lessdot$$
$$\lessdot \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{1} & a \\ \tilde{1} & \tilde{1} & a \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \end{pmatrix} \lessdot I_{3\times 3},$$
$$a \wedge I_{3\times 3} \lessdot \begin{pmatrix} \tilde{1} & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} \lessdot \begin{pmatrix} \tilde{1} & a & a \\ a & \tilde{1} & a \\ a & a & a \end{pmatrix} \lessdot \begin{pmatrix} \tilde{1} & a & a \\ a & \tilde{1} & a \\ a & a & \tilde{1} \end{pmatrix} \lessdot \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{1} & a \\ a & \tilde{1} & a \\ a & a & \tilde{1} \end{pmatrix} \lessdot$$
$$\lessdot \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ a & \tilde{1} & a \\ a & a & \tilde{1} \end{pmatrix} \lessdot \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ a & \tilde{1} & \tilde{1} \\ a & a & \tilde{1} \end{pmatrix} \lessdot \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ a & a & \tilde{1} \end{pmatrix} \lessdot I_{3\times 3}.$$

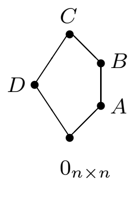
Значит, в решётке $\mathrm{Idemp}_3(P, \leqslant)$ существуют $(a \wedge I, I, \lessdot)$-цепи различной длины.

Для $n \geqslant 3$ функция $\psi\colon \mathrm{idemp}_3(P, \leqslant) \to \mathrm{idemp}_n(P, \leqslant)$, такая что для любого $A \in \mathrm{idemp}_3(P, \leqslant)$

$$\psi(A) = \begin{pmatrix} A & a \wedge I_{3\times(n-3)} \\ a \wedge I_{(n-3)\times 3} & a \wedge I_{(n-3)\times(n-3)} \end{pmatrix},$$

есть изоморфизм $\mathrm{Idemp}_3(P, \leqslant)$ и интервала $([\psi(0), \psi(I)]_{\leqslant}, \leqslant)$ частично упорядоченного множества $\mathrm{Idemp}_n(P, \leqslant)$. Поэтому при $|P| \geqslant 2$ и $n \geqslant 3$ решётка $\mathrm{Idemp}_n(P, \leqslant)$ неградуированная.

Немодулярность и недистрибутивность следуют из того, что решётка $\mathrm{Idemp}_n(P, \leqslant)$ содержит пентагон



,

где $A = E_{11}$,

$$B = \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{0} & \dots & \tilde{0} \\ \tilde{1} & \tilde{0} & \dots & \tilde{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{1} & \tilde{0} & \dots & \tilde{0} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{0} & \dots & \tilde{0} \\ \tilde{1} & \tilde{0} & \dots & \tilde{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \dots & \tilde{1} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{0} & \dots & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \dots & \tilde{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \dots & \tilde{1} \end{pmatrix}.$$

Докажем утверждение 2. Пусть матрица A является атомом решётки $\mathrm{Idemp}_n(P, \leqslant)$. Тогда существуют индексы $i, j \in \{1, \dots, n\}$, такие что $a_{ij} \neq \tilde{0}$. Пусть p — такой атом решётки $(P, \leqslant)$, что $p \leqslant a_{ij}$. По лемме 2.1 матрица $p \wedge A$ является идемпотентной. Поэтому из того, что $0_{n\times n} \leqslant p \wedge A \leqslant A$ и A — атом, следует, что $p \wedge A = A$, т. е. элементами матрицы A являются только $\tilde{0}$ и p.

Из теоремы 2.2 следует, что при $i \neq j$ найдётся такой индекс s, что $a_{ss} = p$. Получим, что идемпотентная матрица $p \wedge E_{ss}$ удовлетворяет двойному неравенству $0_{n\times n} < p \wedge E_{ss} < A$ — противоречие с тем, что A — атом. Таким образом, $i = j$ и матрица A имеет вид $p \wedge E_{ii}$.

Покажем, что справедливо утверждение 3. Так как любая диагональная матрица идемпотентна, интервалы $[0_{n\times n}, q \wedge E_{n\times n}]_\leqslant$ решёток $\mathrm{Idemp}_n(P, \leqslant)$ и $(P, \leqslant)$ совпадают.

