О разложении определителей булевых матриц

В. Б. ПОПЛАВСКИЙ
Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
e-mail: poplavskivb@mail.ru

УДК 512.56+512.64

Ключевые слова: детерминант, формулы Лапласа, булевы матрицы, обратимые матрицы.

Аннотация

В работе указаны необходимые и достаточные условия разложимости булевых определителей по строке или столбцу квадратной матрицы с элементами из произвольной булевой алгебры. Вводится естественное разложение произвольной булевой матрицы на внутреннюю, внешнюю и детерминированную части. Введённые понятия позволяют сформулировать основной результат: разложения по строке (столбцу) детерминантов произвольной квадратной булевой матрицы выполняются тогда и только тогда, когда формулы разложения выполняются по соответствующей строке (столбцу) для детерминантов её внутренней части.

Abstract

V. B. Poplavski, On cofactor expansion of determinants of Boolean matrices, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 4, pp. 199—223.

We give necessary and sufficient conditions of a cofactor expansibility of determinants along a row or column for Boolean square matrices over an arbitrary Boolean algebra. First of all we define a natural decomposition of an arbitrary Boolean matrix by interior, exterior, and determinate parts. The introduced notions allow us to establish the main result of this paper. It is shown that the formulas of the cofactor expansion along a row (column) of determinants of an arbitrary square Boolean matrix hold if and only if the formulas of the cofactor expansion along the corresponding row (column) hold for determinants of its interior part.

1. Введение

Определение 1.1. *Булевой алгеброй* называют систему $\langle B, \cup, \cap, ', 0, I\rangle$, где B — множество (*носитель*), $\cup\colon B \times B \to B$, $\cap\colon B \times B \to B$ — две бинарные операции, $'\colon B \to B$ — унарная операция, а 0 и I — различные ($0 \neq I$) элементы из B, такие что следующие тождества выполняются для любых $x, y, z \in B$.

1.1. $x \cup y = y \cup x$.
1.2. $x \cap y = y \cap x$.
2.1. $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 4, с. 199—223.

2.2. $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$.
3.1. $x \cup (x \cap y) = x$.
3.2. $x \cap (x \cup y) = x$.
4.1. $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$.
4.2. $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$.
5.1. $x \cap 0 = 0$.
5.2. $x \cup I = I$.
6.1. $x \cup x' = I$.
6.2. $x \cap x' = 0$.

Назовём $\cup$ *объединением*, $\cap$ *пересечением*, а $'$ *дополнением*. Таким образом, объединение и пересечение — *коммутативные* (1.1 и 1.2), *ассоциативные* (2.1 и 2.2), удовлетворяющие законам *поглощения* (3.1 и 3.2) операции. Это означает, что $\langle B, \cup, \cap \rangle$ — *решётка*. Эта решётка *дистрибутивна* (4.1 и 4.2), обладает *нулём* (5.1) и *единицей* (5.2). Более того, эта решётка является *решёткой с дополнением* (6.1 и 6.2).

Очевидно, что множество $(n \times n)$-матриц с элементами из булевой алгебры $\langle B, \cup, \cap, ', 0, I \rangle$ также образуют булеву алгебру, в которой объединение, пересечение и дополнение определяются для любых $(n \times n)$-матриц $A = (a^i_j)$ и $B = (b^i_j)$ как

$$\begin{gathered} A \cup B = (a^i_j) \cup (b^i_j) = (a^i_j \cup b^i_j), \\ A \cap B = (a^i_j) \cap (b^i_j) = (a^i_j \cap b^i_j), \\ A' = (a^i_j)' = (a'^i_j). \end{gathered}$$

Определение 1.2. *Ориентированные полуперманенты* $\overset{+}{\nabla} A$, $\overset{-}{\nabla} A$ (или *компоненты бидетерминанта*) $(n \times n)$-матрицы A ($n \geqslant 2$) с элементами из произвольной булевой алгебры $\langle B, \cup, \cap, ', 0, I \rangle$ определяются как

$$\overset{+}{\nabla} A = \bigcup_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \overset{+}{P}} (a_1^{\alpha_1} \cap a_2^{\alpha_2} \cap \ldots \cap a_n^{\alpha_n}), \quad \overset{-}{\nabla} A = \bigcup_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \overset{-}{P}} (a_1^{\alpha_1} \cap a_2^{\alpha_2} \cap \ldots \cap a_n^{\alpha_n}),$$

где a^i_j — элементы матрицы A, а через $\overset{+}{P}$ и $\overset{-}{P}$ обозначаются чётные и нечётные n-перестановки верхних индексов соответственно. Ориентированные полуперманенты позволяют ввести *перманент*

$$\operatorname{Per} A = \overset{+}{\nabla} A \cup \overset{-}{\nabla} A$$

и *общую часть* ориентированных полуперманентов

$$\triangle A = \overset{+}{\nabla} A \cap \overset{-}{\nabla} A.$$

Правый и левый (ориентированные) определители вводятся соответственно как

$$\operatorname{RDet} A = \overset{+}{\nabla} A \setminus \overset{-}{\nabla} A = \overset{+}{\nabla} A \cap \big(\overset{-}{\nabla} A\big)' \quad \text{и} \quad \operatorname{LDet} A = \overset{-}{\nabla} A \setminus \overset{+}{\nabla} A = \overset{-}{\nabla} A \cap \big(\overset{+}{\nabla} A\big)'.$$

Определителем булевых матриц называют булеву сумму правого и левого определителя: $\operatorname{Det} A = \operatorname{RDet} A \cup \operatorname{LDet} A$.

Известно, что для ориентированных полуперманентов $\overset{+}{\nabla} A$, $\overset{-}{\nabla} A$ и перманента $\operatorname{Per} A$ справедливы формулы Лапласа, дающие разложения по элементам строк или столбцов любой квадратной матрицы A над произвольным коммутативным полукольцом [4, 6—8]. Для правых $\operatorname{RDet} A$, левых $\operatorname{LDet} A$ ориентированных определителей и определителя $\operatorname{Det} A$ формулы Лапласа не выполняются в общем случае.

Попытки определения условий, при которых разложения Лапласа таких определителей возможны, предпринимались и ранее. Авторы статьи [3] указывают некоторые условия разложения определителя по строке.

В этой статье будет показано, что формулы разложения определителей по элементам строк или столбцов булевой матрицы верны, тем не менее, для достаточно широкого класса матриц над произвольной булевой алгеброй. Сначала мы определим естественное разложение произвольной булевой матрицы на внутреннюю, внешнюю и детерминированную части, опуская исследования их свойств, рассмотренных в [5]. Введённые понятия позволят сформулировать основной результат этой работы о разложении определителей по строке или столбцу (теорема 8.1): разложения по строке (столбцу) ориентированных детерминантов для произвольной квадратной булевой матрицы выполняются тогда и только тогда, когда формулы разложения выполняются по соответствующей строке (столбцу) для ориентированных детерминантов её внутренней части.

В заключение приводятся некоторые приложения. В частности, показана связь проблем обратимости булевых матриц и разложимости по строкам или столбцам их определителей.

