Вычисление длин матричных подалгебр специального вида

О. В. МАРКОВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ov_markova@mail.ru

УДК 512.643

Ключевые слова: длины конечномерных ассоциативных алгебр, матричные подалгебры, верхнетреугольные матрицы, блочные матрицы.

Аннотация

Длиной конечной системы порождающих конечномерной ассоциативной алгебры над произвольным полем называется наименьшее натуральное число k, такое что слова длины, не большей k, порождают данную алгебру как векторное пространство. Длиной алгебры называется максимум длин её систем порождающих. В настоящей работе предлагаются серии примеров вычисления длин матричных подалгебр. В частности, вычислены длины некоторых верхнетреугольных матричных подалгебр, их прямых сумм и классических коммутативных подалгебр в алгебре матриц. Изучается вопрос о связи длины алгебры с длинами её подалгебр.

Abstract

O. V. Markova, Length computation of matrix subalgebras of special type, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 4, pp. 165—197.

Let $\mathbb{F}$ be a field and let $\mathcal{A}$ be a finite-dimensional $\mathbb{F}$-algebra. We define the length of a finite generating set of this algebra as the smallest number k such that words of length not greater than k generate $\mathcal{A}$ as a vector space, and the length of the algebra is the maximum of the lengths of its generating sets. In this article, we give a series of examples of length computation for matrix subalgebras. In particular, we evaluate the lengths of certain upper triangular matrix subalgebras and their direct sums, and the lengths of classical commutative matrix subalgebras. The connection between the length of an algebra and the lengths of its subalgebras is also studied.

1. Основные определения и обозначения

Пусть дана конечномерная ассоциативная алгебра $\mathcal{A}$ над произвольным полем $\mathbb{F}$. Любая конечномерная алгебра также является конечно порождённой. Пусть $\mathcal{S} = \{a_1, \ldots, a_k\}$ — конечная система порождающих алгебры $\mathcal{A}$.

Обозначение 1.1. Пусть $\langle S \rangle$ обозначает линейную оболочку, т. е. множество всех конечных линейных комбинаций с коэффициентами из $\mathbb{F}$, множества S.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 4, с. 165—197.

Определение 1.2. *Длина* слова $a_{i_1}\ldots a_{i_t}$, где $a_{i_j}\in\mathcal{S}$, $a_{i_j}\neq 1$, равна t. Если $\mathcal{A}$ — алгебра с 1, то считаем 1 словом от элементов $\mathcal{S}$ *длины* 0.

Обозначение 1.3. Пусть $\mathcal{S}^i$ обозначает множество всех слов в алфавите $\{a_1,\ldots,a_k\}$ длины, не большей i, $i\geqslant 0$.

Обозначение 1.4. Пусть $\mathcal{L}_i(\mathcal{S})=\langle\mathcal{S}^i\rangle$ и $\mathcal{L}(\mathcal{S})=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}\mathcal{L}_i(\mathcal{S})$ обозначает линейную оболочку всех слов в алфавите $\{a_1,\ldots,a_k\}$. Заметим, что $\mathcal{L}_0(\mathcal{S})=\mathbb{F}$, если $\mathcal{A}$ — алгебра с единицей, и $\mathcal{L}_0(\mathcal{S})=0$ в противном случае.

Так как $\mathcal{S}$ является системой порождающих для $\mathcal{A}$, то любой элемент $\mathcal{A}$ можно представить в виде конечной линейной комбинации слов от $\{a_1,\ldots,a_k\}$, т. е. $\mathcal{A}=\mathcal{L}(\mathcal{S})$. Из определения $\mathcal{S}^i$ следует, что

$$\mathcal{L}_{i+j}(\mathcal{S})=\langle\mathcal{L}_i(\mathcal{S})\mathcal{L}_j(\mathcal{S})\rangle$$

и

$$\mathcal{L}_0(\mathcal{S})\subseteq\mathcal{L}_1(\mathcal{S})\subseteq\ldots\subseteq\mathcal{L}_h(\mathcal{S})\subseteq\ldots\subseteq\mathcal{L}(\mathcal{S})=\mathcal{A}.$$

Из конечномерности A следует, что найдётся такой номер h, что $\mathcal{L}_h(\mathcal{A})=\mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{A})$.

Определение 1.5. *Длиной системы порождающих* $\mathcal{S}$ называется наименьшее неотрицательное целое число k, для которого $\mathcal{L}_k(S)=\mathcal{L}_{k+1}(S)$, обозначим это число $\mathrm{l}(\mathcal{S})$.

Отметим, что если для некоторого $h\geqslant 0$ выполнено $\mathcal{L}_h(\mathcal{S})=\mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$, то

$$\mathcal{L}_{h+2}(\mathcal{S})=\langle\mathcal{L}_1(\mathcal{S})\mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})\rangle=\langle\mathcal{L}_1(\mathcal{S})\mathcal{L}_h(\mathcal{S})\rangle=\mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$$

и также $\mathcal{L}_i(\mathcal{S})=\mathcal{L}_h(\mathcal{S})$ для всех $i\geqslant h$. Значит, длина $\mathrm{l}(\mathcal{S})$ определена корректно. Поскольку $\mathcal{S}$ является системой порождающих для $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}_h(\mathcal{S})=\mathcal{L}(\mathcal{S})=\mathcal{A}$.

Определение 1.6. *Длиной алгебры* $\mathcal{A}$ называется число $\mathrm{l}(A)=\max\limits_{S}\mathrm{l}(S)$, где максимум берётся по всем системам порождающих этой алгебры.

Определение 1.7. Слово $v\in\mathcal{L}_j(\mathcal{S})$ называется *сократимым над* $\mathcal{S}$, если найдётся такой номер $i<j$, что $v\in\mathcal{L}_i(\mathcal{S})$ и $\mathcal{L}_i(\mathcal{S})\neq\mathcal{L}_j(\mathcal{S})$.

Обозначение 1.8. Далее пусть $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ обозначает линейное пространство матриц размера $m\times n$ над полем $\mathbb{F}$, $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ обозначает алгебру матриц порядка n над полем $\mathbb{F}$, $\mathrm{T}_n(\mathbb{F})$ — алгебру верхнетреугольных матриц порядка n над полем $\mathbb{F}$, $\mathrm{D}_n(\mathbb{F})$ — алгебру диагональных матриц порядка n над полем $\mathbb{F}$, а $\mathrm{N}_n(\mathbb{F})$ — подалгебру нильпотентных матриц в $\mathrm{T}_n(\mathbb{F})$.

Обозначение 1.9. Через E обозначим единичную матрицу, через $E_{i,j}$ — матричную единицу, т. е. матрицу с 1 на (i,j)-м месте и 0 на остальных.

2. Введение

Задача вычисления длины алгебры матриц как функции порядка матриц была поставлена в [9] и до сих пор не решена. Случай, когда порядок матриц равен 3, изучали Спенсер и Ривлин [11, 12] в связи с возможным применением в механике. Известные верхние оценки длины алгебры матриц Паза и Паппачены не являются линейными.

Теорема 2.1 ([9, теорема 1, замечание 1]). *Пусть* $\mathbb{F}$ — *произвольное поле. Тогда* $\mathrm{l}\big(\mathrm{M}_n(\mathbb{F})\big) \leqslant \lceil (n^2+2)/3 \rceil$.

Теорема 2.2 ([8, следствие 3.2]). *Пусть* $\mathbb{F}$ — *произвольное поле. Тогда* $\mathrm{l}\big(\mathrm{M}_n(\mathbb{F})\big) < n\sqrt{2n^2/(n-1)+1/4} + n/2 - 2$.

Существует гипотеза, состоящая в том, что зависимость между длиной и порядком матриц линейная.

Гипотеза 2.3 ([9, гипотеза 6.4]). Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда $\mathrm{l}\big(\mathrm{M}_n(\mathbb{F})\big) = 2n-2$.

В разделе 3 данной работы даётся прямая проверка гипотезы 2.3 при $n = 2, 3$.

Некоторые системы порождающих, длины которых не превосходят $2n-2$, рассмотрены в [6]. Пример системы порождающих длины $2n-2$ в случае, когда основное поле является алгебраически замкнутым характеристики 0, построен в [5, раздел 4].

В [8] были получены линейные оценки для длин систем порождающих в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ при задании дополнительных условий на собственные значения матриц системы или степень минимального многочлена. В разделе 8 данной работы также получены некоторые условия на собственные значения матриц системы, дающие линейную оценку.

Однако вследствие недостатка конкретных примеров алгебр, для которых возможно точно вычислить или оценить длину, существуют трудности в развитии общей теории. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы ликвидировать этот пробел и построить серии таких примеров.

Раздел 4 содержит примеры вычисления длин некоторых верхнетреугольных матричных подалгебр. В разделе 5 получены верхние и нижние оценки длины прямой суммы нескольких матричных алгебр и блочно-треугольных матричных алгебр. В качестве следствия найдены оценки для длины подалгебр треугольной матричной алгебры.

В разделе 6 приведены примеры вычисления длины подалгебр треугольной матричной алгебры над полем из двух элементов. Заметим, что в этом случае результаты существенно отличаются от вычисления длины тех же подалгебр в случае, когда мощность поля больше порядка матриц (теорема 4.5 и следствие 4.6).

Раздел 7 посвящён вычислению длины некоторых классических коммутативных матричных подалгебр. Раздел 9 содержит примеры, показывающие, что длина подалгебры может превышать длину содержащей её алгебры на любое положительное целое число. В частности, подраздел 9.1 содержит примеры вычисления длины двухблочных верхнетреугольных матричных алгебр.

3. Длины алгебр матриц порядков 2 и 3

Вычислим длины алгебр матриц порядков 2 и 3 над произвольным полем. Точные верхние оценки для длин данных алгебр следуют, например, из теоремы 2.1, но здесь даётся независимое прямое доказательство, не использующее никаких дополнительных результатов.

Лемма 3.1. *Пусть* $\mathbb{F}$ — *произвольное поле. Тогда* $\mathrm{l}\big(\mathrm{M}_2(\mathbb{F})\big) = 2$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{S} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ — система порождающих алгебры $\mathrm{M}_2(\mathbb{F})$. Будем считать, что все элементы $\mathcal{S}$ линейно независимы (в противном случае удалим из $\mathcal{S}$ лишние элементы). Поскольку $E \in \mathcal{L}_0(\mathcal{S})$, то $E \in \mathcal{L}_1(\mathcal{S})$. Если $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \leqslant 2$, то $\mathcal{S} = \{A\}$ или $\mathcal{S} = \{E, A\}$. В этом случае по теореме Гамильтона—Кэли $\dim \mathcal{L}(\mathcal{S}) \leqslant 2 < 4 = \dim \mathrm{M}_2(\mathbb{F})$, и $\mathcal{S}$ не является системой порождающих. Значит, $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \geqslant 3$. Если $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = 4 = \dim \mathrm{M}_2(\mathbb{F})$, то $\mathrm{l}(\mathcal{S}) = 1$. Осталось рассмотреть случай $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = 3$. Заметим, что если $\dim \mathcal{L}_i(\mathcal{S}) < 4$, то $\dim \mathcal{L}_{i+1}(\mathcal{S}) > \dim \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$, так как для системы порождающих размерность увеличивается хотя бы на единицу на каждом шаге, пока не будет порождена вся алгебра. Следовательно, $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = 4$, и $\mathrm{l}\big(\mathrm{M}_2(\mathbb{F})\big) \leqslant 2$. Эта оценка достигается на системе порождающих, состоящей из матриц $E_{1,2}$ и $E_{2,1}$. □

Лемма 3.2. *Пусть* $\mathbb{F}$ — *произвольное поле. Тогда* $\mathrm{l}\big(\mathrm{M}_3(\mathbb{F})\big) = 4$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{S} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ — система порождающих алгебры $\mathrm{M}_3(\mathbb{F})$. Будем считать, что все элементы $\mathcal{S}$ линейно независимы (в противном случае удалим из $\mathcal{S}$ лишние элементы). Поскольку $E \in \mathcal{L}_0(\mathcal{S})$, то $E \in \mathcal{L}_1(\mathcal{S})$. Если $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \leqslant 2$, то $\mathcal{S} = \{A\}$ или $\mathcal{S} = \{E, A\}$. В этом случае по теореме Гамильтона—Кэли $\dim \mathcal{L}(\mathcal{S}) \leqslant 3 < 9 = \dim \mathrm{M}_3(\mathbb{F})$, и $\mathcal{S}$ не является системой порождающих. Значит, $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \geqslant 3$. Дальнейшее доказательство проводится отдельно для разных $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S})$.

1. Пусть $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = 3$. Докажем, что в этой ситуации $\mathrm{l}(\mathcal{S}) \leqslant 4$. Предположим противное: $\mathrm{l}(\mathcal{S}) > 4$. Тогда в $\mathcal{L}_5(\mathcal{S})$ найдётся несократимое слово $B = A_{i_1} \ldots A_{i_5}$. Из несократимости B следует, что его подслова $A_{i_1}A_{i_2}$, $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$ и $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}A_{i_4}$ также несократимы, и значит, $\dim \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) \geqslant 6$. Теперь допустим, что $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = 4$, т. е. все слова в $\mathcal{L}_2(\mathcal{S})$ представляются в виде линейной комбинации $A_{i_1}A_{i_2}$ и слов длины, меньшей 2. Но тогда слово B есть линейная комбинация сократимого слова $A_{i_1}^3 A_{i_2} A_{i_5}$ и слов длины, меньшей 5, т. е. B сократимо. Пусть теперь $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) > 4$, $\dim \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) \geqslant 7$. Предположим, что все слова в $\mathcal{L}_3(\mathcal{S})$ представляются в виде линейной комбинации $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$ и слов длины, меньшей 3. Тогда получим, что слово B представляется в виде линейной комбинации сократимого слова $A_{i_1}^3 A_{i_2} A_{i_3}$ и слов длины, меньшей 5, т. е. B сократимо. Считаем, что в $\mathcal{L}_3(\mathcal{S})$ есть несократимое слово, не представляющееся в виде линейной комбинации $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$ и слов длины, меньшей 3. Следовательно, $\dim \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) \geqslant 8$. Далее возможны два случая: либо A_{i_1} и A_{i_2} совпадают, либо они различны. Если $A_{i_1} = A_{i_2}$, то либо все слова в $\mathcal{L}_4(\mathcal{S})$ представляются в виде

линейной комбинации $A_{i_1}^2 A_{i_3} A_{i_4}$ и слов длины, меньшей 4, либо $\dim \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) = 9$. А тогда слово B либо представляется в виде линейной комбинации сократимого слова $A_{i_1}^3 A_{i_3} A_{i_4}$ и слов длины, меньшей 5, либо $B \in \mathcal{L}_4(\mathcal{S})$, поскольку $\mathcal{L}_4(\mathcal{S}) = \mathrm{M}_3(\mathbb{F})$. Таким образом, B не может быть несократимо. При $A_{i_1} \neq A_{i_2}$ либо $\dim \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) = 9$ и $B \in \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) = \mathrm{M}_3(\mathbb{F})$, либо слово B представляется линейной комбинацией $A_{i_1}^2 A_{i_2} A_{i_3} A_{i_4}$ и слов меньшей длины, т. е. также получается, что B сократимо. Противоречие.