Пусть $p_1, \ldots, p_m$ — все атомы решётки $(P, \leqslant)$. Ясно, что подрешётка $[\tilde{0}, q]_\leqslant$ решётки $(P, \leqslant)$ является атомарной. Поэтому изоморфизм

$$\varphi\colon [0_{n\times n}, q \wedge E_{n\times n}]_\leqslant \to \mathrm{Bul}(mn)$$

можно определить следующим образом: $\varphi(A) = B_{n\times m}$ для любой идемпотентной матрицы $A \in [0_{n\times n}, q \wedge E_{n\times n}]_\leqslant$, где для всех $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$

$$b_{ij} = \begin{cases} \tilde{1}, & \text{если } p_j \leqslant a_{ii}, \\ \tilde{0} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Докажем утверждение 5. Пусть A — коатом решётки $\mathrm{Idemp}_n(P, \leqslant)$, $n \geqslant 2$. Если $a_{ij} = \tilde{1}$ для всех $i \neq j$, то $a_{ii} = \bigvee\limits_{r=1}^{n} (a_{ir} \wedge a_{ri}) = \tilde{1}$ для любого $i = 1, \ldots, n$, и матрица A совпадает с наибольшей матрицей I. Таким образом, если A — коатом решётки $\mathrm{Idemp}_n(P, \leqslant)$, то $a_{ij} < \tilde{1}$ для некоторых $i \neq j$.

Если для некоторого $s \in \{1, \ldots, n\}$ имеет место неравенство $a_{ss} < \tilde{1}$, то ввиду идемпотентности матрицы $A \vee E$ и выполнения двойного неравенства $A < A \vee E < I$ получаем противоречие с тем, что A — коатом.

Пусть теперь $a_{ij} < \tilde{1}$ для некоторых $i \neq j$. Выберем коатом p так, что $a_{ij} \leqslant p$. Рассмотрим идемпотентную матрицу $A \vee (p \wedge I)$. Так как $A \leqslant A \vee (p \wedge I) < I$, то $A = A \vee (p \wedge I)$, и элементами матрицы A являются только $\tilde{1}$ и p. Отсюда и следует нужное утверждение. $\square$

7. Структурный критерий идемпотентности

Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решётка, $A \in P^{n\times n}$, $\tilde{1}$ и $\tilde{0}$ — наибольший и наименьший элементы решётки $(P(A), \leqslant)$. Ясно, что матрица A идемпотентна в $(P^{n\times n}, \leqslant)$ тогда и только тогда, когда она идемпотентна в $(P(A)^{n\times n}, \leqslant)$.

Для любого элемента $v \in \mathrm{join}(P(A), \leqslant)$ определена матрица $A^{(v)}$, такая что

$$a_{ij}^{(v)} = \begin{cases} \tilde{1}, & \text{если } a_{ij} \leqslant v, \\ \tilde{0} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Эта матрица называется составляющей матрицы A [5, 8].

Любая матрица $A \in P^{n\times n}$ единственным образом может быть представлена в виде линейной комбинации своих составляющих с элементами из множества $\mathrm{join}(P(A), \leqslant)$ [13]: $A = \bigvee\limits_{v \in \mathrm{join}(P(A), \leqslant)} \bigl(v \wedge A^{(v)}\bigr)$, причём имеет место равенство

$A^k = \bigvee_{v \in \mathrm{join}(P(A), \leqslant)} \left(v \wedge \left(A^{(v)}\right)^k\right)$. Отсюда следует, что матрица A идемпотентна тогда и только тогда, когда идемпотентна каждая из $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матриц $A^{(v)}$.

Матрица $\mathrm{RP}_i(A, \tilde{0}, v)$ называется i-й прямоугольной частью матрицы A, содержащей элемент v, если

1) её элементами являются только $\tilde{0}$ и v;
2) число элементов v в i-й строке матрицы A равно $p+1$, число элементов v в i-м столбце матрицы A равно $q+1$, где $p, q \geqslant 1$;
3) существуют индексы $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \in \{1, \ldots, n\}$, такие что

$$\mathrm{RP}_i(A, \tilde{0}, v) = v \wedge \left(\bigvee_{r=1}^{p} \bigvee_{s=1}^{q} (E_{ii} \vee E_{ij_s} \vee E_{i_r i} \vee E_{i_r j_s}) \right) \leqslant A.$$

Если в этом определении $p = 0$ или $q = 0$, то $\mathrm{RP}_i(A, \tilde{0}, v)$ называется i-й линейной частью матрицы A, содержащей элемент v, и обозначается через $\mathrm{LP}_i(A, \tilde{0}, v)$.