2. Некоторые свойства определителей

Отображение упорядоченных пар элементов некоторого конечного множества в произвольную булеву алгебру называется *булевым бинарным отношением* на этом конечном множестве. Такое булево бинарное отношение определяет некоторую квадратную булеву матрицу с точностью до одновременных и одинаковых перестановок строк и столбцов этой матрицы. Верно и обратное, булевы квадратные матрицы, отличающиеся друг от друга указанными перестановками строк и столбцов, образуют классы эквивалентности, определяющие некоторое булево бинарное отношение.

Очевидно, чётные перестановки строк или столбцов квадратной булевой матрицы не меняют ориентированные полуперманенты. Нечётные перестановки строк или столбцов данной матрицы переводят полуперманенты $\overset{+}{\nabla} A$ и $\overset{-}{\nabla} A$ друг в друга. Получается, что ориентированные полуперманенты и определители дают примеры булевозначных инвариантов для булевых бинарных отношений на конечном множестве.

Для дальнейших рассуждений понадобятся следующие свойства ориентированных полуперманентов. Пусть λ — элемент булевой алгебры, а A — произвольная квадратная булева матрица. Здесь и далее пересечение (объединение) элементов λ с матрицей A естественно понимается как поэлементное. Тогда

$$\overset{\pm}{\nabla}(\lambda\cap A)=\bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\overset{\pm}{P}}\big((\lambda\cap a_1^{\alpha_1})\cap\ldots\cap(\lambda\cap a_k^{\alpha_k})\cap\ldots\cap(\lambda\cap a_n^{\alpha_n})\big)=\lambda\cap\overset{\pm}{\nabla}A$$

и

$$\overset{\pm}{\nabla}(\lambda\cup A)=\bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\overset{\pm}{P}}\big((\lambda\cup a_1^{\alpha_1})\cap\ldots\cap(\lambda\cup a_k^{\alpha_k})\cap\ldots\cap(\lambda\cup a_n^{\alpha_n})\big)=$$
$$=\lambda\cup\Bigg(\bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\overset{\pm}{P}}(a_1^{\alpha_1}\cap\ldots\cap a_k^{\alpha_k}\cap\ldots\cap a_n^{\alpha_n})\Bigg)=\lambda\cup\overset{\pm}{\nabla}A.$$

Эти соотношения позволяют получить тождества, указанные в следующей теореме.

Теорема 2.1. *Для произвольного элемента λ булевой алгебры и произвольной квадратной булевой матрицы A справедливы формулы*

$$\begin{gathered}\mathrm{Per}(\lambda\cap A)=\lambda\cap\mathrm{Per}\,A,\qquad \triangle(\lambda\cap A)=\lambda\cap\triangle A,\\ \mathrm{RDet}(\lambda\cap A)=\lambda\cap\mathrm{RDet}\,A,\quad \mathrm{LDet}(\lambda\cap A)=\lambda\cap\mathrm{LDet}\,A,\\ \mathrm{Per}(\lambda\cup A)=\lambda\cup\mathrm{Per}\,A,\qquad \triangle(\lambda\cup A)=\lambda\cup\triangle A,\\ \mathrm{RDet}(\lambda\cup A)=\lambda'\cap\mathrm{RDet}\,A=\mathrm{RDet}\,A\setminus\lambda=\mathrm{RDet}(\lambda'\cap A),\\ \mathrm{LDet}(\lambda\cup A)=\lambda'\cap\mathrm{LDet}\,A=\mathrm{LDet}\,A\setminus\lambda=\mathrm{LDet}(\lambda'\cap A).\end{gathered}$$

Доказательство. Справедливость формул для перманентов и общих частей очевидна. Докажем лишь формулы для левого детерминанта:

$$\begin{aligned}\mathrm{LDet}(\lambda\cap A)&=\overset{-}{\nabla}(\lambda\cap A)\setminus\overset{+}{\nabla}(\lambda\cap A)=\overset{-}{\nabla}(\lambda\cap A)\cap\big(\overset{+}{\nabla}(\lambda\cap A)\big)'=\\&=(\lambda\cap\overset{-}{\nabla}A)\cap(\lambda\cap\overset{+}{\nabla}A)'=(\lambda\cap\overset{-}{\nabla}A)\cap\big(\lambda'\cup(\overset{+}{\nabla}A)'\big)=\\&=\lambda\cap\overset{-}{\nabla}A\cap(\overset{+}{\nabla}A)'=\lambda\cap\mathrm{LDet}\,A,\\ \mathrm{LDet}(\lambda\cup A)&=\overset{-}{\nabla}(\lambda\cup A)\setminus\overset{+}{\nabla}(\lambda\cup A)=\overset{-}{\nabla}(\lambda\cup A)\cap\big(\overset{+}{\nabla}(\lambda\cup A)\big)'=\\&=(\lambda\cup\overset{-}{\nabla}A)\cap(\lambda\cup\overset{+}{\nabla}A)'=(\lambda\cup\overset{-}{\nabla}A)\cap\big(\lambda'\cap(\overset{+}{\nabla}A)'\big)=\\&=\overset{-}{\nabla}A\cap(\overset{+}{\nabla}A)'\cap\lambda'=\mathrm{LDet}\,A\setminus\lambda.\end{aligned}$$

Аналогично проверяются формулы для правого определителя. □

3. Разложения булевой матрицы на внутреннюю, детерминированную и внешнюю части

Так как

$$(\mathrm{Per}\,A)'\cup\triangle A\cup\mathrm{RDet}\,A\cup\mathrm{LDet}\,A=I,$$

то любую булеву матрицу A можно представить в виде

$$A = [(\mathrm{Per}\,A)' \cap A] \cup [\triangle A \cap A] \cup [\mathrm{RDet}\,A \cap A] \cup [\mathrm{LDet}\,A \cap A].$$

Вводя обозначения

$$\breve{A} = (\mathrm{Per}\,A)' \cap A, \quad \hat{A} = \triangle A \cap A, \quad \overset{+}{A} = \mathrm{RDet}\,A \cap A, \quad \overset{-}{A} = \mathrm{LDet}\,A \cap A,$$

запишем такую линейную комбинацию как

$$A = \breve{A} \cup \hat{A} \cup \overset{+}{A} \cup \overset{-}{A}.$$

Как нетрудно заметить, из попарной непересекаемости $(\mathrm{Per}\,A)'$, $\triangle A$, $\mathrm{RDet}\,A$, $\mathrm{LDet}\,A$ получаются равенства

$$\begin{aligned}
\mathrm{Per}\,A &= \mathrm{Per}\,\breve{A} \cup \mathrm{Per}\,\hat{A} \cup \mathrm{Per}\,\overset{+}{A} \cup \mathrm{Per}\,\overset{-}{A},\\
\triangle A &= \triangle\breve{A} \cup \triangle\hat{A} \cup \triangle\overset{+}{A} \cup \triangle\overset{-}{A},\\
\mathrm{RDet}\,A &= \mathrm{RDet}\,\breve{A} \cup \mathrm{RDet}\,\hat{A} \cup \mathrm{RDet}\,\overset{+}{A} \cup \mathrm{RDet}\,\overset{-}{A},\\
\mathrm{LDet}\,A &= \mathrm{LDet}\,\breve{A} \cup \mathrm{LDet}\,\hat{A} \cup \mathrm{LDet}\,\overset{+}{A} \cup \mathrm{LDet}\,\overset{-}{A},
\end{aligned}$$

дающие дизъюнктные разложения перманента, общей части ориентированных полуперманентов и определителей матрицы A, соответствующие матрицам $\breve{A}$, $\hat{A}$, $\overset{+}{A}$, $\overset{-}{A}$.