2. Пусть $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = 4$. Докажем, что в этом случае $\mathrm{l}(\mathcal{S}) \leqslant 4$. Предположим противное: $\mathrm{l}(\mathcal{S}) > 4$. Тогда в $\mathcal{L}_5(\mathcal{S})$ найдётся несократимое слово $B = A_{i_1} \ldots A_{i_5}$. Из несократимости B следует, что и его подслова $A_{i_1} A_{i_2}$, $A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}$ и $A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} A_{i_4}$ также несократимы, и значит, $\dim \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) \geqslant 7$. Теперь допустим, что $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = 5$, т. е. все слова в $\mathcal{L}_2(\mathcal{S})$ представляются в виде линейной комбинации $A_{i_1} A_{i_2}$ и слов длины, меньшей 2. Но тогда слово B есть линейная комбинация сократимого слова $A_{i_1}^3 A_{i_2} A_{i_5}$ и слов длины, меньшей 5, т. е. B сократимо. Пусть теперь $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) > 5$, $\dim \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) \geqslant 8$. Предположим, что все слова в $\mathcal{L}_3(\mathcal{S})$ представляются в виде линейной комбинации $A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}$ и слов длины, меньшей 3. Тогда получим, что слово B представляется в виде линейной комбинации сократимого слова $A_{i_1}^3 A_{i_2} A_{i_3}$ и слов длины, меньшей 5, т. е. B сократимо. Считаем, что в $\mathcal{L}_3(\mathcal{S})$ есть несократимое слово, не представляющееся в виде линейной комбинации $A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}$ и слов длины, меньшей 3. Следовательно, $\dim \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) = 9 = \dim \mathrm{M}_3(\mathbb{F})$, т. е. $\mathcal{L}_4(\mathcal{S}) = \mathrm{M}_3(\mathbb{F})$, а значит, B сократимо. Противоречие.

3. Пусть $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = 5$. Докажем, что в этом случае $\mathrm{l}(\mathcal{S}) \leqslant 4$. Предположим противное: $\mathrm{l}(\mathcal{S}) > 4$. Тогда в $\mathcal{L}_5(\mathcal{S})$ найдётся несократимое слово $B = A_{i_1} \ldots A_{i_5}$. Из несократимости B следует, что и его подслова $A_{i_1} A_{i_2}$, $A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}$ и $A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} A_{i_4}$ также несократимы, и значит, $\dim \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) \geqslant 8$. Теперь допустим, что $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = 6$, т. е. все слова в $\mathcal{L}_2(\mathcal{S})$ представляются в виде линейной комбинации $A_{i_1} A_{i_2}$ и слов длины, меньшей 2. Но тогда слово B есть линейная комбинация сократимого слова $A_{i_1}^3 A_{i_2} A_{i_5}$ и слов длины, меньшей 5, т. е. B сократимо. Если $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) \geqslant 7$, то $\dim \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) = 9$. Следовательно, $\dim \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) = 9 = \dim \mathrm{M}_3(\mathbb{F})$, т. е. $\mathcal{L}_4(\mathcal{S}) = \mathrm{M}_3(\mathbb{F})$, а значит, B сократимо. Противоречие.

4. Пусть $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \geqslant 6$. Тогда $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) \geqslant 7$, $\dim \mathcal{L}_3(\mathcal{S}) \geqslant 8$ и $\dim \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) = 9$, так как если $\dim \mathcal{L}_i(\mathcal{S}) < 9$, то $\dim \mathcal{L}_{i+1}(\mathcal{S}) \geqslant \dim \mathcal{L}_i(\mathcal{S}) + 1$. Следовательно, $\mathrm{l}(\mathcal{S}) \leqslant 4$ для всех $\mathcal{S}$.

Эта оценка достигается на системе порождающих, состоящей из матриц $E_{1,2}$ и $E_{1,2} + E_{2,3} + E_{3,1}$. $\square$

4. Длины подалгебр верхнетреугольных матриц

В [1] была доказана следующая теорема.

Теорема 4.1 ([1, теорема 1]). *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда $\mathrm{l}\big(\mathrm{T}_n(\mathbb{F})\big) = n - 1$.*

Для длины верхнетреугольных матричных подалгебр удаётся доказать следующую линейную оценку.

Лемма 4.2. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — произвольная подалгебра $\mathrm{T}_n(\mathbb{F})$. Тогда $\mathrm{l}(\mathcal{A}) \leqslant n-1$.*

Доказательство. Пусть $A_k = (a_{i,j}^k) \in \mathcal{A}$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\prod_{i=1}^{n}(A_i - a_{i,i}^i E) = 0. \tag{4.1}$$

Действительно, так как если $A, B \in \mathrm{T}_n(\mathbb{F})$ и первые k столбцов у матрицы A нулевые, а у матрицы B равен нулю $(k+1)$-й диагональный элемент, то у матрицы AB нулевыми будут все столбцы с первого по $(k+1)$-й. Следовательно, слово $A_1 A_2 \ldots A_n$ можно представить в виде линейной комбинации слов длины, меньшей n, т. е. $\mathrm{l}(\mathcal{A}) \leqslant n-1$. □

В дальнейшем нам понадобится следующий тип матриц.

Определение 4.3. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Матрица $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ называется *циклической*, если

$$\dim_{\mathbb{F}}(\langle E, C, C^2, \ldots, C^{n-1}\rangle) = n.$$

Предложение 4.4. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Матрица $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ является циклической тогда и только тогда, когда её минимальный многочлен совпадает с характеристическим.*

Доказательство. Пусть $P(C) = \langle p(C) \colon p(t) — \text{многочлен}\rangle$. Пусть $\mu_C(t)$ обозначает минимальный многочлен матрицы C, $\chi_C(t)$ — характеристический. По теореме Гамильтона—Кэли $P(C) = \langle E, C, C^2, \ldots, C^{n-1}\rangle$. Тогда по [4, теорема 4.4.17] получаем $\deg \mu_C(t) = \dim P(C) = n = \deg \chi_C(t)$. □

Теорема 4.5. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Если $|\mathbb{F}| \geqslant n$, то $\mathrm{l}\big(\mathrm{D}_n(\mathbb{F})\big) = n-1$.*

Доказательство. Для любого поля $\mathbb{F}$ выполнено $\mathrm{l}\big(\mathrm{D}_n(\mathbb{F})\big) \leqslant n-1$. По условию теоремы найдётся такая матрица $A \in \mathrm{D}_n(\mathbb{F})$, что все её диагональные элементы попарно различны. Минимальный многочлен матрицы A совпадает с характеристическим, значит, по предложению 4.4 A является циклической матрицей. По определению циклической матрицы $E, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ линейно независимы и, следовательно, образуют базис $\mathrm{D}_n(\mathbb{F})$. Значит, если взять систему порождающих $\mathcal{S} = \{A\}$, то $\mathrm{l}(\mathcal{S}) = n-1$. □

Следствие 4.6. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — такая подалгебра $\mathrm{T}_n(\mathbb{F})$, что $\mathcal{A} \cap \mathrm{D}_n(\mathbb{F}) = \mathrm{D}_n(\mathbb{F})$. Тогда $\mathrm{l}(\mathcal{A}) \geqslant \mathrm{l}\big(\mathrm{D}_n(\mathbb{F})\big)$ и, в частности, если $|\mathbb{F}| \geqslant n$, то $\mathrm{l}(\mathcal{A}) = n-1$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}$ — система порождающих $\mathrm{D}_n(\mathbb{F})$ с $\mathrm{l}(\mathcal{S}) = \mathrm{l}\big(\mathrm{D}_n(\mathbb{F})\big)$, и пусть $N_1, \ldots, N_t$ — базис $\mathcal{A} \cap \mathrm{N}_n(\mathbb{F})$. Пусть $\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \mathcal{S} \cup \{N_1, \ldots, N_t\}$. Так как для любых $D \in \mathrm{D}_n(\mathbb{F})$ и $N \in \mathrm{N}_n(\mathbb{F})$ справедливо, что $DN, ND \in \mathrm{N}_n(\mathbb{F})$, то $\mathrm{l}(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}) = \mathrm{l}(\mathcal{S}) = \mathrm{l}\big(\mathrm{D}_n(\mathbb{F})\big)$. Следовательно, $\mathrm{l}(\mathcal{A}) \geqslant \mathrm{l}(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}) = \mathrm{l}\big(\mathrm{D}_n(\mathbb{F})\big)$. □

5. Длина прямых сумм алгебр над произвольным полем

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — конечномерные алгебры над одним полем $\mathbb{F}$. Через $\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$ обозначим алгебру, элементами которой являются пары (a,b), $a\in\mathcal{A}$, $b\in\mathcal{B}$ с покоординатными сложением, умножением на числа и умножением, т. е. для любых $(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a,b)\in\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$ и любых $\alpha\in\mathbb{F}$ выполнено

$$\begin{gathered}(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2),\\ \alpha(a,b)=(\alpha a,\alpha b),\\ (a_1,b_1)(a_2,b_2)=(a_1a_2,b_1b_2).\end{gathered}$$

Ранее автором были получены следующие результаты.

Теорема 5.1 ([1, теорема 2]). *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — конечномерные алгебры над полем $\mathbb{F}$ длины $\mathrm{l}_\mathcal{A}$ и $\mathrm{l}_\mathcal{B}$ соответственно. Тогда выполнены следующие неравенства*:

$$\max\{\mathrm{l}_\mathcal{A},\mathrm{l}_\mathcal{B}\}\leqslant \mathrm{l}(\mathcal{A}\oplus\mathcal{B})\leqslant \mathrm{l}_\mathcal{A}+\mathrm{l}_\mathcal{B}+1. \tag{5.1}$$

Определение 5.2. Назовём алгебру $\mathcal{A}\subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ *блочно-диагональной*, если любая $A\in\mathcal{A}$ имеет вид

$$A=\left(\begin{array}{cccc}A_1 & 0 & \dots & 0\\ \hline 0 & A_2 & \dots & 0\\ \hline & & \dots & \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_k\end{array}\right),$$

где $A_i\in \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{F})$, $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$.

Определение 5.3. Назовём алгебру $\mathcal{A}\subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ *блочно-треугольной*, если любая $A\in\mathcal{A}$ имеет вид

$$A=\left(\begin{array}{cccc}A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,k}\\ \hline 0 & A_{2,2} & \dots & A_{2,k}\\ \hline & & \dots & \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{k,k}\end{array}\right),$$

где $A_{i,j}\in \mathrm{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{F})$, $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$.

В случае, когда $\mathcal{A}\subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, $\mathcal{B}\subset \mathrm{M}_m(\mathbb{F})$, будем отождествлять $\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$ с блочно-диагональной подалгеброй в $\mathrm{M}_{n+m}(\mathbb{F})$.

Следствие 5.4 ([1, следствие 3]). *Пусть $\mathcal{A}$ — подалгебра блочно-диагональных или блочно-треугольных матриц, у всех матриц которой на диагонали стоят k блоков с длинами $l_1,\ldots,l_k$ соответственно. Тогда для $\mathrm{l}(\mathcal{A})$ выполнены следующие неравенства*:

$$\max\{l_1,\ldots,l_k\}\leqslant \mathrm{l}(\mathcal{A})\leqslant \sum_{j=1}^{k} l_j+k-1. \tag{5.2}$$

Для некоторых прямых сумм матричных подалгебр нам удалось точно вычислить длину.

Теорема 5.5. *Пусть* $\mathbb{F}$ — *произвольное поле. Тогда* $\mathrm{l}(\mathrm{T}_n(\mathbb{F}) \oplus \mathbb{F}) = n$.

Доказательство. По теореме 5.1

$$\mathrm{l}(\mathrm{T}_n(\mathbb{F}) \oplus \mathbb{F}) \leqslant \mathrm{l}\big(\mathrm{T}_n(\mathbb{F})\big) + \mathrm{l}(\mathbb{F}) + 1 = n - 1 + 0 + 1 = n.$$

Рассмотрим следующую систему порождающих для $\mathrm{T}_n(\mathbb{F}) \oplus \mathbb{F}$:

$$\mathcal{S} = \{A_i = E_{i,i} + E_{i,i+1},\ E_{n,n},\ E,\ i = 1, \ldots, n-1\}.$$

Заметим, что все A_i — идемпотенты, и $A_j A_k = 0$ при $j > k$ и $k - j > 2$, а $A_j A_{j+1} \ldots A_{j+t} = E_{j,j+t} + E_{j,j+t+1}$ и $A_{n-s} A_{n-s+1} \ldots A_{n-1} E_{n,n} = E_{n-s,n}$, $1 \leqslant t \leqslant n-2$, $1 \leqslant s \leqslant n-1$, т. е. у матриц в $\mathcal{L}_1(\mathcal{S})$ ненулевые элементы могут находиться на главной диагонали и на первой наддиагонали, у матриц в $\mathcal{L}_2(\mathcal{S})$ — также на второй наддиагонали, у матриц в $\mathcal{L}_k(\mathcal{S})$ — также на k-й наддиагонали. Тогда $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = n+1$, $\dim \mathcal{L}_{k+1}(\mathcal{S}) = \dim \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) + n - k$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Отсюда получаем при $2 \leqslant k \leqslant n$, что

$$\dim \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) = (n+1) + (n-1) + (n-2) + \ldots + (n-k+1).$$

Значит,

$$\dim \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}) = \frac{n(n+1)}{2} < \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \dim \mathcal{L}_n(\mathcal{S}) = \dim(\mathrm{T}_n(\mathbb{F}) \oplus \mathbb{F})$$

и $\mathrm{l}(\mathcal{S}) = n$. □

Теорема 5.6. *Пусть* $\mathbb{F}$ — *произвольное поле. Тогда* $\mathrm{l}\big(\mathrm{T}_2(\mathbb{F}) \oplus \mathrm{T}_2(\mathbb{F})\big) = 3$.