Лемма 7.1. *Пусть $(P, \leqslant)$ — дистрибутивная решётка, $A \in P^{n\times n}$, B, C — квадратные $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матрицы решётки $(P(A) \leqslant)$ порядка n. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если B есть сумма прямоугольных и линейных частей, содержащих $\tilde{1}$, то $B^2 \geqslant B$.*
2. *Если $B^2 \geqslant B$, то $(p \wedge B)^2 \geqslant p \wedge B$ для любого $p \in P$.*
3. *Если $B^2 \geqslant B$ и $C^2 \geqslant C$, то $(B \vee C)^2 \geqslant B \vee C$.*
4. *Если A есть сумма прямоугольных и линейных частей, содержащих какие-либо элементы, то $A^2 \geqslant A$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Обозначим $B^2 = C$. Справедливы неравенства

$$c_{ii} = \bigvee_{r=1}^{n} (b_{ir} \wedge b_{ri}) \geqslant b_{ii}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Пусть $i \neq j$, $b_{ij} = \tilde{1}$. Если B есть $\vee$-объединение своих прямоугольных и линейных частей, содержащих $\tilde{1}$, то b_{ij} «входит» в некоторую прямоугольную или некоторую линейную часть матрицы B. В этом случае для некоторого индекса s имеем $b_{ij} = b_{is} \wedge b_{sj}$. Поэтому

$$c_{ij} = \bigvee_{r=1}^{n} (b_{ir} \wedge b_{rj}) \geqslant b_{ij}.$$

Докажем утверждения 2 и 3. Имеем

$$(p \wedge B)^2 = p \wedge B^2 \geqslant p \wedge B,$$
$$(B \vee C)^2 = B^2 \vee BC \vee CB \vee C^2 \geqslant B \vee BC \vee CB \vee C \geqslant B \vee C.$$

Утверждение 4 непосредственно вытекает из утверждений 1—3. $\square$

В [2] доказано, что каждая идемпотентная $(\tilde{0}, \tilde{1})$-матрица есть $\vee$-объединение прямоугольных и линейных частей, содержащих $\tilde{1}$. Это позволяет сформулировать структурный критерий идемпотентности матриц над дистрибутивными решётками.

Теорема 7.1. *Пусть* $(P, \leqslant)$ — *дистрибутивная решётка,* $A \in P^{n\times n}$. *Матрица* A *идемпотентна тогда и только тогда, когда* $A^2 \leqslant A$ *и* A *есть* $\vee$*-объединение прямоугольных и линейных частей, содержащих элементы множества* $\mathrm{join}(P(A), \leqslant)$. □

Литература

[1] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.

[2] Бисли Л.-Б., Гутерман А. Э., Канг К. Т., Сонг С. З. Идемпотентые матрицы и мажорирование // Фундамент. прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 1. — С. 11—29.

[3] Гретцер Г. Общая теория решёток. — М.: Мир, 1982.

[4] Маренич Е. Е., Кумаров В. Г. Обратимые матрицы над решётками с псевдодополнениями // Фундамент. прикл. мат. — 2005. — Т. 11, вып. 3. — С. 139—154.

[5] Cechlarova K. Powers of matrices over distributive lattices — a review // Fuzzy Sets and Systems. — 2003. — Vol. 138. — P. 627—641.

[6] Duca I., Duca M. La resolution des equations matricielles boolennes // Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys. — 1999. — Vol. 61, no. 1—2. — P. 81—90

[7] Kim K. H. Boolean Matrix Theory and Its Applications. — New York: Marcel Dekker, 1982.

[8] Kirkland S., Pullman N. J. Boolean spectral theory // Linear Algebra Appl. — 1992. — Vol. 175. — P. 177—190.

[9] Liguori F., Martini G., Sessa S. Idempotent and compact matrices on linear lattices: A survey of some lattice results and related solutions of finite relation equations // Internat. J. Math. Math. Sci. — 1993. — Vol. 16, No. 2. — P. 301—310.

[10] Luce R. D. A note on Boolean matrix theory // Proc. Amer. Math. Soc. — 1952. — Vol. 3, no. 2. — P. 382—388.

[11] Song S. Z., Kang K. T. Types and enumeration of idempotent matrices // Far East J. Math. Sci. — 2001. — Vol. 3. — P. 1029—1042.

[12] Szpilrajn E. Sur l'extension de l'ordre partiel // Fund. Math. — 1930. — Vol. 16. — P. 386—389.

[13] Tan Y.-J. On the powers of matrices over a distributive lattice // Linear Algebra Appl. — 2001. — Vol. 336. — P. 1—14.

[14] Zhao C. K. Inverse of L-fuzzy matrices // Fuzzy Sets and Systems. — 1990. — Vol. 34. — P. 103—116.

[15] Zhmuely Z. The lattice of idempotent binary relation // Algebra Universalis. — 1979. — Vol. 9. — P. 297—304.