Кроме этого, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Перманент, общая часть полуперманентов и определители матриц $\breve{A}$, $\hat{A}$, $\overset{+}{A}$, $\overset{-}{A}$ обладают следующими свойствами*:

$$\mathrm{Per}\,\breve{A} = 0, \quad \mathrm{Per}\,\hat{A} = \triangle\hat{A} = \triangle A,$$

$$\mathrm{Per}\,\overset{+}{A} = \mathrm{RDet}\,\overset{+}{A} = \mathrm{RDet}\,A, \quad \mathrm{Per}\,\overset{-}{A} = \mathrm{LDet}\,\overset{-}{A} = \mathrm{LDet}\,A,$$

$$\triangle\breve{A} = \triangle\overset{+}{A} = \triangle\overset{-}{A} = \mathrm{RDet}\,\hat{A} = \mathrm{LDet}\,\hat{A} = \mathrm{RDet}\,\breve{A} = \mathrm{LDet}\,\breve{A} = \mathrm{RDet}\,\overset{-}{A} = \mathrm{LDet}\,\overset{+}{A} = 0.$$

Доказательство. Используя теорему 2.1 и определение матриц $\breve{A}$, $\hat{A}$, $\overset{+}{A}$, $\overset{-}{A}$, получаем равенства

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Per}\,\breve{A} = \mathrm{Per}\big((\mathrm{Per}\,A)' \cap A\big) = (\mathrm{Per}\,A)' \cap \mathrm{Per}\,A = 0;\\
&\mathrm{Per}\,\hat{A} = \mathrm{Per}(\triangle A \cap A) = \triangle A \cap \mathrm{Per}\,A = \triangle A;\\
&\mathrm{Per}\,\overset{+}{A} = \mathrm{Per}(\mathrm{RDet}\,A \cap A) = \mathrm{RDet}\,A \cap \mathrm{Per}\,A = \mathrm{RDet}\,A;\\
&\mathrm{Per}\,\overset{-}{A} = \mathrm{Per}(\mathrm{LDet}\,A \cap A) = \mathrm{LDet}\,A \cap \mathrm{Per}\,A = \mathrm{LDet}\,A.
\end{aligned}$$

Аналогично проверяются равенства

$$\triangle\breve{A} = \triangle\overset{+}{A} = \triangle\overset{-}{A} = \mathrm{RDet}\,\hat{A} = \mathrm{LDet}\,\hat{A} = \mathrm{RDet}\,\breve{A} = \mathrm{LDet}\,\breve{A} = \mathrm{RDet}\,\overset{-}{A} = \mathrm{LDet}\,\overset{+}{A} = 0.$$

Тогда

$$\triangle A = \triangle\breve{A} \cup \triangle\hat{A} \cup \triangle\overset{+}{A} \cup \triangle\overset{-}{A} = 0 \cup \triangle\hat{A} \cup 0 \cup 0 = \triangle\hat{A};$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{RDet}\,A = \mathrm{RDet}\,\check{A} \cup \mathrm{RDet}\,\hat{A} \cup \mathrm{RDet}\,\overset{+}{A} \cup \mathrm{RDet}\,\overset{-}{A} =\\ &\quad = 0 \cup 0 \cup \mathrm{RDet}\,\overset{+}{A} \cup 0 = \mathrm{RDet}\,\overset{+}{A};\\ &\mathrm{LDet}\,A = \mathrm{LDet}\,\check{A} \cup \mathrm{LDet}\,\hat{A} \cup \mathrm{LDet}\,\overset{+}{A} \cup \mathrm{LDet}\,\overset{-}{A} =\\ &\quad = 0 \cup 0 \cup 0 \cup \mathrm{LDet}\,\overset{-}{A} = \mathrm{LDet}\,\overset{-}{A}.\end{aligned}$$ □

Определение 3.1. Назовём матрицу $\hat{A} \cup \check{A}$ *вырожденной частью* матрицы A, состоящей из *внутренности* $\hat{A}$ и *внешности* $\check{A}$ матрицы A. Матрицу $\overset{+}{A} \cup \overset{-}{A}$ назовём *невырожденной* (или *детерминированной*) *частью*, состоящей из *положительной* $\overset{+}{A}$ и *отрицательной* $\overset{-}{A}$ частей.

Ненулевую матрицу назовём *внешней, внутренней, положительной, отрицательной*, если она совпадает со своей внешней, внутренней, положительной, отрицательной частью соответственно.

Для нулевой матрицы Θ приемлемо любое название: она является одновременно и внешней, и внутренней, и положительной, и отрицательной.

Различные примеры проявления введённой таким образом ориентируемости и вырожденности булевых бинарных отношений (или булевых матриц) можно найти в [5].

Следующая теорема показывает однозначность разложения булевой матрицы на внутреннюю, невырожденную и внешнюю части.

Теорема 3.2. *Предположим, что ненулевую квадратную булеву матрицу A представили линейной комбинацией матриц с какими-то попарно непересекающимися коэффициентами α^i $(i = 1, \ldots, 4)$ вида*

$$A = (\alpha^1 \cap A) \cup (\alpha^2 \cap A) \cup (\alpha^3 \cap A) \cup (\alpha^4 \cap A) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4,$$

причём $A_1 = \alpha^1 \cap A = \check{A}_1$ есть внешняя булева матрица, матрица $A_2 = \alpha^2 \cap A = \hat{A}_2$ является внутренней, $A_3 = \alpha^3 \cap A = \overset{+}{A}_3$ — положительной и $A_4 = \alpha^4 \cap A = \overset{-}{A}_4$ — отрицательной матрицами соответственно. Тогда A_1, A_2, A_3, A_4 являются внешней, внутренней, положительной и отрицательной частями матрицы A соответственно.