Доказательство. По теореме 5.1

$$\mathrm{l}\big(\mathrm{T}_2(\mathbb{F}) \oplus \mathrm{T}_2(\mathbb{F})\big) \leqslant 2\mathrm{l}\big(\mathrm{T}_2(\mathbb{F})\big) + 1 = 3.$$

Рассмотрим следующую систему порождающих для $\mathrm{T}_2(\mathbb{F}) \oplus \mathrm{T}_2(\mathbb{F})$:

$$\mathcal{S} = \{A = E_{1,1} + E_{1,2} + E_{3,3} + E_{3,4},\ B = E_{2,2} + E_{3,3},\ E\}.$$

Видно, что $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = 3$. Так как $B^2 = B$, $A^2 = A$, $AB = E_{1,2} + E_{3,3}$ и $BA = E_{3,3} + E_{3,4}$, то $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = 5 < 6 = \dim \mathrm{T}_2(\mathbb{F}) \oplus \mathrm{T}_2(\mathbb{F})$. А поскольку $BAB = E_{3,3}$, то $\dim \mathcal{L}_3(\mathcal{S}) = 6$ и $\mathrm{l}\big(\mathrm{T}_2(\mathbb{F}) \oplus \mathrm{T}_2(\mathbb{F})\big) \geqslant \mathrm{l}(\mathcal{S}) = 3$. □

Предложение 5.7. *Пусть* $\mathbb{F}$ — *произвольное поле. Тогда* $\mathrm{l}\big(\mathbb{F} \oplus \mathrm{M}_2(\mathbb{F})\big) = 2$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}$ — система порождающих для данной алгебры. Очевидно, что в $\mathcal{S}$ есть по крайней мере два независимых элемента: a_1 и a_2. Пусть $a \in \mathcal{S}$, $a = (\alpha, A)$, $\alpha \in \mathbb{F}$, $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{F})$ и $\chi_A(t)$ — характеристический многочлен A. Если $\chi_A(a) \neq 0$, то $(1, 0) \in \mathcal{L}_2(\mathcal{S})$, а значит, $\mathrm{l}(\mathcal{S})$ не может быть больше двух. Рассмотрим случай, когда для всех $a \in \mathcal{S}$ значение $\chi_A(a)$ равно 0. Предположим, нашлось несократимое слово длины 3 $a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3}$. Его подслово $a_{i_1} a_{i_2}$ также будет несократимым. Это означает, что $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) \geqslant 4$. Допустим, что

$\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = 4$, т. е. все слова в $\mathcal{L}_2(\mathcal{S})$ представляются в виде линейной комбинации $a_{i_1}a_{i_2}$ и слов длины, меньшей 2. Но тогда слово $a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}$ есть линейная комбинация сократимого слова $a_{i_1}^2 a_{i_2}$ и слов длины, меньшей 3, т. е. $a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}$ сократимо. Пусть теперь $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = 5$, т. е. $\mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = \mathbb{F} \oplus \mathrm{M}_2(\mathbb{F})$. Отсюда следует, что $\mathrm{l}\big(\mathbb{F} \oplus \mathrm{M}_2(\mathbb{F})\big) = 2$. □

6. Вычисление длин алгебр над полем из двух элементов

Теорема 6.1. $\mathrm{l}\big(\mathrm{D}_n(\mathbb{F}_2)\big) = [\log_2 n]$.

Доказательство.

I. Сперва докажем верхнюю оценку $\mathrm{l}\big(\mathrm{D}_n(\mathbb{F}_2)\big) \leqslant [\log_2 n]$. Доказательство проведём отдельно для различных значений n.

1. Очевидно, что $\mathrm{l}\big(\mathrm{D}_1(\mathbb{F}_2)\big) = \mathrm{l}(\mathbb{F}_2) = 0$.

2. Пусть $n = 2^l + k$, $l, k \in \mathbb{Z}_+$, $0 < k \leqslant 2^l$, и пусть $\mathcal{S} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ — такая система порождающих данной алгебры, что $E \notin \langle \mathcal{S} \rangle$. Отметим, что рассматриваемая алгебра коммутативна и все её элементы являются идемпотентами. Следовательно, линейно независимыми могут быть только слова вида $A_{i_1} \ldots A_{i_p}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant m$, $0 \leqslant p \leqslant m$. Их число равно

$$1 + m + C_m^2 + \ldots + C_m^{m-1} + 1 = 2^m,$$

откуда $m \geqslant l + 1$.

Сначала рассмотрим случай $m = l + 1$ и $k < 2^l$. Предположим, что $V_{l+1} = A_1 A_2 \ldots A_{l+1} \notin \mathcal{L}_l(\mathcal{S})$. Тогда для любого $1 \leqslant j \leqslant l$ произведения $A_{i_1} \ldots A_{i_j}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leqslant m$, линейно независимы по модулю $\mathcal{L}_{j-1}(\mathcal{S})$. Действительно, если

$$A_1 \ldots A_j = \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_2} \alpha_{i_1 \ldots i_j} A_{i_1} \ldots A_{i_j} + B, \quad B \in \mathcal{L}_{j-1}(\mathcal{S}),$$

и в любом упорядоченном наборе $(i_1, \ldots, i_j) \neq (1, \ldots, j)$ есть координата $i_s > j$, то любое слово $A_{i_1} \ldots A_{i_j} A_{j+1} \ldots A_{l+1}$ содержит квадрат A_{i_s}, т. е. сократимо, и значит,

$$V_{l+1} = \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_2} \alpha_{i_1 \ldots i_j} A_{i_1} \ldots A_{i_j} A_{j+1} \ldots A_{l+1} + B A_{j+1} \ldots A_{l+1}$$

сократимо. Отсюда получаем, что $\dim \mathcal{L}_l(\mathcal{S}) = 2^{l+1} - 1 \geqslant \dim \mathrm{D}_n(\mathbb{F}_2)$, и $V_{l+1} \in \mathcal{L}_l(\mathcal{S})$. Противоречие. Значит, $\mathrm{l}(\mathcal{S}) \leqslant l$.

Теперь пусть $m = l + r$, $r > 1$ и $k < 2^l$. Предположим, нашлось слово $V_{l+1} = A_{h_1} A_{h_2} \ldots A_{h_{l+1}} \notin \mathcal{L}_l(\mathcal{S})$, $1 \leqslant h_1 < h_2 < \ldots < h_{l+1} \leqslant m$. Тогда для любого $1 \leqslant j \leqslant l$ произведения $A_{i_1} \ldots A_{i_j}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_j$, $\{i_1, i_2, \ldots, i_j\} \subseteq \{h_1, \ldots, h_{l+1}\}$, линейно независимы по модулю $\mathcal{L}_{j-1}(\mathcal{S})$. Но тогда $\dim \mathcal{L}_l(\mathcal{S}) \geqslant 2^{l+1} + r - 2 \geqslant \dim \mathrm{D}_n(\mathbb{F}_2)$, и $V_{l+1} \in \mathcal{L}_l(\mathcal{S})$. Противоречие. Значит, и в этом случае $\mathrm{l}(\mathcal{S}) \leqslant l$.

3. Мы получили, что $\mathrm{l}(\mathrm{D}_n(\mathbb{F}_2)) \leqslant l$ при $2^l < n < 2^{l+1}$. Тогда по теореме 5.1 $\mathrm{l}(\mathrm{D}_{2^{l+1}}(\mathbb{F}_2)) \leqslant l+1$.

II. Построим системы порождающих, дающие соответствующие нижние оценки.

1. Для $n = 2^m$ будем строить системы порождающих индукцией по m. При $m = 1$ возьмём $\mathcal{S}_1 = \{E_{1,1}\}$, при $m = 2$ — $\mathcal{S}_2 = \{E_{1,1} + E_{3,3},\ E_{1,1} + E_{2,2}\}$. Очевидно, что $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ являются системами порождающих с длинами 1 и 2 соответственно. В общем случае, если

$$\mathcal{S}_m = \left\{ \sum_{i=1}^{2^m} \alpha_i^{(j)} E_{i,i},\ j = 1, \ldots, m \right\},$$

положим

$$\mathcal{S}_{m+1} = \left\{ \sum_{i=1}^{2^m} E_{i,i},\ \sum_{i=1}^{2^m} \alpha_i^{(j)} (E_{i,i} + E_{i+2^m, i+2^m}),\ j = 1, \ldots, m \right\}.$$

Поскольку из того, что $E_{k,k} \in \mathcal{L}_p(\mathcal{S}_m)$, следует $E_{k,k} + E_{k+2^m,k+2^m} \in \mathcal{L}_p(\mathcal{S}_{m+1})$ и $E_{k,k}, E_{k+2^m,k+2^m} \in \mathcal{L}_{p+1}(\mathcal{S}_{m+1})$, то если $\mathcal{S}_m$ — система порождающих для $\mathrm{D}_{2^m}(\mathbb{F}_2)$ длины m, то $\mathcal{S}_{m+1}$ будет системой порождающих для $\mathrm{D}_{2^{m+1}}(\mathbb{F}_2)$ длины $m+1$.

2. При $2^m < n < 2^{m+1}$ возьмём $\mathcal{S} = \mathcal{S}_m \cup \{E_{j,j},\ 2^m + 1 < j \leqslant n\}$, и в этом случае $\mathrm{l}(\mathcal{S}) = \mathrm{l}(\mathcal{S}_m) = m = [\log_2 n]$. $\square$

Далее нам понадобится следующая теорема, доказанная в [7].

Определение 6.2. Пусть $\mathbb{K}$ — произвольное поле, $n \in \mathbb{N}$ и $\preceq$ — частичный порядок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. *Матричной алгеброй инцидентности* над $\mathbb{K}$, соответствующей порядку $\preceq$, называется алгебра $\mathcal{A}_n(\preceq) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, состоящая из всех матриц $A = (a_{i,j})$, удовлетворяющих условию $a_{i,j} = 0$ при $i \npreceq j$.

Теорема 6.3 ([7, теорема 2]). *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\mathbb{K}$ — произвольное поле. Пусть $\preceq$ — частичный порядок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, и пусть $\mathcal{A}_n(\preceq)$ — соответствующая ему матричная алгебра инцидентности над $\mathbb{K}$. Пусть $\mathcal{S}$ — подмножество $\mathcal{A}_n(\preceq)$. Множество $\mathcal{S} \cup \{E\}$ является системой порождающих для $\mathcal{A}_n(\preceq)$ тогда и только тогда, когда*

1) *для любых $1 \leqslant i, j \leqslant n$, где $i \neq j$, существует такая матрица $A \in \mathcal{S}$, что $(A)_{i,i} \neq (A)_{j,j}$;*
2) *для любых $1 \leqslant i, j \leqslant n$, если $i \preceq j$ и j покрывает i (т. е. не существует такого $1 \leqslant k \leqslant n$, что $i \prec k \prec j$), то существует такая матрица $B \in \langle \mathcal{S} \rangle$, что $(B)_{i,j} \neq 0$ и $(B)_{i,i} = (B)_{j,j}$.*

Теорема 6.4. $\mathrm{l}(\mathrm{T}_n(\mathbb{F}_2) \oplus \mathrm{D}_m(\mathbb{F}_2)) = \max(n, [\log_2(n+m)])$ *для любых $n, m \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. При $n = 1$ утверждение теоремы следует из теоремы 6.1. Рассмотрим случай $n \geqslant 2$.

1. Пусть $\mathcal{S}$ — произвольная система порождающих данной алгебры. Из теоремы 6.3 следует, что в $\mathcal{L}_1(\mathcal{S})$ найдутся матрицы

$$A_{i,j} = E_{i,i} + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,\ k\neq j}}^{n+m} a_k^{(i,j)} E_{k,k} + N_{i,j}, \quad i,j = 1,\ldots,n, \quad i\neq j, \quad N_{i,j} \in \mathrm{N}_{n+m}(\mathbb{F}_2),$$

и

$$B_i = E_{i,i+1} + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,\ k\neq i+1}}^{n+m} b_k^{(i)} E_{k,k} + N_i, \quad i=1,\ldots,n-1, \quad N_i \in \mathrm{N}_{n+m}(\mathbb{F}_2), \quad (N_i)_{i,i+1}=0.$$

2. Индукцией по $p = n-(j-i)$ докажем, что $E_{i,j} \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S})$ при $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Имеем $E_{1,n} = (B_1^2 + B_1)B_2 \ldots B_n$, т. е. при $p = 1$ утверждение верно. Предположим, что утверждение верно и для всех s, $1 < s \leqslant p$. Рассмотрим

$$C_{i,i+n-p-1} = (B_i^2 + B_i)B_{i+1} \ldots B_{i+n-p-1} \in \mathcal{L}_{n-p+1}(\mathcal{S}), \quad C_{i,i+n-p-1} = \{c_{q,r}\}.$$

Имеем $c_{q,q} = 0$ при $q = 1,\ldots,n+m$, $c_{i,i+n-p-1} = 1$, $c_{i,r} = 0$ при $r < i+n-p-1$ и $c_{q,r} = 0$ при $i < q < i+n-p-1$, $r \leqslant i+n-p-1$. Тогда

$$A_{i,1}A_{i,2}\ldots A_{i,i-1}C_{i,i+n-p-1}A_{i+n-p-1,i+n-p}\ldots A_{i+n-p-1,n} = \\ = (E_{i,i+n-p-1} + N_i') \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S}),$$

где $N_i' \in \mathrm{N}_{n+m}(\mathbb{F}_2)$ и $(N_i')_{q,r} = 0$, $q < r$, $r-q < n-p$. По предположению $N_i' \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S})$, а значит, $E_{i,i+n-p-1} \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S})$.

3. Пусть $M = \max(n, [\log_2(n+m)])$. Поскольку $\mathrm{l}\big(\mathrm{D}_{n+m}(\mathbb{F}_2)\big) = [\log_2(n+m)]$, то существуют такие $N_i'' \in \mathrm{N}_{n+m}(\mathbb{F}_2)$, что $E_{i,i} + N_i'' \in \mathcal{L}_{[\log_2(n+m)]}(\mathcal{S})$, $1 \leqslant i \leqslant n+m$. Из пункта 2 следует, что $N_i'' \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S})$, значит, $E_{i,i} \in \mathcal{L}_M(\mathcal{S})$. Следовательно, $\mathcal{L}_M(\mathcal{S}) = \mathrm{T}_n(\mathbb{F}_2) \oplus \mathrm{D}_m(\mathbb{F}_2)$ и $\mathrm{l}\big(\mathrm{T}_n(\mathbb{F}_2)\oplus\mathrm{D}_m(\mathbb{F}_2)\big) \leqslant \max(n, [\log_2(n+m)])$.

4. Из следствия 4.6 получаем $\mathrm{l}\big(\mathrm{T}_n(\mathbb{F}_2)\oplus\mathrm{D}_m(\mathbb{F}_2)\big) \geqslant [\log_2(n+m)]$. Построим систему порождающих длины n для данной алгебры. Пусть $\mathcal{S}$ — система порождающих для $\mathrm{T}_n(\mathbb{F}_2) \oplus \mathbb{F}_2$ из теоремы 5.5, $\mathrm{l}(\mathcal{S}) = n$. Тогда при $m \geqslant 2$ множество $\mathcal{S}_m = \mathcal{S} \cup \{E_{n+2,n+2},\ldots,E_{n+m,n+m}\}$ — система порождающих для $\mathrm{T}_n(\mathbb{F}_2) \oplus \mathrm{D}_m(\mathbb{F}_2)$. Поскольку для любых $A \in \mathcal{S}$, $A \neq E$, и $2 \leqslant t \leqslant m$ выполнено $AE_{n+t,n+t} = E_{n+t,n+t}A = 0$, то $\mathrm{l}(\mathcal{S}_m) = \mathrm{l}(\mathcal{S}) = n$. □

Теорема 6.5. $\mathrm{l}\big(\mathrm{T}_2(\mathbb{F}_2)\oplus\mathrm{T}_2(\mathbb{F}_2)\oplus\mathrm{D}_m(\mathbb{F}_2)\big) = \max(3, [\log_2(m+4)])$ *для любого* $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Доказательство. Пусть T обозначает рассматриваемую алгебру, и пусть $M = \max(3, [\log_2(m+4)])$.