Доказательство. Из теоремы 3.1 и того, что любой элемент матрицы A содержится в объединении $\bigcup\limits_{i=1}^{4} \alpha^i$ попарно непересекающихся коэффициентов α^i $(i = 1, \ldots, 4)$, следует, что

$$\begin{aligned}&\triangle A = \triangle A_1 \cup \triangle A_2 \cup \triangle A_3 \cup \triangle A_4 = 0 \cup \triangle A_2 \cup 0 \cup 0 = \triangle A_2;\\ &\mathrm{RDet}\,A = \mathrm{RDet}\,A_1 \cup \mathrm{RDet}\,A_2 \cup \mathrm{RDet}\,A_3 \cup \mathrm{RDet}\,A_4 =\\ &\quad = 0 \cup 0 \cup \mathrm{RDet}\,A_3 \cup 0 = \mathrm{RDet}\,A_3;\\ &\mathrm{LDet}\,A = \mathrm{LDet}\,A_1 \cup \mathrm{LDet}\,A_2 \cup \mathrm{LDet}\,A_3 \cup \mathrm{LDet}\,A_4 =\\ &\quad = 0 \cup 0 \cup 0 \cup \mathrm{LDet}\,A_4 = \mathrm{LDet}\,A_4.\end{aligned}$$

То, что

$$A_2 = \alpha_2 \cap A = \alpha_2 \cap \alpha_2 \cap A = \alpha_2 \cap A_2,$$

позволяет записать

$$\triangle A = \triangle A_2 = \triangle(\alpha_2 \cap A_2) = \alpha_2 \cap \triangle A_2 \subseteq \alpha_2.$$

Аналогично из

$$A_3 = \alpha_3 \cap A_3$$

получим

$$\mathrm{RDet}\, A = \mathrm{RDet}\, A_3 \subset \alpha_3,$$

а из

$$A_4 = \alpha_4 \cap A_4$$

получим

$$\mathrm{LDet}\, A = \mathrm{LDet}\, A_4 \subset \alpha_4.$$

Тогда

$$\alpha_1 \cap \mathrm{Per}\, A = \alpha_1 \cap (\triangle A \cup \mathrm{RDet}\, A \cup \mathrm{LDet}\, A) \subseteq \alpha_1 \cap (\alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \alpha_4) = 0,$$

так как α^i $(i = 1, \ldots, 4)$ попарно не пересекаются. Это означает, что

$$(\mathrm{Per}\, A)' \cap \alpha_1 = \alpha_1,$$

и тогда

$$(\mathrm{Per}\, A)' \cap A_1 = (\mathrm{Per}\, A)' \cap \alpha_1 \cap A = \alpha_1 \cap A = A_1.$$

Покажем, что

$$(\mathrm{Per}\, A)' \cap A_2 = (\mathrm{Per}\, A)' \cap A_3 = (\mathrm{Per}\, A)' \cap A_4 = \Theta.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Per}\, A)' \cap A_2 = (\triangle A \cup \mathrm{RDet}\, A \cup \mathrm{LDet}\, A)' \cap A_2 = \\
&\quad = (\triangle A)' \cap (\mathrm{RDet}\, A)' \cap (\mathrm{LDet}\, A)' \cap A_2 \subseteq (\triangle A)' \cap A_2 = (\triangle A)' \cap \hat{A}_2 = \\
&\quad = (\triangle A)' \cap (\triangle A_2 \cap A_2) = (\triangle A)' \cap \triangle A \cap A_2 = \Theta; \\
&(\mathrm{Per}\, A)' \cap A_3 = (\triangle A \cup \mathrm{RDet}\, A \cup \mathrm{LDet}\, A)' \cap A_3 = \\
&\quad = (\triangle A)' \cap (\mathrm{RDet}\, A)' \cap (\mathrm{LDet}\, A)' \cap A_3 \subseteq (\mathrm{RDet}\, A)' \cap A_3 = (\mathrm{RDet}\, A)' \cap \overset{+}{A}_3 = \\
&\quad = (\mathrm{RDet}\, A)' \cap (\mathrm{RDet}\, A_3 \cap A_3) = (\mathrm{RDet}\, A)' \cap \mathrm{RDet}\, A \cap A_3 = \Theta; \\
&(\mathrm{Per}\, A)' \cap A_4 = (\triangle A \cup \mathrm{RDet}\, A \cup \mathrm{LDet}\, A)' \cap A_4 = \\
&\quad = (\triangle A)' \cap (\mathrm{RDet}\, A)' \cap (\mathrm{LDet}\, A)' \cap A_4 \subseteq (\mathrm{LDet}\, A)' \cap A_4 = (\mathrm{LDet}\, A)' \cap \overset{-}{A}_4 = \\
&\quad = (\mathrm{LDet}\, A)' \cap (\mathrm{LDet}\, A_4 \cap A_4) = (\mathrm{LDet}\, A)' \cap \mathrm{LDet}\, A \cap A_4 = \Theta.
\end{aligned}$$

Тогда получаем

$$\check{A} = (\mathrm{Per}\, A)' \cap A = (\mathrm{Per}\, A)' \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = (\mathrm{Per}\, A)' \cap A_1 = A_1,$$

а также

$$\hat{A} = \triangle A \cap A = \triangle A \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \triangle A \cap A_2 = A_2;$$
$$\overset{+}{A} = \mathrm{RDet}\, A \cap A = \mathrm{RDet}\, A \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \mathrm{RDet}\, A \cap A_3 = A_3;$$
$$\overset{-}{A} = \mathrm{LDet}\, A \cap A = \mathrm{LDet}\, A \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \mathrm{LDet}\, A \cap A_4 = A_4. \qquad \square$$

Заметим, что непустые бинарные отношения на конечном множестве, представляемые квадратными $(0, I)$-матрицами над двухэлементной булевой алгеброй, принадлежат одному из четырёх типов: они бывают или внешние, или внутренние, или положительные, или отрицательные.

4. Формулы Лапласа для перманентов булевых матриц

Определение 4.1. Обозначим $((n-1) \times (n-1))$-матрицу, получаемую из $(n \times n)$-матрицы A удалением из неё i-й строки и k-го столбца с сохранением порядка следования остающихся строк и столбцов, через $\partial_k^i A$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$.

Ясно, что

$$\partial_k^i(\lambda \cup A) = \lambda \cup \partial_k^i A, \qquad \partial_k^i(\lambda \cap A) = \lambda \cap \partial_k^i A,$$
$$\partial_k^i(A \cup B) = \partial_k^i A \cup \partial_k^i B, \qquad \partial_k^i(A \cap B) = \partial_k^i A \cap \partial_k^i B$$

для любых квадратных булевых матриц A, B и любого элемента λ булевой алгебры.

Запишем определяющее перманент равенство

$$\mathrm{Per}\, A = \bigcup_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \overset{+}{P} \cup \overset{-}{P}} (a_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap a_k^{\alpha_k} \cap \ldots \cap a_n^{\alpha_n})$$

для произвольного номера $k = 1, \ldots, n$ в виде

$$\mathrm{Per}\, A = \bigcup_{\alpha_k = 1}^{n} \Biggl(a_k^{\alpha_k} \cap \bigcup_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) \in P_{n-1}} (a_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap a_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \cap a_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cap \ldots \cap a_n^{\alpha_n}) \Biggr).$$

Здесь каждая перестановка $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$ есть $(n-1)$-перестановка номеров, отличных от числа α_k.

С другой стороны,

$$\bigcup_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) \in P_{n-1}} (a_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap a_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \cap a_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cap \ldots \cap a_n^{\alpha_n}) = \mathrm{Per}\, \partial_k^{\alpha_k} A.$$

Если теперь положить $\alpha_k = i$, то получим *формулу разложения перманента* по k-му столбцу:

$$\mathrm{Per}\, A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_k^i \cap \mathrm{Per}\, \partial_k^i A).$$

Похожая формула верна и для строк.

Определение 4.2. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Определим *функции знака* $\overset{m}{\sigma}$ на ориентированных полуперманентах квадратной булевой матрицы A следующим образом: $\overset{m}{\sigma}(\overset{+}{\nabla})A = \overset{+}{\nabla}A$, $\overset{m}{\sigma}(\overset{-}{\nabla})A = \overset{-}{\nabla}A$, если m чётное, и $\overset{m}{\sigma}(\overset{+}{\nabla})A = \overset{-}{\nabla}A$, $\overset{m}{\sigma}(\overset{-}{\nabla})A = \overset{+}{\nabla}A$, если m нечётное.

Функции знака помогут записать теперь *разложения полуперманентов* по i-й строке (или аналогичные формулы разложения по столбцу):

$$\overset{+}{\nabla}A = \bigcup_{i=1}^{n} \bigl(a_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\overset{+}{\nabla})\partial_k^i A\bigr), \quad \overset{-}{\nabla}A = \bigcup_{i=1}^{n} \bigl(a_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\overset{-}{\nabla})\partial_k^i A\bigr).$$

Доказательство последних формул можно получить похожими рассуждениями так, как это было сделано при выводе формулы разложения перманента. Его также можно найти, например, в [4, 7].

5. Комбинаторные свойства внешних и детерминированных булевых матриц

Определение 5.1. Последовательность $(a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2}, \ldots, a_n^{\alpha_n})$ элементов матрицы A назовём *нечётной* (*чётной*) *диагональю* данной матрицы A *с ненулевым пересечением*, если $a_1^{\alpha_1} \cap a_2^{\alpha_2} \cap \ldots \cap a_n^{\alpha_n} \neq 0$ для нечётных (соответственно чётных) перестановок верхних индексов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Диагональ $(a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2}, \ldots, a_n^{\alpha_n})$ назовём с нулевым пересечением, если $a_1^{\alpha_1} \cap a_2^{\alpha_2} \cap \ldots \cap a_n^{\alpha_n} = 0$.

Будем также говорить, что диагональ *проходит через элементы*, если они являются её составляющими.

Следующее очевидное утверждение даёт признак внешности.

Теорема 5.1. *Ненулевая матрица A является внешней, т. е. для матрицы выполнено условие* $\operatorname{Per} A = \overset{+}{\nabla}A = \overset{-}{\nabla}A = 0$, *тогда и только тогда, когда все диагонали в матрице A являются диагоналями с нулевым пересечением.*

Доказательство. Действительно, равенство

$$\operatorname{Per} A = \bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in \overset{+}{P}\cup \overset{-}{P}} (a_1^{\alpha_1} \cap a_2^{\alpha_2} \cap \ldots \cap a_n^{\alpha_n}) = 0$$

эквивалентно равенству $a_1^{\alpha_1} \cap a_2^{\alpha_2} \cap \ldots \cap a_n^{\alpha_n} = 0$ для всех перестановок верхних индексов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. □

Ниже приводится ещё один признак внешних ненулевых булевых матриц.

Теорема 5.2. *Булева матрица A является внешней тогда и только тогда, когда для всех значений индексов i и k матрица $a_k^i \cap \partial_k^i A$ является внешней.*

Доказательство. Матрица A является внешней тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\operatorname{Per} A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_k^i \cap \operatorname{Per} \partial_k^i A) = 0,$$

и следовательно, тогда и только тогда, когда

$$a_k^i \cap \operatorname{Per} \partial_k^i A = \operatorname{Per}(a_k^i \cap \partial_k^i A) = 0$$

для всех значений индексов i и k. Равенство $\operatorname{Per}(a_k^i \cap \partial_k^i A) = 0$ означает, что для всех значений индексов i и k матрица $a_k^i \cap \partial_k^i A$ является внешней. □

Укажем теперь признак таких булевых матриц, для которых выполнено условие $\operatorname{Per} A = \operatorname{RDet} A \neq 0$ (или $\operatorname{Per} A = \operatorname{LDet} A \neq 0$). Такое условие эквивалентно тому, что матрица A может быть представлена как

$$A = [(\operatorname{Per} A)' \cap A] \cup [\operatorname{Per} A \cap A] = [(\operatorname{Per} A)' \cap A] \cup [\operatorname{RDet} A \cap A] = \breve{A} \cup \overset{+}{A}$$

(или $A = \breve{A} \cup \overset{-}{A}$ соответственно), где $\overset{+}{A}$, $\overset{-}{A}$ — ненулевые положительные и отрицательные части.

Теорема 5.3. *Условие* $\operatorname{Per} A = \operatorname{RDet} A \neq 0$ (*или* $\operatorname{Per} A = \operatorname{LDet} A \neq 0$) *верно для булевой матрицы A тогда и только тогда, когда существует чётная* (*нечётная*) *диагональ с ненулевым пересечением и все нечётные* (*соответственно чётные*) *диагонали этой матрицы A являются диагоналями с нулевым пересечением.*

Доказательство. Действительно, для квадратной булевой матрицы A соотношение $\operatorname{Per} A = \operatorname{RDet} A \neq 0$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{RDet} A = \overset{+}{\nabla} A = \bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \overset{+}{P}} (a_1^{\alpha_1} \cap a_2^{\alpha_2} \cap \ldots \cap a_n^{\alpha_n}) \neq 0$$

и

$$\triangle A = \operatorname{LDet} A = \overset{-}{\nabla} A = \bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \overset{-}{P}} (a_1^{\alpha_1} \cap a_2^{\alpha_2} \cap \ldots \cap a_n^{\alpha_n}) = 0.$$

Но это равносильно тому, что найдутся такие наборы индексов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \overset{+}{P}$, что $a_1^{\alpha_1} \cap a_2^{\alpha_2} \cap \ldots \cap a_n^{\alpha_n} \neq 0$, и будет выполнено $a_1^{\beta_1} \cap a_2^{\beta_2} \cap \ldots \cap a_n^{\beta_n} = 0$ для любых нечётных перестановок индексов $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \overset{-}{P}$.

Случай $\operatorname{Per} A = \operatorname{LDet} A \neq 0$ проверяется аналогично рассмотренному. □

Определение 5.2. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Определим *функции знака* $\overset{m}{\sigma}$ *на ориентированных определителях* квадратной булевой матрицы A следующим образом:

$$\overset{m}{\sigma}(\operatorname{RDet})A = \operatorname{RDet} A, \quad \overset{m}{\sigma}(\operatorname{LDet})A = \operatorname{LDet} A,$$

если m чётное, и

$$\overset{m}{\sigma}(\operatorname{RDet})A = \operatorname{LDet} A, \quad \overset{m}{\sigma}(\operatorname{LDet})A = \operatorname{RDet} A,$$

если m нечётное.

Введём также следующие обозначения для определителей. Посредством $(\mathrm{R})(\mathrm{L})\mathrm{Det}\,A$ будем обозначать или правый определитель $\mathrm{RDet}\,A$, или левый определитель $\mathrm{LDet}\,A$, или определитель $\mathrm{Det}\,A$ матрицы A, если тип определителя не имеет значения.