Сначала покажем, что $\mathrm{l}(T) \leqslant M$. Пусть $\mathcal{S}$ — произвольная система порождающих данной алгебры. Из теоремы 6.3 следует, что в $\mathcal{L}_1(\mathcal{S})$ найдутся матрицы

$$A = a(E_{1,1} + E_{2,2}) + E_{1,2} + a_{34}E_{3,4} + \sum_{i\geqslant 3} a_{ii}E_{i,i}$$

и

$$B = b_{11}E_{1,1} + b_{22}E_{2,2} + b_{12}E_{1,2} + b_3(E_{3,3} + E_{4,4}) + E_{3,4} + \sum_{i\geqslant 5} b_{ii}E_{i,i}.$$

Если $A^2 + A = E_{1,2}$ или $B^2 + B = E_{3,4}$, то $E_{1,2}, E_{3,4} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{S})$. Тогда $E_{i,i} \in \mathcal{L}_{[\log_2(m+4)]}(\mathcal{S})$, $i = 1, \ldots, m+4$. В случае, если $A^2+A = B^2+B = E_{1,2}+E_{3,4}$, возьмём $C \in \mathcal{L}_1(\mathcal{S})$,

$$C = E_{1,1} + c_{12}E_{1,2} + c_{22}E_{2,2} + \sum_{i\geqslant 4} c_{ii}E_{i,i}.$$

Получаем, что $E_{1,2} = C(A^2 + A)$ и $E_{3,4} = (C + E)(A^2 + A)$ лежат в $\mathcal{L}_3(\mathcal{S})$, значит, $E_{i,i} \in \mathcal{L}_M(\mathcal{S})$, $i = 1, \ldots, m + 4$.

При $m \geqslant 4$ нижняя оценка получается из следствия 4.6. При $0 \leqslant m \leqslant 3$ возьмём $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S} \cup \{E_{i,i},\ 5 \leqslant i \leqslant m + 4\}$, где $\mathcal{S}$ — система порождающих из теоремы 5.6. Поскольку для любых $A \in \mathcal{S}$, $A \neq E$ и $5 \leqslant t \leqslant m + 4$ выполнено $AE_{t,t} = E_{t,t}A = 0$, то $\mathrm{l}(\mathcal{S}_3) = \mathrm{l}(\mathcal{S}) = 3$. □

Теорема 6.6. *Пусть $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Обозначим также $\lambda = [\log_2(n + m + 2)]$. Тогда*

$$\max(n, \lambda) \leqslant \mathrm{l}\big(\mathrm{T}_n(\mathbb{F}_2) \oplus \mathrm{T}_2(\mathbb{F}_2) \oplus \mathrm{D}_m(\mathbb{F}_2)\big) \leqslant \max(n + 1, \lambda).$$

Доказательство. Пусть T обозначает рассматриваемую алгебру, $M = \max(n + 1, \lambda)$.

Сначала покажем, что $\mathrm{l}(T) \leqslant M$. Пусть $\mathcal{S}$ — произвольная система порождающих данной алгебры. Из теоремы 6.3 следует, что в $\mathcal{L}_1(\mathcal{S})$ найдутся матрицы

$$A_{i,j} = E_{i,i} + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,\ k\neq j}}^{n+m+2} a_k^{(i,j)}E_{k,k} + N_{i,j}, \quad i, j = 1, \ldots, n + 2, \quad i \neq j,$$

$$B_i = E_{i,i+1} + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,\ k\neq i+1}}^{n+m+2} b_k^{(i)}E_{k,k} + N_i, \quad i = 1, \ldots, n - 1,$$

$$C = E_{n+1,n+2} + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq n+1,\ k\neq n+2}}^{n+m+2} c_kE_{k,k} + N,$$

где $N_{i,j} \in \mathrm{N}_{n+m+2}(\mathbb{F}_2)$, $N_i \in \mathrm{N}_{n+m+2}(\mathbb{F}_2)$, $(N_i)_{i,i+1} = 0$, и $N \in \mathrm{N}_{n+m+2}(\mathbb{F}_2)$, $(N)_{n+1,n+2} = 0$. Тогда из доказательства теоремы 6.4 следует, что

$$E_{i,j} + \alpha_{ij}E_{n+1,n+2} \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S}), \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Значит,

$$E_{i,j} = A_{i,n+1}(E_{i,j} + \alpha_{ij}E_{n+1,n+2}) \in \mathcal{L}_{n+1}(\mathcal{S}), \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Поскольку
$$C^2 + C = E_{n+1,n+2} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} c_{ij} E_{i,j},$$
то $E_{n+1,n+2} \in \mathcal{L}_{n+1}(\mathcal{S})$.

Поскольку $\mathrm{l}\big(\mathrm{D}_{n+m+2}(\mathbb{F}_2)\big) = [\log_2(n+m+2)] = \lambda$, то существуют такие $N_i'' \in \mathrm{N}_{n+m+2}(\mathbb{F}_2)$, что $E_{i,i} + N_i'' \in \mathcal{L}_\lambda(\mathcal{S})$, $1 \leqslant i \leqslant n+m+2$. Тогда аналогично доказанному в теореме 6.4 $E_{i,i} \in \mathcal{L}_M(\mathcal{S})$. Следовательно, $\mathcal{L}_M(\mathcal{S}) = T$ и $\mathrm{l}(T) \leqslant M$.

Из следствия 4.6 получаем $\mathrm{l}(T) \geqslant \lambda$. Построим систему порождающих данной алгебры длины n. Пусть
$$\mathcal{S} = \{A_i = E_{i,i} + E_{i,i+1},\ E_{n,n},\ E,\ i = 1, \ldots, n-1\} \,—$$
система порождающих для $\mathrm{T}_n(\mathbb{F}_2) \oplus \mathbb{F}_2$ из теоремы 5.5, $\mathrm{l}(\mathcal{S}) = n$. Пусть
$$\mathcal{S}' = \{E_{n+1,n+1},\ E_{n+1,n+2},\ E_{n+3,n+3}, \ldots, E_{n+m+2,n+m+2}\}.$$
Тогда $\mathcal{S}'' = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$ — система порождающих для T. Поскольку для любых $A \in \mathcal{S}$, $A \neq E$, и $A' \in \mathcal{S}'$ выполнено $AA' = A'A = 0$, то $\mathrm{l}(\mathcal{S}'') = \mathrm{l}(\mathcal{S}) = n$. □

Следствие 6.7. *При $n + 1 \leqslant [\log_2(n+m+2)]$, или, что эквивалентно, $m \geqslant 2^{n+1} - n - 2$, получаем*
$$\mathrm{l}\big(\mathrm{T}_n(\mathbb{F}_2) \oplus \mathrm{T}_2(\mathbb{F}_2) \oplus \mathrm{D}_m(\mathbb{F}_2)\big) = [\log_2(n+m+2)].$$

7. Длина классических коммутативных подалгебр $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$

В [9] было установлено, что длина любой коммутативной подалгебры алгебры матриц порядка n над $\mathbb{C}$ не больше $n-1$. Приведём примеры вычисления длин некоторых коммутативных матричных подалгебр.

Лемма 7.1. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\mathcal{A}$ — такая подалгебра $\mathrm{T}_n(\mathbb{F})$, что $\mathcal{A} \cap \mathrm{D}_n(\mathbb{F}) = \langle E \rangle$, и i — индекс нильпотентности её радикала Джекобсона J, т. е. такое натуральное число от 1 до n, что $J^i = (0)$, а $J^{i-1} \neq (0)$. Тогда $\mathrm{l}(\mathcal{A}) \leqslant i - 1$.*

Доказательство. Для любых i матриц $A_k = (a_{pq}^k) \in \mathcal{A}$, $k = 1, \ldots, i$, выполняется равенство
$$\prod_{k=1}^{i} (A_k - a_{kk}^k E) = 0.$$
Это следует из определения алгебры $\mathcal{A}$ и числа i (в произведении берутся i матриц из J). Значит, любое слово длины i сократимо, и $\mathrm{l}(\mathcal{A}) \leqslant i - 1$. □

Приведём примеры алгебр из [2], демонстрирующие, что оценка из леммы 7.1 точна. Во всех следующих примерах поле $\mathbb{F}$ произвольное.

Пример 7.2. Рассмотрим подалгебру $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, состоящую из всех матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{11} \end{pmatrix}.$$

В [2, пример 2] доказано, что $\mathcal{A}_1$ — максимальная коммутативная подалгебра в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ с индексом нильпотентности радикала $i = 2$. Тогда по лемме 7.1 $\mathrm{l}(\mathcal{A}_1) = 1$.

Пример 7.3 (алгебра Шура [10]). Пусть $n = k + m$, $k, m \in \mathbb{N}$ и $|k - m| \leqslant 1$. Рассмотрим следующую коммутативную подалгебру $\mathcal{A}_S \subseteq \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$:

$$\mathcal{A}_S = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} xE_k & Z \\ \hline 0 & xE_m \end{array} \right) \,\middle|\, x \in \mathbb{F},\ Z \in \mathrm{M}_{k\times m}(\mathbb{F}) \right\}.$$

Её размерность $\dim_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}_S) = 1 + km = [n^2/4] + 1$ является максимально возможной для коммутативной подалгебры матричной алгебры, следовательно, $\mathcal{A}_S$ — максимальная коммутативная подалгебра $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. $J(\mathcal{A}_S)$ состоит из тех матриц, у которых $x = 0$. Поэтому $i\big(J(\mathcal{A}_S)\big) = 2$ и $\mathrm{l}(\mathcal{A}_S) = 1$.

Пример 7.4 (алгебра Куртера [3]). Рассмотрим множество J всех матриц порядка 14 следующего вида:

$$\left(\begin{array}{cc|cccccccccc|cc}
0 & 0 & \multicolumn{10}{c|}{O_{2\times 10}} & \multicolumn{2}{c}{O_2} \\
0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
\hline
x_{11} & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & x_{11} & & & & & & & & & & & & \\
x_{12} & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & x_{12} & & & & & & & & & & & & \\
x_{21} & 0 & \multicolumn{10}{c|}{O_{10}} & \multicolumn{2}{c}{O_{10\times 2}} \\
0 & x_{21} & & & & & & & & & & & & \\
x_{22} & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & x_{22} & & & & & & & & & & & & \\
z_{11} & z_{12} & & & & & & & & & & & & \\
z_{21} & z_{22} & & & & & & & & & & & & \\
\hline
y_{11} & y_{12} & z_{11} & z_{12} & z_{21} & z_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{11} & x_{12} & 0 & 0 \\
y_{21} & y_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{11} & z_{12} & z_{21} & z_{22} & x_{21} & x_{22} & 0 & 0
\end{array} \right),$$

где x_{ij}, y_{ij} и z_{ij} — произвольные элементы поля F, $O_{k\times m}$ — нулевая матрица размера $k \times m$, а O_p обозначает нулевую матрицу порядка p. Из определения множества J следует, что оно замкнуто относительно умножения и состоит из попарно коммутирующих матриц. Пусть матрица δ принадлежит J. Она имеет следующий блочный вид:

$$\delta = \begin{pmatrix} O_2 & O & O \\ A & O_{10} & O \\ Y & B & O_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\delta' = \begin{pmatrix} O_2 & O & O \\ A' & O_{10} & O \\ Y' & B' & O_2 \end{pmatrix}$$

также матрица из J. Тогда

$$\delta'\delta = \begin{pmatrix} O_2 & O & O \\ O & O_{10} & O \\ B'A & O & O_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, произведение любых трёх матриц из J равно нулю. Тогда $\mathcal{A}_C = FE_{1,4} \oplus J$ — коммутативная подалгебра $\mathrm{M}_{14}(\mathbb{F})$ размерности 13 с радикалом индекса нильпотентности 3. В [2, пример 4] показано, что $\mathcal{A}_C$ является максимальной коммутативной подалгеброй.

Предложение 7.5. *Пусть $\mathcal{A}_C$ — алгебра Куртера, определённая в примере 7.4. Тогда* $\mathrm{l}(A_C) = 2$.

Доказательство. Из леммы 7.1 следует, что $\mathrm{l}(\mathcal{A}_C) \leqslant 2$. Возьмём в $\mathcal{A}_C$ множество матриц $\mathcal{S}$, состоящее из матриц

$$\begin{aligned} X_{11} &= E_{3,1} + E_{4,2} + E_{13,11}, & X_{12} &= E_{5,1} + E_{6,2} + E_{13,12}, \\ X_{21} &= E_{7,1} + E_{8,2} + E_{14,11}, & X_{22} &= E_{9,1} + E_{10,2} + E_{14,12}, \\ Z_{11} &= E_{11,1} + E_{13,3} + E_{14,7}, & Z_{12} &= E_{11,2} + E_{13,4} + E_{14,8}, \\ Z_{21} &= E_{12,1} + E_{13,5} + E_{14,9}, & Z_{22} &= E_{12,2} + E_{13,6} + E_{14,10} \end{aligned}$$

и единичной матрицы. У всех этих матриц элементы левого нижнего угла (стоящие на пересечении 13-й и 14-й строк с первым и вторым столбцами) равны нулю. Значит, $\mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \neq \mathcal{A}_C$. На втором шаге эти элементы можно получить, например, так: $E_{13,1} = X_{11}Z_{11}$, $E_{13,2} = X_{11}Z_{12}$, $E_{13,1} = X_{21}Z_{11}$ и $E_{13,1} = X_{22}Z_{22}$. Следовательно, $\mathcal{S}$ является системой порождающих для $\mathcal{A}_C$ и $\mathrm{l}(\mathcal{S}) = 2$, а значит, $\mathrm{l}(\mathcal{A}_C) = 2$. ☐

Гипотеза 7.6. В условиях леммы 7.1 длина подалгебры $\mathcal{A}$ равна $i - 1$.

Лемма 7.7. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — коммутативная подалгебра в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Если существует циклическая матрица $A \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ является подалгеброй, порождённой матрицей A, и $\mathrm{l}(\mathcal{A}) = n - 1$.*

Доказательство. Сначала покажем, что A порождает $\mathcal{A}$. Поскольку матрицы $E, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ линейно независимы (по определению циклической матрицы), то $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A} \geqslant n$. Предположим, что $B \in \mathrm{M}_n(F)$, $AB = BA$ и $\mathcal{L}(A, B)$ — подалгебра $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, порождённая матрицами A, B. По [13, теорема 1] получаем, что $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{L}(A, B) \leqslant n$. Следовательно, $\mathcal{L}(A, B) = \mathcal{A}$, откуда получаем, что $B \in \langle E, A, A^2, \ldots, A^{n-1} \rangle$, т. е. B есть значение некоторого многочлена от A и $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная подалгебра. Из линейной независимости матриц $E, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ также следует, что $\mathrm{l}(\mathcal{A}) = n - 1$. ☐

8. О связи длины системы порождающих с собственными значениями её элементов

Для длины многих систем порождающих в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ может быть получена линейная оценка, если что-либо известно о рангах матриц из этой системы, их собственных значениях или степени минимального многочлена. В [8] были получены некоторые результаты по этой теме.

Теорема 8.1 ([8, теорема 4.1]). *Пусть $\mathcal{S}$ — конечное множество матриц, такое что $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$.*

1. *Если для некоторого k в $\mathcal{L}_k(\mathcal{S})$ найдётся матрица ранга $r > 0$, то $\mathrm{l}(\mathcal{S}) \leqslant rn + n - r + k - 1$.*
2. *Если в $\mathcal{S}$ есть матрица с различными собственными значениями, то $\mathrm{l}(\mathcal{S}) \leqslant 2n - 2$.*
3. *Если в $\mathcal{S}$ есть матрица, у которой характеристический многочлен совпадает с минимальным, то $\mathrm{l}(\mathcal{S}) \leqslant 3n - 3$.*

Следующая лемма является дополнением пункта 3 данной теоремы.