Теорема 5.4. *Для булевой матрицы A условие* $\mathrm{Per}\,A = \mathrm{RDet}\,A \neq 0$ (*или* $\mathrm{Per}\,A = \mathrm{LDet}\,A \neq 0$) *выполнено тогда и только тогда, когда для любой пары индексов i и k выполняется одно из следующих двух условий*:

1) $\mathrm{Per}(a_k^i \cap \partial_k^i A) = \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})(a_k^i \cap \partial_k^i A) \neq 0$ *соответственно* $\mathrm{Per}(a_k^i \cap \partial_k^i A) = \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{LDet})(a_k^i \cap \partial_k^i A) \neq 0$),
2) $\mathrm{Per}(a_k^i \cap \partial_k^i A) = 0$,

причём условие 1) *выполняется по крайней мере для одной пары индексов.*

Доказательство. Если $\mathrm{Per}\,A = \mathrm{RDet}\,A \neq 0$, то найдётся такой набор индексов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \overset{+}{P}$, что

$$a_1^{\alpha_1} \cap a_2^{\alpha_2} \cap \ldots \cap a_n^{\alpha_n} \neq 0$$

и выполняется

$$a_1^{\beta_1} \cap a_2^{\beta_2} \cap \ldots \cap a_n^{\beta_n} = 0$$

для любых нечётных перестановок индексов $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \overset{-}{P}$ (теорема 5.3).

Предположим, что $\alpha_k = \beta_k = i$, тогда

$$a_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap a_k^i \cap \ldots \cap a_n^{\alpha_n} \neq 0,$$

если $(\alpha_1, \ldots, i, \ldots, \alpha_n) \in \overset{+}{P}$, и

$$a_1^{\beta_1} \cap \ldots \cap a_k^i \cap \ldots \cap a_n^{\beta_n} = 0,$$

если $(\beta_1, \ldots, i, \ldots, \beta_n) \in \overset{-}{P}$. Это означает, что диагонали $(a_1^{\alpha_1}, \ldots, a_k^i, \ldots, a_n^{\alpha_n})$ и $(a_1^{\beta_1}, \ldots, a_k^i, \ldots, a_n^{\beta_n})$ проходят через элемент a_k^i. Очевидно, что это возможно всегда при $n \geqslant 3$. Таким образом, условие

$$a_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap a_k^i \cap \ldots \cap a_n^{\alpha_n} \neq 0$$

влечёт существование диагонали или нескольких диагоналей

$$(a_k^i \cap a_1^{\alpha_1}, a_k^i \cap a_2^{\alpha_2}, \ldots, a_k^i \cap a_{k-1}^{\alpha_{k-1}}, a_k^i \cap a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}, \ldots, a_k^i \cap a_n^{\alpha_n})$$

в матрице $a_k^i \cap \partial_k^i A$ с ненулевым пересечением, которые являются чётными, если сумма $i+k$ чётная, или нечётными, если $i+k$ — нечётное число. Все остальные диагонали в матрице $a_k^i \cap \partial_k^i A$ являются диагоналями с нулевым пересечением. Это следует из того, что нужно совершить $i+k-2$ транспозиций соседних строк и столбцов матрицы A, чтобы вывести элемент a_k^i на первую строчку и в первый столбец. Получили, что для матрицы $a_k^i \cap \partial_k^i A$ выполнено

$$\mathrm{Per}(a_k^i \cap \partial_k^i A) = \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})(a_k^i \cap \partial_k^i A) \neq 0.$$

Предположим теперь, что ни одна из чётных диагоналей $(a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2}, \ldots, a_n^{\alpha_n})$ матрицы A с ненулевым пересечением не содержит элемента a_k^i. Это будет означать, что $a_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap a_k^i \cap \ldots \cap a_n^{\alpha_n} = 0$ для любых чётных (и, конечно же, для нечётных) перестановок $(\alpha_1, \ldots, i, \ldots, \alpha_n)$. Тогда все диагонали в матрице $a_k^i \cap \partial_k^i A$ являются диагоналями с нулевым пересечением. Следовательно, матрица $a_k^i \cap \partial_k^i A$ является внешностью, т. е. $\mathrm{Per}(a_k^i \cap \partial_k^i A) = 0$, либо она является нулевой матрицей.

Докажем теперь достаточность условия теоремы 5.4. Пусть по крайней мере для одной пары индексов i и k выполнено условие

$$\mathrm{Per}(a_k^i \cap \partial_k^i A) = \mathrm{RDet}(a_k^i \cap \partial_k^i A) \neq 0,$$

если $i + k$ чётно, или выполнено условие

$$\mathrm{Per}(a_k^i \cap \partial_k^i A) = \mathrm{LDet}(a_k^i \cap \partial_k^i A) \neq 0,$$

если $i + k$ нечётно, а для всех остальных значений индексов i и k выполнено $\mathrm{Per}(a_k^i \cap \partial_k^i A) = 0$, т. е. матрица $a_k^i \cap \partial_k^i A$ является внешней, возможно нулевой. Следует показать, что тогда для булевой матрицы A выполняется условие $\mathrm{Per}\, A = \mathrm{RDet}\, A \neq 0$.

Пусть Ω — непустое множество элементов a_k^i матрицы A, для которых выполняется

$$\mathrm{Per}(a_k^i \cap \partial_k^i A) = \mathrm{RDet}(a_k^i \cap \partial_k^i A) \neq 0,$$

если $i + k$ чётно, или

$$\mathrm{Per}(a_k^i \cap \partial_k^i A) = \mathrm{LDet}(a_k^i \cap \partial_k^i A) \neq 0,$$

если $i+k$ нечётно. Пусть для определённости множество Ω содержит элемент a_1^1. Тогда по теореме 5.3 существует чётная диагональ с ненулевым пересечением, и все нечётные диагонали матрицы $a_1^1 \cap \partial_1^1 A$ имеют нулевое пересечение. Последнее будет означать, что в матрице A можно найти чётную диагональ с ненулевым пересечением, содержащую a_1^1, а все остальные диагонали матрицы A, содержащие a_1^1, являются диагоналями с нулевым пересечением. То же самое дают и другие случаи выбора $a_k^i \in \Omega$: в матрице A можно найти чётную диагональ с ненулевым пересечением, содержащую a_k^i, а все остальные диагонали матрицы A, содержащие a_k^i, являются диагоналями с нулевым пересечением.

Все чётные и нечётные диагонали матрицы A, не содержащие элементов матрицы A, входящих в Ω, являются диагоналями с нулевым пересечением. Это следует из того, что все матрицы $a_k^i \cap \partial_k^i A$ являются внешними, если a_k^i не принадлежит Ω. Тогда, учитывая теорему 5.1, мы не можем найти диагонали с ненулевым пересечением.

Таким образом, мы доказали, что $\mathrm{Per}\, A = \mathrm{RDet}\, A \neq 0$.

Похожими рассуждениями доказывается теорема 5.4 в случае $\mathrm{Per}\, A = \mathrm{LDet}\, A \neq 0$. □

6. Формулы Лапласа для булевых матриц с нулевой внутренностью

Определение 6.1. Ненулевая булева матрица называется *матрицей с нулевой внутренностью* (*без внутренности*), если её внутренняя часть есть нулевая матрица ($\hat{A} = \Theta$ или, что то же самое, $\triangle A = 0$).

Теорема 6.1. *Пусть A — квадратная матрица над произвольной булевой алгеброй с нулевой внутренностью. Тогда справедливы разложения детерминантов по любой i-й строке этой матрицы*:

$$\mathrm{RDet}\, A = \bigcup_{k=1}^{n} \big(a_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})\partial_k^i A\big), \tag{1}$$

$$\mathrm{LDet}\, A = \bigcup_{k=1}^{n} \big(a_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{LDet})\partial_k^i A\big). \tag{2}$$

Из (1) *и* (2) *получается разложение определителя по i-й строке*:

$$\mathrm{Det}\, A = \bigcup_{k=1}^{n} (a_k^i \cap \mathrm{Det}\, \partial_k^i A). \tag{3}$$

Аналогичное утверждение справедливо и для столбцов.

Доказательство. Как уже отмечалось в теореме 5.2, для любой внешней матрицы, определяемой условием

$$\mathrm{Per}\, A = \overset{+}{\nabla} A = \overset{-}{\nabla} A = (\mathrm{R})(\mathrm{L})\mathrm{Det}\, A = 0,$$

выполнено

$$\mathrm{Per}(a_k^i \cap \partial_k^i A) = a_k^i \cap \mathrm{Per}\, \partial_k^i A = 0$$

для всех значений i, k. Следовательно,

$$a_k^i \cap (\mathrm{R})(\mathrm{L})\mathrm{Det}\, \partial_k^i A \subseteq a_k^i \cap \mathrm{Per}\, \partial_k^i A = 0$$

и

$$a_k^i \cap (\mathrm{R})(\mathrm{L})\mathrm{Det}\, \partial_k^i A = 0$$

для всех значений i, k. Тогда указанные в теореме формулы (1) и (2) выполняются для внешних матриц, так как в правых и левых частях стоят нули.

Докажем формулы (1) и (2) для детерминированных матриц. Проведём рассуждения, полагая для определённости, что A есть положительная ненулевая матрица, т. е. удовлетворяет условию $A = \overset{+}{A} = \mathrm{RDet}\, A \cap A$. Следовательно, $\mathrm{RDet}\, A = \mathrm{Per}\, A \neq 0$, и разложение перманента даёт равенство

$$\mathrm{RDet}\, A = \mathrm{Per}\, A = \bigcup_{k=1}^{n} (a_k^i \cap \mathrm{Per}\, \partial_k^i A) = \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{Per}(a_k^i \cap \partial_k^i A).$$

Из теоремы 5.4 получаем

$$\operatorname{Per}(a_k^i \cap \partial_k^i A) = \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})(a_k^i \cap \partial_k^i A) \neq 0$$

по крайней мере для одной пары индексов i и k. Но возможен случай $\operatorname{Per}(a_k^i \cap \partial_k^i A) = 0$, в котором снова получается равенство

$$\operatorname{Per}(a_k^i \cap \partial_k^i A) = \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})(a_k^i \cap \partial_k^i A) = 0,$$

так как

$$\overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})(a_k^i \cap \partial_k^i A) \subseteq \operatorname{Per}(a_k^i \cap \partial_k^i A).$$

Следовательно, формулы (1) и (2) выполняются для детерминированных матриц.

Докажем теперь теорему для общего случая, т. е. для матрицы с нулевой внутренностью $\hat{A} = \Theta$. Тогда

$$A = \check{A} \cup \hat{A} \cup \overset{+}{A} \cup \overset{-}{A} = \check{A} \cup \overset{+}{A} \cup \overset{-}{A}$$

и

$$\begin{aligned}
&\bigcup_{k=1}^{n} \big(a_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})\partial_k^i A\big) = \bigcup_{k=1}^{n} \Big(a_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})\partial_k^i \big(\check{A} \cup \overset{+}{A} \cup \overset{-}{A}\big)\Big) = \\
&\quad = \bigcup_{k=1}^{n} \big\{a_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})\partial_k^i \big[\big((\operatorname{Per} A)' \cap A\big) \cup (\mathrm{RDet}\, A \cap A) \cup (\mathrm{LDet}\, A \cap A)\big]\big\} = \\
&\quad = \bigcup_{k=1}^{n} \big\{a_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet}) \big[\big((\operatorname{Per} A)' \cap \partial_k^i A\big) \cup (\mathrm{RDet}\, A \cap \partial_k^i A) \cup (\mathrm{LDet}\, A \cap \partial_k^i A)\big]\big\}.
\end{aligned}$$

Последнее выражение с учётом указанных в теореме 2.1 формул для определителей, а также того, что булевы коэффициенты $(\operatorname{Per} A)'$, $\mathrm{RDet}\, A$, $\mathrm{LDet}\, A$ попарно не пересекаются, даёт

$$\begin{aligned}
&\bigcup_{k=1}^{n} \big\{\big[\big((\operatorname{Per} A)' \cap a_k^i\big) \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})\partial_k^i \big((\operatorname{Per} A)' \cap A\big)\big] \cup \\
&\quad \cup \big[(\mathrm{RDet} \cap a_k^i) \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})\partial_k^i (\mathrm{RDet} \cap A)\big] \cup \\
&\quad \cup \big[(\mathrm{LDet} \cap a_k^i) \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})\partial_k^i (\mathrm{LDet} \cap A)\big]\big\} = \\
&\quad = \bigcup_{k=1}^{n} \big(\check{a}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})\partial_k^i \check{A}\big) \cup \bigcup_{k=1}^{n} \big(\overset{+}{a}{}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})\partial_k^i \overset{+}{A}\big) \cup \\
&\quad \cup \bigcup_{k=1}^{n} \big(\overset{-}{a}{}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})\partial_k^i \overset{-}{A}\big) = \mathrm{RDet}\, \check{A} \cup \mathrm{RDet}\, \overset{+}{A} \cup \mathrm{RDet}\, \overset{-}{A} = \mathrm{RDet}\, A.
\end{aligned}$$

Здесь через $\check{a}_k^i$, $\overset{+}{a}{}_k^i$, $\overset{-}{a}{}_k^i$ обозначены соответственно элементы матриц $\check{A}$, $\overset{+}{A}$, $\overset{-}{A}$, стоящие в i-й строке и k-м столбце.