Лемма 8.2. *Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. Если система порождающих $\mathcal{S}$ для $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ содержит матрицу A, у которой есть собственное значение λ с единственной жордановой клеткой максимального размера, то $\mathrm{l}(\mathcal{S}) \leqslant 2n+m-3$, где m есть степень минимального многочлена матрицы A.*

Доказательство. Пусть $\mu_A(t)$ — минимальный многочлен матрицы A. Тогда его можно представить в виде произведения

$$\mu_A(t) = (t-\lambda)^k g(t), \quad g(\lambda) \neq 0.$$

Так как для собственного значения λ жорданова клетка максимального размера единственна, то ранг матрицы $A' = (A - \lambda E)^{k-1} g(A)$ будет равен единице. Так как $A' \in \mathcal{L}_{m-1}(\mathcal{S})$, то, применяя пункт 1 предыдущей теоремы, получаем, что $\mathrm{l}(S) \leqslant 2n + m - 3$. □

Лемма 8.3. *Пусть множество $\mathcal{S}$ состоит из двух линейно независимых диагонализуемых матриц A и B, таких что у каждой из них ровно два различных собственных значения. Тогда $\mathcal{S}$ не может быть системой порождающих для $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$.*

Доказательство. С помощью умножения на скаляры и прибавления единичной матрицы можно с сохранением линейной независимости из исходных матриц получить пару матриц с собственными значениями 0 и 1. Полученные матрицы опять обозначим как A и B. Очевидно, что $A^2 = A$ и $B^2 = B$. Следовательно, на каждом шаге может появляться не более двух несократимых матриц. Так как $\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) = n^2$, то для того чтобы породить всю матричную алгебру, потребовалось бы более $(n^2-1)/2$ шагов, что противоречит существующим верхним оценкам длины $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. □

9. О связи длины алгебры и длин её подалгебр

Заметим, что, вообще говоря, функция длины, в отличие от, например, функции размерности, может расти при переходе от алгебры к её подалгебрам.

Предложение 9.1. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — конечномерная алгебра над $\mathbb{F}$. Если $\mathcal{S} = \{a_1, \ldots, a_k\}$ — система порождающих этой алгебры и $C = \{c_{ij}\} \in \mathrm{M}_k(\mathbb{F})$ — невырожденная матрица, то*

$$\mathcal{S}_c = \{c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + \ldots + c_{1k}a_k, \ldots,\ c_{k1}a_1 + c_{k2}a_2 + \ldots + c_{kk}a_k\}$$

также будет системой порождающих алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathrm{l}(\mathcal{S}_c) = \mathrm{l}(\mathcal{S})$.

Доказательство. Докажем по индукции, что для всех n справедливо равенство $\mathcal{L}_n(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_n(\mathcal{S}_c)$. Так как любая линейная комбинация $\gamma_1 a_1 + \ldots + \gamma_k a_k$ принадлежит $\mathcal{L}_1(\mathcal{S})$, то $\mathcal{L}_1(\mathcal{S}_c) \subseteq \mathcal{L}_1(\mathcal{S})$. Из невырожденности матрицы C следует, что $a_i \in \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_c)$, $i = 1, \ldots, k$, т. е. $\mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_c)$, а значит, $\mathcal{L}_1(\mathcal{S}_c) = \mathcal{L}_1(\mathcal{S})$. Допустим, что $n > 1$ и для $n-1$ утверждение доказано. Тогда

$$\mathcal{L}_n(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})\rangle = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_c)\mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}_c)\rangle = \mathcal{L}_n(\mathcal{S}_c). \qquad \square$$

Предложение 9.2. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — конечномерная алгебра с единицей над $\mathbb{F}$. Пусть $\mathcal{S} = \{a_1, \ldots, a_k\}$ — система порождающих этой алгебры, такая что $1_{\mathcal{A}} \notin \langle a_1, \ldots, a_k\rangle$. Тогда $\mathcal{S}_1 = \{a_1 + \gamma_1 1_{\mathcal{A}}, \ldots, a_k + \gamma_k 1_{\mathcal{A}}\}$ также будет системой порождающих алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathrm{l}(\mathcal{S}_1) = \mathrm{l}(\mathcal{S})$.*

Доказательство. Докажем по индукции, что для всех n справедливо равенство $\mathcal{L}_n(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_n(\mathcal{S}_1)$. Так как $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_0(\mathcal{S}_1)$, то $\mathcal{L}_1(\mathcal{S}_1) = \mathcal{L}_1(\mathcal{S})$. Допустим, что $n > 1$ и для $n-1$ утверждение доказано. Тогда

$$\mathcal{L}_n(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})\rangle = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_1)\mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}_1)\rangle = \mathcal{L}_n(\mathcal{S}_1). \qquad \square$$

Пример 9.3. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}_4 \subset \mathrm{T}_4(\mathbb{F})$, порождённую матрицами E, $E_{4,4}$, $E_{1,2}$, $E_{1,3}$ и $E_{2,3}$. Так как $\mathcal{A}_4$ является верхнетреугольной матричной подалгеброй, то по лемме 4.2 $\mathrm{l}(\mathcal{A}_4) \leqslant 3$. У неё есть подалгебра $\mathcal{A}'$, порождённая циклической матрицей $A = E_{1,2} + E_{2,3} + E_{4,4}$, $\mathrm{l}(\mathcal{A}') = 3$.

Предложение 9.4. *Пусть $\mathcal{A}_4$ — алгебра из примера* 9.3. *Тогда* $\mathrm{l}(\mathcal{A}_4) = 2$.

Доказательство. Размерность подалгебры $\mathrm{M}_4(\mathbb{F})$, порождённой одной матрицей, не больше 4, $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_4 = 5$. Значит, для любой системы порождающих $\mathcal{S} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ в $\mathcal{A}_4$ выполнено $k \geqslant 2$, и если $k = 2$, то $E \notin \langle A_1, A_2\rangle$. Если в системе порождающих $\mathcal{S}$ найдутся три матрицы A_1, A_2, A_3, такие что $E \notin \langle A_1, A_2, A_3\rangle$, то $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \geqslant 4$, и тогда $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = 5$, т. е. $\mathrm{l}(\mathcal{S}) \leqslant 2$. Рассмотрим случай $\mathcal{S} = \{A, B\}$, $E \notin \langle A, B\rangle$. По предложению 9.2 можно считать, что

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{pmatrix}.$$

Так как $\mathcal{S}$ — система порождающих, то $a_{44} \neq 0$ или $b_{44} \neq 0$. Далее будем предполагать, что $a_{44} \neq 0$. Тогда по предложению 9.1 можно взять $b_{44} = 0$. Имеем

$$A^2 = a_{12}a_{23}E_{1,3} + a_{44}^2 E_{4,4}, \quad AB = a_{12}b_{23}E_{1,3}, \quad BA = a_{23}b_{12}E_{1,3},$$
$$B^2 = b_{12}b_{23}E_{1,3}, \quad A^3 = a_{44}^3 E_{4,4}.$$

Другие произведения матриц A и B длины, большей или равной 3, равны нулю. Получаем, что если $\mathcal{S}$ — система порождающих, то векторы (a_{12}, a_{23}) и (b_{12}, b_{23}) должны быть линейно независимы. Но тогда $AB \neq 0$ или $BA \neq 0$, т. е. $E_{1,3} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{S})$. Поэтому $E_{4,4} = a_{44}^{-2}(A^2 - a_{12}a_{23}E_{1,3}) \in \mathcal{L}_2(\mathcal{S})$, $E_{1,2}, E_{1,3} \in \in \langle A, B, E_{1,3}, E_{4,4}\rangle \subseteq \mathcal{L}_2(\mathcal{S})$. Следовательно, $\mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = \mathcal{A}_4$ и $\mathrm{l}(\mathcal{S}) = 2$. Значит, $\mathrm{l}(\mathcal{A}_4) = 2$. □

Следствие 9.5. *Для всех $n \geqslant 4$ и для любого поля $\mathbb{F}$, в котором больше $n-4$ элементов, существуют такие подалгебры $\mathcal{A}'_n \subset \mathcal{A}_n \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, что $\mathrm{l}(\mathcal{A}'_n) = = n-1 > \mathrm{l}(\mathcal{A}_n)$.*

Доказательство. Пусть $f_4, \ldots, f_n \in \mathbb{F}$ — различные ненулевые элементы. Рассмотрим следующие подалгебры:

$$\mathcal{A}'_n = \langle \{E_{1,1} + E_{2,2} + E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,3},\ E_{4,4}, \ldots, E_{n,n}\}\rangle,$$
$$\mathcal{A}_n = \left\langle E_{1,2} + E_{1,3} + \sum_{i=4}^{n} f_i E_{i,i} \right\rangle.$$

Тогда $\mathrm{l}(\mathcal{A}'_n) = n-1$, так как $E_{1,2} + E_{1,3} + \sum\limits_{i=4}^{n} f_i E_{i,i}$ — циклическая матрица. По теореме 4.5 $\mathrm{l}\big(\mathrm{D}_{n-4}(\mathbb{F})\big) = n-5$. Последовательным применением примера 9.3 и теоремы 5.1 о прямой сумме получаем, что

$$\mathrm{l}(\mathcal{A}_n) = \mathrm{l}\big(\mathcal{A}_4 \oplus \mathrm{D}_{n-4}(\mathbb{F})\big) \leqslant 2 + (n-5) + 1 = n-2. \qquad \square$$

Следующий пример показывает, что для любого натурального числа найдётся достаточно большое n и такие подалгебры $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, что длина подалгебры больше длины алгебры на это число. Конструкция опять основана на примере 9.3.

Пример 9.6. Пусть $\mathbb{F}$ — достаточно большое поле, k — фиксированное положительное число, $n = 4k$. Пусть

$$\mathcal{A} = \underbrace{\mathcal{A}_4 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_4}_{k \text{ раз}} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F}),$$

$$A_i = E_{4i-3,4i-3} + E_{4i-3,4i-2} + E_{4i-2,4i-2} + E_{4i-2,4i-1} + E_{4i-1,4i-1}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

положим

$$\mathcal{A}' = \left\langle \sum_{i=1}^{k} (a_i A_i + b_i E_{4i,4i}) \right\rangle \subset \mathcal{A},$$

здесь a_i, b_i, $i = 1, \ldots, k$, — различные ненулевые элементы $\mathbb{F}$.

Как будет показано в следующем предложении, $\mathrm{l}(\mathcal{A}) = 3k-1$, в то время как $\mathrm{l}(\mathcal{A}') = n-1 = 4k-1$ по лемме о циклической матрице.

Предложение 9.7. *Пусть k — фиксированное положительное число, $\mathbb{F}$ — такое поле, что $|\mathbb{F}| \geqslant 2k+1$. Пусть*

$$\mathcal{A} = \underbrace{\mathcal{A}_4 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_4}_{k \text{ раз}} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F}).$$

Тогда $\mathrm{l}(\mathcal{A}) = 3k-1$.

Доказательство. Из теоремы 5.1 о прямой сумме и примера 9.3 следует, что $\mathrm{l}(\mathcal{A}) \leqslant 2k+k-1 = 3k-1$. Рассмотрим систему порождающих

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \left\{ A = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i(A_i - E_{4i-2,4i-1}) + \beta_i E_{4i,4i}),\ E_{4j-2,4j-1},\ j = 1, \ldots, k \right\},$$

где α_i, β_i, $i = 1, \ldots, k$, — различные ненулевые элементы $\mathbb{F}$,

$$A_i = E_{4i-3,4i-3} + E_{4i-3,4i-2} + E_{4i-2,4i-2} + E_{4i-2,4i-1} + E_{4i-1,4i-1}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Поскольку

$$AE_{4j-2,4j-1} = \alpha_j(E_{4j-3,4j-1} + E_{4j-2,4j-1}), \quad E_{4j-2,4j-1}A = \alpha_j E_{4j-2,4j-1}$$

и степень минимального многочлена A равна $3k$, то $\mathrm{l}(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}) = 3k-1 = \mathrm{l}(\mathcal{A})$. □

Замечание 9.8. В примере 9.6 величина $m = \mathrm{l}(\mathcal{A}') - \mathrm{l}(\mathcal{A})$ — произвольное натуральное число, однако отношение $r = (\mathrm{l}(\mathcal{A}')+1) : (\mathrm{l}(\mathcal{A})+1) = 4:3$ постоянно.

9.1. Двухблочные подалгебры в алгебре верхнетреугольных матриц

Данный подраздел посвящён вычислению длин алгебр

$$\mathcal{A}_{n,m} = \left\langle E,\ \sum_{i=1}^{n} E_{ii},\ E_{i,j} \,\middle|\, \begin{array}{l} 1 \leqslant i < j \leqslant n \text{ или} \\ n+1 \leqslant i < j \leqslant n+m \end{array} \right\rangle \subset \mathrm{T}_{m+n}(\mathbb{F}),$$

где $n \geqslant m$ — натуральные числа, над произвольным полем $\mathbb{F}$.

Замечание 9.9. Данные конструкции обобщают пример 9.3, а именно получается серия алгебр $\mathcal{A}(n) = \mathcal{A}_{n,m}$ и их подалгебр $\mathcal{A}'(n)$ с фиксированной разностью длин m, для которых отношение длин $r = r(n)$ является непостоянной дробно-линейной функцией.

Замечание 9.10. Алгебра $\mathcal{A}_4$, описанная в примере 9.3, в обозначениях данного раздела совпадает с $\mathcal{A}_{3,1}$.

Обозначение 9.11. Любая матрица $A \in \mathcal{A}_{n,m}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix},$$

где $A' \in \mathrm{T}_n(\mathbb{F})$, $A'' \in \mathrm{T}_m(\mathbb{F})$. Далее будем использовать обозначение $A = A' \oplus A''$.

Лемма 9.12. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, и пусть $\mathcal{S}$ — произвольная система порождающих для $\mathcal{A}_{n,m}$. Тогда существует система порождающих $\tilde{\mathcal{S}}$ для $\mathcal{A}_{n,m}$, такая что выполнены следующие условия*:

1) $\dim \mathcal{L}_1(\tilde{\mathcal{S}}) = |\tilde{\mathcal{S}}| + 1$;
2) *существует матрица $A_0 = A_0' \oplus A_0'' \in \tilde{\mathcal{S}}$, такая что*

$$A_0' = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{i,j} E_{i,j}, \quad A_0'' = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} a_{i+n,j+n} E_{i+n,j+n} + E;$$

3) *для всех $S \in \tilde{\mathcal{S}}$, $S \neq A_0$, выполнено $(S)_{i,i} = 0$, $i = 1, \ldots, n+m$;*
4) *существуют $B_1, \ldots, B_{n-1} \in \tilde{\mathcal{S}}$, такие что*
   а) *для всех $r = 1, \ldots, n-1$*

$$B_r' = E_{r,r+1} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+2}^{n} b_{i,j;r} E_{i,j}, \quad B_r'' \in \mathrm{N}_m(\mathbb{F}),$$

   либо

   б) *существует $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, для которого выполнено*

$$B_r' = E_{r,r+1} + b_r E_{k,k+1} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+2}^{n} b_{i,j;r} E_{i,j},$$
$$B_r'' \in \mathrm{N}_m(\mathbb{F}), \quad r = 1, \ldots, n-1, \quad r \neq k,$$
$$B_k' = A_0' = a_k E_{k,k+1} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+2}^{n} \hat{a}_{i,j} E_{i,j}, \quad a_k \neq 0,$$
$$B_k'' = A_0'' = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \hat{a}_{i+n,j+n} E_{i+n,j+n} + E;$$

5) $\mathrm{l}(\tilde{\mathcal{S}}) = \mathrm{l}(\mathcal{S})$.

Доказательство. Будем последовательно преобразовывать $\mathcal{S}$ до системы порождающих, удовлетворяющей условиям 1)—4).

1) Это условие равносильно тому, что все элементы $\mathcal{S}$ линейно независимы и $E \notin \langle \mathcal{S} \rangle$. В противном случае удалим из $\mathcal{S}$ лишние элементы. Заметим, что длина $\mathcal{S}$ при этом не изменится.

2) Для проверки существования A_0 достаточно убедиться, что в $\mathcal{S}$ найдётся матрица с различными диагональными элементами, отвечающими первому и второму блокам. Однако если все диагональные элементы произвольной матрицы из $\mathcal{S}$ одинаковы, то $\mathcal{S}$ не является порождающим множеством для алгебры $\mathcal{A}_{n,m}$.

3) По предложению 9.2 с сохранением длины перейдём к системе порождающих

$$\mathcal{S}' = \{S - (S)_{1,1} E, \ S \in \mathcal{S}\},$$

затем по предложению 9.1 с сохранением длины перейдём к системе порождающих

$$\mathcal{S}'' = \{A_0,\ S - (S)_{n+1,n+1}A_0,\ S \in \mathcal{S}',\ S \neq A_0\}.$$

Для простоты дальнейшего изложения обозначим $\mathcal{S}''$ снова через $\mathcal{S}$.

4) Поскольку $E_{i,i+1} \in \mathcal{A}_{n,m}$, но для любых $t \geqslant 2$ и $S \in \mathcal{S}^t \setminus \mathcal{S}$ выполняется $(S)_{i,i+1} = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, то найдутся такие $B_1, \ldots, B_{n-1} \in \mathcal{S}$, что векторы

$$u_i = \big((B_i)_{1,2}, (B_i)_{2,3}, \ldots, (B_i)_{n-1,n}\big), \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

линейно независимы.

Теперь выполним преобразование $\mathcal{F}$ системы $\mathcal{S}$ (по предложению 9.1 $\mathcal{F}$ сохраняет длину $\mathcal{S}$), которое на всех элементах $S \in \mathcal{S}$, $S \neq B_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, действует тождественно, т. е. $\mathcal{F}(S) = S$, а действие $\mathcal{F}$ на множестве матриц B_j, $j = 1, \ldots, n-1$, в зависимости от принадлежности матрицы A_0 этому множеству определяется следующим образом.

а) Пусть $A_0 \notin \{B_1, \ldots, B_{n-1}\}$. Невырожденным линейным преобразованием $F = \{f_{i,j}\} \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{F})$ можно перевести набор $\{u_i\}$ в набор

$$\{e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots,\ e_{n-1} = (0, 0, \ldots, 1)\} \subset \mathbb{F}^{n-1},$$

т. е.

$$e_i = \sum_{j=1}^{n-1} f_{i,j} u_j.$$

Тогда положим

$$\mathcal{F}(B_r) = \sum_{j=1}^{n-1} f_{r,j} B_j.$$

При этом

$$\mathcal{F}(B_r)' = E_{r,r+1} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+2}^{n} b_{i,j;r} E_{i,j}.$$

б) Пусть $A_0 \in \{B_1, \ldots, B_{n-1}\}$, т. е. $A_0 = B_p$ для некоторого $p \in \{1, \ldots, n-1\}$. Так как у любой матрицы в $\mathrm{M}_{n-1,n-2}(\mathbb{F})$ ранга $n-2$ существует невырожденная подматрица порядка $n-2$, то в этом случае найдётся $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, такое что векторы

$$v_i = \big((B_i)_{1,2}, \ldots, (B_i)_{k-1,k}, (B_i)_{k+1,k+2}, \ldots, (B_i)_{n-1,n}\big), \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad i \neq p,$$

линейно независимы. Поскольку порядок матриц B_j произволен, можно считать, что $p = k$. Невырожденным линейным преобразованием $G = \{g_{i,j}\} \in \mathrm{M}_{n-2}(\mathbb{F})$ можно перевести набор $\{v_i\}$ в набор

$$\{e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots,\ e_{n-2} = (0, 0, \ldots, 1)\} \subset \mathbb{F}^{n-2},$$

т. е.

$$e_i = \sum_{j=1}^{k-1} g_{i,j} v_j + \sum_{j=k}^{n-2} g_{i,j} v_{j+1}.$$

Тогда положим

$$\mathcal{F}(B_r) = \sum_{j=1}^{k-1} f_{r,j} B_j + \sum_{j=k}^{n-2} f_{r,j} B_{j+1}, \quad r \neq k,$$

$$\mathcal{F}(A_0) = A_0 - \sum_{i=1,\ i\neq k}^{n-1} (A_0)_{i,i+1} \mathcal{F}(B_i).$$

Имеем

$$\mathcal{F}(B_r)' = E_{r,r+1} + b_r E_{k,k+1} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+2}^{n} b_{i,j;r} E_{i,j}, \quad r \neq k,$$

$$\mathcal{F}(A_0)' = a_k E_{k,k+1} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+2}^{n} \hat{a}_{i,j} E_{i,j}, \quad a_k \neq 0,$$

$$\mathcal{F}(A_0)'' = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} \hat{a}_{i+n,j+n} E_{i+n,j+n} + E.$$

Для простоты изложения обозначим $\mathcal{F}(A_0)$ и $\mathcal{F}(B_r)$ снова через A_0 и B_r соответственно. Тогда система порождающих $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{F}(\mathcal{S})$ и будет искомой.

5) Преобразования системы $\mathcal{S}$ из пунктов 1)—4) не меняли её длины, следовательно, длина полученной системы порождающих равна длине исходной системы. □

Лемма 9.13. *Пусть $n \geqslant 3$, $m \geqslant 2$, и пусть $\mathcal{S}$ — система порождающих для $\mathcal{A}_{n,m}$, удовлетворяющая условиям* 1)—4) *леммы* 9.12. *Тогда выполнено одно из следующих условий*:

а) *существуют такие $C, C_1, \ldots, C_{m-1} \in \langle \mathcal{S} \setminus A_0 \rangle$, что*

$$C_r'' = E_{r+n,r+n+1} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+2}^{m} c_{i+n,j+n;r} E_{i+n,j+n}, \quad r = 1, \ldots, m-1,$$

и если $\tilde{A}_0 = E - A_0 + C$, то

$$\tilde{A}_0'' = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+2}^{m} \tilde{a}_{i+n,j+n} E_{i+n,j+n};$$

б) *существуют такие $C, C_r \in \langle \mathcal{S} \setminus A_0 \rangle$, $r = 1, \ldots, m-1$, $r \neq s$, что*

$$C_r'' = E_{r+n,r+n+1} + c_r E_{s+n,s+n+1} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+2}^{m} c_{i+n,j+n;r} E_{i+n,j+n},$$

и если $\tilde{A}_0 = E - A_0 + C$, то

$$\tilde{A}_0'' = \tilde{a}_s E_{s+n,s+n+1} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+2}^{m} \tilde{a}_{i+n,j+n} E_{i+n,j+n}, \quad \tilde{a}_s \neq 0,$$

для некоторого $s \in \{1, \ldots, m-1\}$ (*в этом случае положим $C_s = \tilde{A}_0$*).

Доказательство. Поскольку для любых $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ и для любого $i = n+1, \dots, n+m-1$ справедливо $(S_1S_2)_{i,i+1} = 0$ при $S_1 \neq A_0$, $S_2 \neq A_0$, а также

$$(S_1A_0)_{i,i+1} = (S_1)_{i,i+1}, \quad (A_0S_2)_{i,i+1} = (S_2)_{i,i+1}, \quad (A_0^2)_{i,i+1} = 2(A_0)_{i,i+1},$$

то найдутся $\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_{m-1} \in \mathcal{S}$, такие что векторы

$$w_i = \bigl((\tilde{C}_i)_{n+1,n+2}, (\tilde{C}_i)_{n+2,n+3}, \dots, (\tilde{C}_i)_{n+m-1,n+m}\bigr), \quad i = 1, \dots, m-1,$$

линейно независимы.

а) Пусть $A_0 \notin \{\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_{m-1}\}$. Невырожденным линейным преобразованием $F_c = \{f_{i,j}\} \in \mathrm{M}_{m-1}(\mathbb{F})$ можно перевести набор $\{w_i\}$ в набор

$$\{e_1 = (1,0,\dots,0),\ e_2 = (0,1,\dots,0), \dots,\ e_{m-1} = (0,0,\dots,1)\} \subset \mathbb{F}^{m-1},$$

т. е.

$$e_i = \sum_{j=1}^{m-1} f_{i,j} w_j.$$

Положим

$$C_r = \sum_{j=1}^{m-1} h_{r,j} \tilde{C}_j.$$

Тогда

$$C_r \in \langle \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_{m-1} \rangle \subset \langle \mathcal{S} \setminus A_0 \rangle, \quad r = 1, \dots, m-1,$$

и

$$C_r'' = E_{r+n,r+n+1} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+2}^{m} c_{i+n,j+n;r} E_{i+n,j+n}.$$

Теперь положим

$$C = \sum_{i=1}^{m-1} \hat{a}_{i+n,i+n+1} C_i,$$

т. е. $(C)_{i+n,i+n+1} = (A_0)_{i+n,i+n+1}$ для любого $i = 1, \dots, m-1$. Тогда

$$\tilde{A}_0'' = E - A_0'' + C'' = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+2}^{m} \tilde{a}_{i+n,j+n} E_{i+n,j+n}.$$

б) Пусть $\tilde{C}_p = A_0$ для некоторого $p \in \{1, \dots, m-1\}$. При $m = 2$ положим $\tilde{A}_0 = E - A_0$ и $C_1 = \tilde{A}_0$. Если $m \geqslant 3$, то у любой матрицы в $\mathrm{M}_{m-1,m-2}(\mathbb{F})$ ранга $m-2$ существует невырожденная подматрица порядка $m-2$. Тогда найдётся $s \in \{1, \dots, m-1\}$, такое что векторы

$$x_i = \bigl((\tilde{C}_i)_{1,2}, \dots, (\tilde{C}_i)_{s-1,s}, (\tilde{C}_i)_{s+1,s+2}, \dots, (\tilde{C}_i)_{m-1,m}\bigr), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad i \neq p,$$

линейно независимы. Поскольку порядок матриц $\tilde{C}_j$ произволен, можно считать, что $p = s$. Невырожденным линейным преобразованием $G_c = \{g_{i,j}\} \in \mathrm{M}_{m-2}(\mathbb{F})$

можно перевести набор $\{x_i\}$ в набор

$$\{e_1 = (1,0,\ldots,0),\ e_2 = (0,1,\ldots,0),\ldots,\ e_{m-2} = (0,0,\ldots,1)\} \subset \mathbb{F}^{m-2},$$

т. е.

$$e_i = \sum_{j=1}^{s-1} g_{i,j}x_j + \sum_{j=s}^{m-2} g_{i,j}x_{j+1}.$$

Положим

$$C_r = \sum_{j=1}^{s-1} g_{r,j}\tilde{C}_j + \sum_{j=s}^{m-2} g_{r,j}\tilde{C}_{j+1}, \quad r \neq s.$$

Тогда

$$C_r \in \langle \tilde{C}_1,\ldots,\tilde{C}_{s-1},\, \tilde{C}_{s+1},\ldots,\tilde{C}_{m-1}\rangle \subset \langle \mathcal{S} \setminus A_0\rangle, \quad r = 1,\ldots,m-1, \quad r \neq s,$$

и

$$C_r'' = E_{r+n,r+n+1} + c_r E_{s+n,s+n+1} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+2}^{m} c_{i+n,j+n;r}E_{i+n,j+n}.$$

Теперь положим

$$C = \sum_{i=1,\ i\neq s}^{m-1} \hat{a}_{i+n,i+n+1}C_i,$$

т. е. $(C)_{i+n,i+n+1} = (A_0)_{i+n,i+n+1}$ для любого $i = 1,\ldots,m-1$, $i \neq s$. Тогда

$$\tilde{A}_0'' = E - A_0'' + C'' = \tilde{a}_s E_{s+n,s+n+1} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+2}^{m} \tilde{a}_{i+n,j+n}E_{i+n,j+n}, \quad \tilde{a}_s \neq 0. \quad \square$$

Лемма 9.14. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле. Тогда* $\mathrm{l}(\mathcal{A}_{1,1}) = 1$ *и* $\mathrm{l}(\mathcal{A}_{2,2}) = 3$.

Доказательство.
1. Алгебра $\mathcal{A}_{1,1}$ есть $\mathrm{D}_2(\mathbb{F})$. Следовательно, по теореме 4.5 $\mathrm{l}(\mathcal{A}_{1,1}) = 1$.
2. Алгебра $\mathcal{A}_{2,2}$ порождается циклической матрицей $E_{1,1}+E_{1,2}+E_{2,2}+E_{3,4}$. Следовательно, по лемме 7.7 $\mathrm{l}(\mathcal{A}_{2,2}) = 3$. $\square$

Лемма 9.15. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле. Тогда* $\mathrm{l}(\mathcal{A}_{2,1}) = 2$ *и* $\mathrm{l}(\mathcal{A}_{3,2}) = 3$.

Доказательство.
1. Алгебра $\mathcal{A}_{2,1}$ порождается циклической матрицей $E_{1,1} + E_{1,2} + E_{2,2}$. Следовательно, по лемме 7.7 $\mathrm{l}(\mathcal{A}_{2,1}) = 2$.
2. Пусть $\mathcal{S}$ — произвольная система порождающих для $\mathcal{A}_{3,2}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathcal{S}$ удовлетворяет условиям 1)—4) леммы 9.12, значит, одному из условий леммы 9.13. Покажем, что $\mathcal{L}_3(\mathcal{S}) = \mathcal{A}_{3,2}$. Имеем

$$B_1B_2(E - A_0) = aE_{1,3}, \quad a \neq 0,$$
$$B_1(E - A_0)^2 = b_{11}E_{1,2} + b_{12}E_{2,3} + b_{13}E_{1,3},$$
$$B_2(E - A_0)^2 = b_{21}E_{1,2} + b_{22}E_{2,3} + b_{23}E_{1,3},$$

где векторы (b_{11}, b_{12}) и (b_{21}, b_{22}) линейно независимы,

$$C_1 A_0^2 = bE_{4,5} + cE_{1,3}, \quad b \neq 0,$$

$$E_{4,4} + E_{5,5} = (A_0 - (A_0)_{1,2}E_{1,2} - (A_0)_{1,3}E_{1,3} - (A_0)_{2,3}E_{2,3} - (A_0)_{4,5}E_{4,5}) \in \mathcal{L}_3(\mathcal{S}).$$

Возьмём

$$\mathcal{S} = \{A = E_{1,2},\ B = E_{2,3} + E_{4,4} + E_{4,5} + E_{5,5},\ E\}.$$

Из равенств $A^2 = 0$, $AB = E_{1,3}$, $BA = 0$, $B^2 = E_{4,4} + 2E_{4,5} + E_{5,5}$ и $B^3 - B^2 = E_{4,5}$ получаем, что $\mathrm{l}(\mathcal{S}) = 3 = \mathrm{l}(\mathcal{A}_{3,2})$. □

Лемма 9.16. *Пусть* $\mathbb{F}$ — *произвольное поле,* $n, m \in \mathbb{N}$ *и* $n - m \geqslant 2$. *Тогда* $\mathrm{l}(\mathcal{A}_{n,m}) = n - 1$.

Доказательство. Сначала докажем верхнюю оценку $\mathrm{l}(\mathcal{A}_{n,m}) \leqslant n - 1$. Для этого рассмотрим произвольную систему порождающих $\mathcal{S}$ для $\mathcal{A}_{n,m}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathcal{S}$ удовлетворяет условиям 1)—4) леммы 9.12.

1. Индукцией по $p = n-(j-i)$ докажем, что $E_{i,j} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$ при $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $j - i \geqslant 2$.

При $p = 1$ заметим, что

$$B_1 B_2 \ldots B_{n-1} = (a_k)^t E_{1,n} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}),$$

$t \in \{0, 1\}$, поскольку $B_1'' B_2'' \ldots B_{n-1}''$ равно нулю как произведение $n - 1$ нильпотентной матрицы порядка $m \leqslant n - 2$ при $t = 0$ и как произведение $n - 2$ нильпотентных и одной унитреугольной матрицы порядка $m \leqslant n - 2$ при $t = 1$.

Предположим, что утверждение верно для всех q, $1 < q < p$. Рассмотрим произведения матриц

$$B_{j,j+n-p-1} = B_j B_{j+1} \ldots B_{j+n-p-1}(E - A_0)^{p-1} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}), \quad j = 1, \ldots, p.$$

Имеем

$$B'_{j,j+n-p-1} = (a_k)^t E_{j,j+n-p} + \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=h+n-p+1}^{n} d_{h,i;j,p} E_{h,i}, \quad t \in \{0, 1\},$$

$B''_{j,j+n-p-1} = 0$ как произведение $n - 1$ нильпотентной матрицы порядка $m \leqslant n - 2$ при $t = 0$ и как произведение $n - 2$ нильпотентных и одной унитреугольной матрицы порядка $m \leqslant n - 2$ при $t = 1$.

По предположению индукции $E_{i,i+n-q-1} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$ для любых $q = 1, \ldots, p-1$, $i = 1, \ldots, q$. Значит, $B_{j,j+n-p-1} - (a_k)^t E_{j,j+n-p} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$. Поскольку по определению $B_{j,j+n-p-1} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$, получаем, что

$$E_{j,j+n-p-1} = (a_k)^{-t}\big(B_{j,j+n-p-1} - (B_{j,j+n-p-1} - (a_k)^t E_{j,j+n-p})\big) \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}), \quad j = 1, \ldots, p.$$

2. Теперь рассмотрим $B_{j,j} = B_j(E - A_0)^{p-1} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$, $j = 1, \ldots, n-1$. По построению $(B_{j,j})_{r,r+1} = (B_j)_{r,r+1}$, $j, r = 1, \ldots, n-1$, т. е.

$$B'_{j,j} = E_{j,j+1} + \gamma_j E_{k,k+1} + \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=h+2}^{n} d_{h,i;j} E_{h,i}, \quad j \neq k,$$

$$B'_{k,k} = a_k^t E_{k,k+1} + \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=h+2}^{n} d_{h,i;k} E_{h,i}, \quad t \in \{0, 1\},$$

а $B''_{r,r} = 0$ как произведение $n-1$ нильпотентной матрицы порядка $m \leqslant n-2$ при $r \neq k$ и как произведение $n-2$ нильпотентных и одной унитреугольной матрицы порядка $m \leqslant n-2$ при $r = k$.

По доказанному в пункте 1

$$\sum_{h=1}^{n} \sum_{i=h+2}^{n} d_{h,i;j} E_{h,i} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Значит,

$$E_{k,k+1} = a_k^{-t} \left(B_{k,k} - \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=h+2}^{n} d_{h,i;k} E_{h,i} \right) \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}).$$

Тогда

$$E_{j,j+1} = B_{j,j} - \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=h+2}^{n} d_{h,i;j} E_{h,i} - \gamma_j E_{k,k+1} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}).$$

Следовательно, $E_{i,j} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Тогда для любой матрицы $N \in \mathrm{N}_n(\mathbb{F})$ выполнено $N \oplus 0 \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$.

3. Пусть $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ и среди них есть $S_i \neq A_0$. Из соотношения (4.1) следует, что найдётся $V \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$, для которого $S_1 \ldots S_n + V = S' \oplus 0$, $S' \in \mathrm{N}_n(\mathbb{F})$, но $S' \oplus 0 \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$ по доказанному в пунктах 1 и 2. Значит, слово $S_1 \ldots S_n$ сократимо. По теореме Гамильтона—Кэли $(A''_0)^{m+1} \in \langle A''_0, (A''_0)^2, \ldots, (A''_0)^m \rangle$. Следовательно, найдётся $V_A \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$, для которого $A_0^n + V_A = A' \oplus 0$, $A' \in \mathrm{N}_n(\mathbb{F})$, но $A' \oplus 0 \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$ по доказанному выше. Значит, слово A_0^n также сократимо.

Таким образом, мы получили, что любое слово длины n от элементов $\mathcal{S}$ сократимо, $\mathcal{L}_n(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$ и $\mathrm{l}(\mathcal{S}) \leqslant n-1$.

Из теоремы 5.1 о прямой сумме получаем, что $\mathrm{l}(\mathcal{A}_{n,m}) \geqslant n-1$. Следовательно, $\mathrm{l}(\mathcal{A}_{n,m}) = n-1$. □

Лемма 9.17. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $n \in \mathbb{N}$ и $n > 3$. Тогда* $\mathrm{l}(\mathcal{A}_{n,n-1}) = n-1$.

Доказательство. Сначала докажем верхнюю оценку $\mathrm{l}(\mathcal{A}_{n,n-1}) \leqslant n-1$. Для этого рассмотрим произвольную систему порождающих $\mathcal{S}$ для $\mathcal{A}_{n,n-1}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathcal{S}$ удовлетворяет условиям 1)—4) леммы 9.12 и, значит, одному из условий леммы 9.13.

1. Индукцией по $p = n-(j-i)$ докажем, что $E_{i,j} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$ при $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $j - i \geqslant 2$.

Рассмотрим случай $p = 1$.

Предположим, что нет такого k, что $A_0 = B_k$. Имеем $B_1B_2 \dots B_{n-1} = E_{1,n} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$, поскольку $B_1''B_2'' \dots B_{n-1}'' = 0$ как произведение $n-1$ нильпотентной матрицы порядка $n-1$. Также $C_1 \dots C_{n-2}A_0 = aE_{n+1,2n-1} + bE_{1,n}$, $a \neq 0$, т. е. $E_{n+1,2n-1} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$.

Теперь предположим, что $A_0 = B_k$ для некоторого k. Тогда $B_1B_2 \dots B_{n-1} = a_kE_{1,n} + \alpha E_{n+1,2n-1}$. Пусть $\alpha = 0$. Из равенств $(C_1 \dots C_{n-2})'' = aE_{1,n-1}$, $a \neq 0$, и

$$(C_1 \dots C_{n-2})' = \beta_1E_{1,n-2}+\beta_2E_{1,n-1}+\beta_3E_{1,n}+\beta_4E_{2,n-1}+\beta_5E_{2,n}+\beta_6E_{3,n} \in \mathrm{N}_n(\mathbb{F})$$

при $n > 3$ получаем, что при $k = n-1$ верно $A_0C_1 \dots C_{n-2} = aE_{n+1,2n-1}$, а при $k \neq n-1$ верно $C_1 \dots C_{n-2}A_0 = aE_{n+1,2n-1}$, следовательно, $E_{1,n}, E_{n+1,2n-1} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$. Пусть теперь $\alpha \neq 0$. Это означает, что

$$(B_1 \dots B_{k-1}B_{k+1} \dots B_{n-1})'' = \alpha E_{1,n-1}$$

и

$$(B_1 \dots B_{k-1}B_{k+1} \dots B_{n-1})' = \beta_1E_{1,n-1} + \beta_2E_{1,n} + \beta_3E_{2,n}.$$

Поскольку $n > 3$, то $k \neq 1$ или $k \neq n-1$. При $k \neq 1$ получаем

$$A_0B_1 \dots B_{k-1}B_{k+1} \dots B_{n-1} = \alpha E_{n+1,2n-1},$$

а при $k \neq n-1$ получаем

$$B_1 \dots B_{k-1}B_{k+1} \dots B_{n-1}A_0 = \alpha E_{n+1,2n-1},$$

следовательно, $E_{1,n}, E_{n+1,2n-1} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$.

Таким образом, во всех случаях $E_{1,n} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$, а также $E_{n+1,2n-1} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$.

Предположим, что утверждение верно для всех q, $1 < q < p$. Рассмотрим произведения

$$B_{j,j+n-p-1} = B_jB_{j+1} \dots B_{j+n-p-1}(E - A_0)^{p-1} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}), \quad j = 1, \dots, p.$$

Имеем

$$B_{j,j+n-p-1}' = (a_k)^tE_{j,j+n-p} + \sum_{\substack{1 \leqslant h < i \leqslant n,\\ i-h > n-p}} d_{h,i;j,p}E_{h,i}, \quad t \in \{0, 1\},$$

$B_{j,j+n-p-1}'' = b(j,p)E_{1,n-1}$, $b(j,p) \in \mathbb{F}$, как произведение $n-1$ нильпотентной матрицы порядка $n-1$ при $t = 0$ и как произведение $n-2$ нильпотентных и одной унитреугольной матрицы порядка $n-1$ при $t = 1$.

По предположению индукции $E_{i,i+n-q-1} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$ для любых $q = 2, \dots, p-1$, $i = 1, \dots, q$, и, как показано ранее, $E_{1,n}, E_{n+1,2n-1} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$. Значит, $B_{j,j+n-p-1} - (a_k)^tE_{j,j+n-p} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$. Поскольку по определению $B_{j,j+n-p-1} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$, получаем, что

$$E_{j,j+n-p-1} = (a_k)^{-t}\big(B_{j,j+n-p-1} - (B_{j,j+n-p-1} - (a_k)^tE_{j,j+n-p})\big) \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}),$$
$$j = 1, \dots, p.$$

2. Теперь рассмотрим $B_{j,j} = B_j(E - A_0)^{p-1} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$, $j = 1, \ldots, n-1$. По построению $(B_{j,\ j})_{r,r+1} = (B_j)_{r,r+1}$, $j, r = 1, \ldots, n-1$, т. е.

$$B'_{j,j} = E_{j,j+1} + \gamma_j E_{k,k+1} + \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=h+2}^{n} d_{h,i;j} E_{h,i}, \quad j \neq k,$$

$$B'_{k,k} = a_k^t E_{k,k+1} + \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=h+2}^{n} d_{h,i;k} E_{h,i}, \quad t \in \{0, 1\},$$

а $B''_{r,r} = b(r)E_{n+1,2n-1}$, $b(r) \in \mathbb{F}$, как произведение $n-1$ нильпотентной матрицы порядка $n-1$ при $r \neq k$ и как произведение $n-2$ нильпотентных и одной унитреугольной матрицы порядка $n-1$ при $r = k$.

По доказанному в пункте 1

$$\sum_{h=1}^{n} \sum_{i=h+2}^{n} d_{h,i;j} E_{h,i} + b(r)E_{n+1,2n-1} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Значит,

$$E_{k,k+1} = a_k^{-t}\left(B_{k,k} - \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=h+2}^{n} d_{h,i;k} E_{h,i} - b(r)E_{n+1,2n-1}\right) \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}).$$

Тогда

$$E_{j,j+1} = B_{j,j} - \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=h+2}^{n} d_{h,i;j} E_{h,i} - \gamma_j E_{k,k+1} - b(j)E_{n+1,2n-1} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}).$$

Следовательно, $E_{i,j} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Тогда для любой матрицы $N \in \mathrm{N}_n(\mathbb{F})$ выполнено $N \oplus 0 \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$.

3. Пусть $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ и среди них есть $S_i \neq A_0$. Из соотношения (4.1) следует, что найдётся $V \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$, для которого $S_1 \ldots S_n + V = S' \oplus 0$, $S' \in \mathrm{N}_n(\mathbb{F})$, но $S' \oplus 0 \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$ по доказанному в пунктах 1 и 2. Значит, слово $S_1 \ldots S_n$ сократимо. По теореме Гамильтона—Кэли $(A''_0)^n \in \langle A''_0, (A''_0)^2, \ldots, (A''_0)^{n-1}\rangle$. Значит, найдётся $V_A \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$, для которого $A_0^n + V_A = A' \oplus 0$, $A' \in \mathrm{N}_n(\mathbb{F})$, но $A' \oplus 0 \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$ по доказанному в пунктах 1 и 2. Значит, A_0^n также сократимо.

Таким образом, любое слово длины n от элементов $\mathcal{S}$ сократимо, $\mathcal{L}_n(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$ и $\mathrm{l}(\mathcal{S}) \leqslant n-1$, а тогда $\mathrm{l}(\mathcal{A}_{n,n-1}) \leqslant n-1$.

Из теоремы 5.1 о прямой сумме получаем $\mathrm{l}(\mathcal{A}_{n,n-1}) \geqslant n-1$. Следовательно, $\mathrm{l}(\mathcal{A}_{n,n-1}) = n-1$. □

Лемма 9.18. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $n \in \mathbb{N}$ и $n > 2$. Тогда $\mathrm{l}(\mathcal{A}_{n,n}) = n$.*

Доказательство. Сначала докажем верхнюю оценку $\mathrm{l}(\mathcal{A}_{n,n}) \leqslant n$. Для этого рассмотрим произвольную систему порождающих $\mathcal{S}$ для $\mathcal{A}_{n,n}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathcal{S}$ удовлетворяет условиям 1)—4) леммы 9.12 и, значит, одному из условий леммы 9.13.

1. Индукцией по $p = n - (j - i)$ докажем, что $E_{i,j}, E_{i+n,j+n} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$ при $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $j - i \geqslant 2$.

Рассмотрим случай $p = 1$. Предположим, нет такого k, что $A_0 = B_k$. Имеем $B_1 B_2 \dots B_{n-1}(E - A_0) = E_{1,n} \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S})$, поскольку $B_1'' B_2'' \dots B_{n-1}''(E - A_0)'' = 0$ как произведение n нильпотентных матриц порядка n. Теперь предположим, что есть k, для которого $A_0 = B_k$. Имеем

$$B_1 B_2 \dots B_{n-1} = a_k E_{1,n} + \alpha_1 E_{n+1,2n-1} + \alpha_2 E_{n+1,2n} + \alpha_3 E_{n+2,2n}.$$

Отметим, что поскольку $n = m > 2$, в случае выполнения пункта б) леммы 9.13 для введённого там s справедливо $s \neq 1$ или $s \neq n-1$. В случае выполнения пункта а) леммы 9.13 справедливы оба неравенства. При $s \neq 1$ верно $\tilde{A}_0 B_1 B_2 \dots B_{n-1} = E_{1,n}$, а при $s \neq n-1$ верно $B_1 B_2 \dots B_{n-1} \tilde{A}_0 = E_{1,n}$, т. е. $E_{1,n} \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S})$. Также $C_1 \dots C_{n-1} A_0 = a E_{1,n} + b E_{n+1,2n} \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S})$, $b \neq 0$, значит, $E_{n+1,2n} = b^{-1}(C_1 \dots C_{n-1} A_0 - a E_{1,n}) \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S})$.

Предположим, что утверждение верно для всех q, $1 < q < p$. Рассмотрим

$$B_{j,j+n-p-1} = B_j B_{j+1} \dots B_{j+n-p-1}(E - A_0)^p \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S}), \quad j = 1, \dots, p.$$

Имеем

$$B'_{j,j+n-p-1} = a_k^t E_{j,j+n-p} + \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=h+n-p+1}^{n} b_{h,i;j,p} E_{h,i}, \quad t \in \{0,1\},$$

а $B''_{j,j+n-p-1} = b(j,p) E_{n+1,2n}$, $b(j,p) \in \mathbb{F}$, как произведение n нильпотентных матриц порядка n при $t = 0$ и как произведение $n-1$ нильпотентной и одной унитреугольной матрицы порядка n при $t = 1$. Рассмотрим

$$C_{j,j+n-p-1} = C_j C_{j+1} \dots C_{j+n-p-1} A_0^p \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S}), \quad j = 1, \dots, p.$$

Имеем

$$C''_{j,j+n-p-1} = (\tilde{a}_s)^t E_{j+n,j+2n-p} + \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=h+n-p+1}^{n} c_{h,i;j,p} E_{h+n,i+n}, \quad t \in \{0,1\},$$

а $C'_{j,j+n-p-1} = c(j,p) E_{1,n}$ как произведение n нильпотентных матриц порядка n при $t = 0$ и как произведение $n-1$ нильпотентной и одной унитреугольной матрицы порядка n при $t = 1$.

По предположению индукции $E_{i,i+n-q-1}, E_{i+n,i+2n-q-1} \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S})$ для любых $q = 2, \dots, p-1$, $i = 1, \dots, q$, и, как показано ранее, $E_{1,n}, E_{n+1,2n} \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S})$. Значит, $B_{j,j+n-p-1} - (a_k)^t E_{j,j+n-p}, C_{j,j+n-p-1} - (a_s)^t E_{j+n,j+2n-p} \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S})$. Поскольку $B_{j,j+n-p-1}, C_{j,j+n-p-1} \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S})$ по определению, получаем, что

$$E_{j,j+n-p-1} = (a_k)^{-t}\big(B_{j,j+n-p-1} - (B_{j,\ j+n-p-1} - (a_k)^t E_{j,j+n-p})\big) \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S}),$$
$$E_{j+n,j+2n-p-1} = (a_s)^{-t}\big(C_{j,j+n-p-1} - (C_{j,\ j+n-p-1} - (a_s)^t E_{j+n,j+2n-p})\big) \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S}),$$
$$j = 1, \dots, p.$$

2. Теперь рассмотрим $B_{j,j} = B_j(E - A_0)^p \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S})$ и $C_{j,j} = C_j A_0^p \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S})$, $j = 1, \dots, n-1$. По построению $(B_{j,j})_{r,r+1} = (B_j)_{r,r+1}$, $j, r = 1, \dots, n-1$, и $(C_{j,j})_{r+n,r+n+1} = (C_j)_{r+n,r+n+1}$, $j, r = 1, \dots, n-1$, т. е.

$$B'_{j,j} = E_{j,j+1} + \beta_j E_{k,k+1} + \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=h+2}^{n} b_{h,i;j,n-1} E_{h,i}, \quad j \neq k,$$

$$B'_{k,k} = (a_k)^t E_{k,k+1} + \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=h+2}^{n} b_{h,i;k,n-1} E_{h,i}, \quad t \in \{0,1\},$$

$$C''_{j,j} = E_{j+n,j+n+1} + \gamma_j E_{s+n,s+n+1} + \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=h+2}^{n} c_{h,i;j,n-1} E_{h+n,i+n}, \quad j \neq s,$$

$$C''_{s,s} = (\tilde{a}_s)^t E_{s+n,s+n+1} + \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=h+2}^{n} c_{h,i;s,n-1} E_{h,i}, \quad t \in \{0,1\},$$

$B''_{r,r} = b(j)E_{1,n}$ как произведение n нильпотентных матриц порядка n при $t = 0$ и как произведение $n-1$ нильпотентной и одной унитреугольной матрицы порядка n при $t = 1$, и $C'_{r,r} = c(r)E_{1,n}$ как произведение $n-1$ нильпотентной и одной унитреугольной матрицы порядка n.

По доказанному в пункте 1 $B_{k,k} - (a_k)^t E_{k,k+1}, C_{s,s} - (a_s)^t E_{s+n,s+n+1} \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S})$. Значит, $E_{k,k+1}, E_{s+n,s+n+1} \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S})$. Тогда

$$E_{j,j+1} = B_{j,j} - \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=h+2}^{n} b_{h,i;j,n-1} E_{h,i} - \beta_j E_{k,k+1} - b(j)E_{n+1,2n} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}),$$

$$E_{j+n,j+n+1} = C_{j,j} - \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=h+2}^{n} c_{h,i;j,n-1} E_{h,i} - \gamma_j E_{s+n,s+n+1} - c(j)E_{1,n} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}).$$

Следовательно, $E_{j,j+n-p}, E_{j+n,j+2n-p} \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S})$, $j = 1, \ldots, p$.

3. Тогда

$$0 \oplus E'' = A_0 - a_k E_{k,k+1} - \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=h+n-p+1}^{n} \hat{a}_{ij} E_{i,j} - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \hat{a}_{i+n,j+n} E_{i+n,j+n},$$

т. е. $0 \oplus E'' \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S})$.

Значит, для любой системы порождающих $\mathcal{S}$ верно $\mathcal{L}_n(\mathcal{S}) = \mathcal{A}_{n,n}$, т. е. $\mathrm{l}(\mathcal{A}_{n,n}) \leqslant n$.

Построим систему порождающих для $\mathcal{A}_{n,n}$ длины n. Пусть

$$\mathcal{S}_n = \left\{ A_i = E_{i,i+1} + E_{n+i,n+i+1},\ i = 1, \ldots, n-1,\ E,\ E_n = \sum_{j=1}^{n} E_{j,j} \right\}.$$

Так как $A_i A_j = 0$ при $j \neq i+1$ и $E_n A_i = A_i E_n = E_{i,i+1}$, то $E_{1,n} \notin \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}_n)$, где

$$\mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}_n) = \left\langle E,\ E_n,\ E_{i,j},\ E_{i+n,j+n},\ E_{1,n} + E_{n+1,2n} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \leqslant i < j \leqslant n, \\ j - i \leqslant n-2 \end{matrix} \right\rangle,$$

но $E_{1,n} = A_1 \ldots A_{n-1} E_n \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S})$ и, значит, $\mathcal{L}_n(\mathcal{S}) = \mathcal{A}_{n,n}$. Следовательно, $\mathrm{l}(\mathcal{A}_{n,n}) = n$. □

Объединяя леммы 9.14—9.18, получаем следующую теорему.

Теорема 9.19. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле,* $n \geqslant m$ *— натуральные числа,*

$$\mathcal{A}_{n,m} = \left\langle E,\ \sum_{i=1}^{n} E_{ii},\ E_{i,j} \ \middle|\ \begin{array}{l} 1 \leqslant i < j \leqslant n \text{ или} \\ n+1 \leqslant i < j \leqslant n+m \end{array} \right\rangle \subset \mathrm{T}_{m+n}(\mathbb{F}).$$

Тогда

$$\mathrm{l}(\mathcal{A}_{n,m}) = \begin{cases} n-1 & \text{при } n-m \geqslant 2, \\ n-1 & \text{при } n=m+1,\ n>3, \\ n-1 & \text{при } n=m=2, \\ n & \text{при } n=m\neq 2, \\ n & \text{при } n=m+1,\ m=1,2. \end{cases}$$

Следствие 9.20. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле,* $n \geqslant m$ *— фиксированные натуральные числа. Пусть*

$$C_{n,m} = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1} + \sum_{j=1}^{m-1} (E_{j+n,j+n} + E_{j+n,j+n+1}) + E_{n+m,n+m} \in \mathcal{A}_{n,m} \ -$$

циклическая матрица,

$$\mathcal{A}'_{n,m} = \langle C_{n,m}^{j} \mid 0 \leqslant j \leqslant n+m-1 \rangle \subseteq \mathcal{A}_{n,m}.$$

Тогда

1) $\mathrm{l}(\mathcal{A}'_{n,m}) = n+m-1$ *по лемме 7.7;*
2) *при* $n=m=1,2$ *и* $n=2, m=1$ $\mathcal{A}_{n,m} = \mathcal{A}'_{n,m}$*;*
3) *справедливы равенства*

$$\mathrm{l}(\mathcal{A}'_{n,m}) - \mathrm{l}(\mathcal{A}_{n,m}) = \begin{cases} m & \text{при } n-m \geqslant 2 \text{ или } n=m+1,\ n>3, \\ m-1 & \text{при } n=m\neq 2 \text{ или } n=3,\ m=2, \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{l}(\mathcal{A}'_{n,\ m})+1}{\mathrm{l}(\mathcal{A}_{n,m})+1} = \begin{cases} 1+\frac{m}{n} & \text{при } n-m \geqslant 2 \text{ или } n=m+1,\ n>3, \\ 1+\frac{m-1}{n+1} & \text{при } n=m\neq 2 \text{ или } n=3,\ m=2. \end{cases}$$

9.2. Некоторые примеры

В этом подразделе приведём примеры таких алгебр, что длина подалгебры может быть оценена длиной всей алгебры.

Следствие 9.21. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле,* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m-2$, *а* $\mathcal{A}_{n,m}$ *— алгебра, описанная в теореме* 9.19. *Пусть*

$$\mathcal{B} = \left\langle E_{i,j},\ 1 \leqslant i < j \leqslant n,\ E,\ \sum_{i=1}^{n} E_{i,i},\ N_1, \ldots, N_p \in 0 \oplus \mathrm{N}_m(\mathbb{F}) \right\rangle \subseteq \mathcal{A}_{n,m}.$$

Тогда $\mathrm{l}(\mathcal{B}) = n-1 = \mathrm{l}(\mathcal{A}_{n,m})$.

Предложение 9.22. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{T}_n(\mathbb{F})$ — произвольная подалгебра верхнетреугольной матричной алгебры. Тогда $\mathrm{l}(\mathcal{A}) \leqslant \mathrm{l}\big(\mathrm{T}_n(\mathbb{F})\big)$.*

Доказательство. По лемме 4.2 справедливо $\mathrm{l}(\mathcal{A}) \leqslant n-1$, и $n-1 = \mathrm{l}\big(\mathrm{T}_n(\mathbb{F})\big)$ по теореме 4.1. $\square$

Предложение 9.23. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\mathcal{A}$ — конечномерная алгебра над $\mathbb{F}$ и $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, причём существуют $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$, такие что $\langle \mathcal{B}, a_1, \ldots, a_n \rangle = \mathcal{A}$ и для любого $b \in \mathcal{B}$ выполнено $a_i b, b a_i \in \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. Тогда $\mathrm{l}(\mathcal{B}) \leqslant \mathrm{l}(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}_\mathcal{B}$ — произвольная система порождающих алгебры $\mathcal{B}$. Тогда $\mathcal{S}_\mathcal{A} = \mathcal{S}_\mathcal{B} \cup \{a_1, \ldots, a_n\}$ будет системой порождающих для $\mathcal{A}$ длины $\mathrm{l}(\mathcal{S}_\mathcal{B})$. Следовательно, $\mathrm{l}(\mathcal{A}) \geqslant \mathrm{l}(\mathcal{S}_\mathcal{A}) = \mathrm{l}(\mathcal{S}_\mathcal{B})$ и, значит, $\mathrm{l}(\mathcal{A}) \geqslant \max\limits_{\mathcal{S}_\mathcal{B}} \mathrm{l}(\mathcal{S}_\mathcal{B}) = \mathrm{l}(\mathcal{B})$. $\square$

Приведём примеры таких алгебр.

Пример 9.24. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{T}_n(\mathbb{F})$ — произвольная подалгебра верхнетреугольной матричной алгебры, $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathrm{D}_n(\mathbb{F})$. Тогда $\mathrm{l}(\mathcal{B}) \leqslant \mathrm{l}(\mathcal{A})$.

Пример 9.25. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — конечномерные алгебры над $\mathbb{F}$. Тогда $\mathcal{A} \subset \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ и $\mathrm{l}(\mathcal{A}) \leqslant \mathrm{l}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})$.

Пользуясь случаем, автор выражает особую благодарность своему научному руководителю А. Э. Гутерману за внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

[1] Маркова О. В. О длине алгебры верхнетреугольных матриц // Успехи мат. наук. — 2005. — Т. 60, № 5. — С. 177—178.

[2] Brown W. C., Call F. W. Maximal commutative subalgebras of $n \times n$ matrices // Commun. Algebra. — 1993. — Vol. 21, no. 12. — P. 4439—4460.

[3] Courter R. C. The dimension of maximal commutative subalgebras of K_n // Duke Math. J. — 1965. — Vol. 32. — P. 225—232.

[4] Horn R. A., Johnson C. R. Topics in Matrix Analysis. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.

[5] Laffey T. J. Simultaneous reduction of sets of matrices under similarity // Linear Algebra Appl. — 1986. — Vol. 84. — P. 123—138.

[6] Longstaff W. E. Burnside's theorem: Irreducible pairs of transformations // Linear Algebra Appl. — 2004. — Vol. 382. — P. 247—269.

[7] Longstaff W. E., Rosenthal P. Generators of matrix incidence algebras // Australas. J. Combin. — 2000. — Vol. 22. — P. 117—121.

[8] Pappacena C. J. An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra // J. Algebra. — 1997. — Vol. 197. — P. 535—545.

[9] Paz A. An application of the Cayley—Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables // Linear and Multilinear Algebra. — 1984. — Vol. 15. — P. 161—170.

[10] Schur I. Zur Theorie der vertauschbaren Matrizen // J. Reine Angew. Math. — 1905. — B. 130. — S. 66—76.

[11] Spencer A. J. M., Rivlin R. S. The theory of matrix polynomials and its applications to the mechanics of isotropic continua // Arch. Rational Mech. Anal. — 1959. — Vol. 2. — P. 309—336.

[12] Spencer A. J. M., Rivlin R. S. Further results in the theory of matrix polynomials // Arch. Rational Mech. Anal. — 1960. — Vol. 4. — P. 214—230.

[13] Wadsworth A. The algebra generated by two commuting matrices // Linear and Multilinear Algebra. — 1990. — Vol. 27. — P. 159—162.