Аналогично проверяются формулы (2). □

Пример 6.1. Для матрицы

$$D = \begin{pmatrix} (2{,}5;5) & [0;2{,}5] & [0;3] \\ (2{,}5;4) & (2{,}5;3] & [2;3] \\ [0;8] & (2;5) & [2{,}5;5] \end{pmatrix}$$

с элементами, являющимися подмножествами множества действительных чисел, выполняется

$$\overset{+}{\nabla} D = [2;3], \quad \overset{-}{\nabla} D = (2{,}5;3], \quad \triangle D = (2{,}5;3], \quad \mathrm{RDet}\, D = [2;2{,}5], \quad \mathrm{LDet}\, D = \varnothing.$$

Тогда

$$A = D \setminus (2{,}5;3] = \begin{pmatrix} (3;5) & [0;2{,}5] & [0;2{,}5] \\ (3;4) & \varnothing & [2;2{,}5] \\ [0;2{,}5] \cup (3;8] & (2;2{,}5] \cup (3;5) & \{2{,}5\} \cup (3;5] \end{pmatrix}$$

есть матрица без внутренности, причём

$$\mathrm{Det}\, A = \mathrm{RDet}\, A = \overset{+}{\nabla} A = [2;2{,}5], \quad \mathrm{LDet}\, A = \triangle A = \overset{-}{\nabla} A = \varnothing.$$

Можно осуществить разложение по формуле (3) по 3-й строке определителя $\mathrm{Det}\, A$:

$$\begin{aligned} &\left\{ \{[0;2{,}5] \cup (3;8]\} \cap \mathrm{Det} \begin{pmatrix} [0;2{,}5] & [0;2{,}5] \\ \varnothing & [2;2{,}5] \end{pmatrix} \right\} \cup \\ &\cup \left\{ \{(2;2{,}5] \cup (3;5)\} \cap \mathrm{Det} \begin{pmatrix} (3;5) & [0;2{,}5] \\ (3;4) & [2;2{,}5] \end{pmatrix} \right\} \cup \\ &\cup \left\{ \{\{2{,}5\} \cup (3;5]\} \cap \mathrm{Det} \begin{pmatrix} (3;5) & [0;2{,}5] \\ (3;4) & \varnothing \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \big\{ \{[0;2{,}5] \cup (3;8]\} \cap [2;2{,}5] \big\} \cup \big\{ \{(2;2{,}5] \cup (3;5)\} \cap [2;2{,}5] \big\} \cup \\ &\cup \Big\{ \{\{2{,}5\} \cup (3;5]\} \cap \varnothing \Big\} = [2;2{,}5]. \end{aligned}$$

7. Разложения Лапласа и вырожденные матрицы

Следующие примеры показывают, что разложимость по формулам (1) и (2) свойственна не только матрицам с нулевой внутренностью.

Пример 7.1. Формулы (1) и (2) для внутренней матрицы

$$\begin{pmatrix} I & I & 0 \\ I & I & I \\ 0 & I & I \end{pmatrix}$$

не выполняются при разложении, например, по первой строке. С одной стороны,

$$\mathrm{(R)(L)Det} \begin{pmatrix} I & I & 0 \\ I & I & I \\ 0 & I & I \end{pmatrix} = 0.$$

С другой стороны, правые части формул (1) и (2) разложений по первой строке этой матрицы дают соответственно

$$\left(I\cap \operatorname{RDet}\begin{pmatrix} I & I\\ I & I\end{pmatrix}\right)\cup\left(I\cap \operatorname{LDet}\begin{pmatrix} I & I\\ 0 & I\end{pmatrix}\right)\cup\left(0\cap \operatorname{RDet}\begin{pmatrix} I & I\\ 0 & I\end{pmatrix}\right)=0\cup 0\cup 0=0$$

и

$$\left(I\cap \operatorname{LDet}\begin{pmatrix} I & I\\ I & I\end{pmatrix}\right)\cup\left(I\cap \operatorname{RDet}\begin{pmatrix} I & I\\ 0 & I\end{pmatrix}\right)\cup\left(0\cap \operatorname{LDet}\begin{pmatrix} I & I\\ 0 & I\end{pmatrix}\right)=0\cup I\cup 0=I.$$

Однако для внутренней матрицы

$$J=\begin{pmatrix} I & \cdots & I\\ \vdots & & \vdots\\ I & \cdots & I\end{pmatrix},$$

все элементы которой единицы, формулы (1) и (2) выполняются для любых её строк и столбцов.

Пусть A — вырожденная матрица, т. е. $A=\check{A}\cup\hat{A}$. Необходимым и достаточным признаком вырожденной матрицы является равенство ориентированных полуперманентов $\overset{+}{\nabla}A=\overset{-}{\nabla}A$. Действительно, равенство $\overset{+}{\nabla}A=\overset{-}{\nabla}A$ эквивалентно равенству $\operatorname{Det}A=0$, т. е. $\overset{+}{A}=\overset{-}{A}=\Theta$ (теорема 3.1). Учитывая это и формулы разложения полуперманентов по строке (столбцу), получаем, что необходимым и достаточным признаком вырожденной матрицы является равенство

$$\overset{+}{\nabla}A=\bigcup_{k=1}^{n}\bigl(a_k^i\cap{}^{i+k}\sigma(\overset{+}{\nabla})\partial_k^iA\bigr)=\bigcup_{k=1}^{n}\bigl(a_k^i\cap{}^{i+k}\sigma(\overset{-}{\nabla})\partial_k^iA\bigr)=\overset{-}{\nabla}A. \tag{4}$$

Лемма 7.1. *Формулы* (1) *и* (2) *разложения ориентированных определителей вырожденной матрицы A по строке* (*столбцу*) *выполняются тогда и только тогда, когда выполняется формула* (3) *для разложения определителя матрицы A по этой строке* (*столбцу*).

Доказательство. Очевидно, что из формул (1) и (2) всегда следует (3). Из формулы (3)

$$\operatorname{Det}A=0=\bigcup_{k=1}^{n}(a_k^i\cap\operatorname{Det}\partial_k^iA)$$

для вырожденной матрицы A получаем $\operatorname{RDet}A=\operatorname{LDet}A=0$. С другой стороны,

$$a_k^i\cap\operatorname{Det}\partial_k^iA=\operatorname{Det}(a_k^i\cap\partial_k^iA)=\operatorname{RDet}(a_k^i\cap\partial_k^iA)\cup\operatorname{LDet}(a_k^i\cap\partial_k^iA)=0,$$

что также даёт равенства

$$\operatorname{RDet}(a_k^i\partial_k^iA)=\operatorname{LDet}(a_k^i\cap\partial_k^iA)=0$$

для всех k и, следовательно, равенства (1) и (2). $\square$

Теорема 7.1. *Следующие условия эквивалентны.*

1. *Матрица A вырожденна, и для неё выполняются формулы разложения детерминантов* (1) *и* (2) *по i-й строке.*
2. *В формулах разложения по i-й строке ориентированных полуперманентов матрицы A имеет место почленное равенство булевых слагаемых*
$$a_k^i \cap \overset{+}{\nabla}\partial_k^i A = a_k^i \cap \overset{-}{\nabla}\partial_k^i A$$
для каждого $k = 1, \ldots, n$.
3. *Каждая матрица $a_k^i \cap \partial_k^i A$ ($k = 1, \ldots, n$) для данного i является вырожденной, т. е.* $\mathrm{Det}(a_k^i \cap \partial_k^i A) = 0$.

Аналогичное утверждение справедливо и для столбца.

Доказательство. Предположим, что выполняется первое условие теоремы, т. е. верны разложения по i-й строке (1) и (2) для некоторой вырожденной матрицы A. Тогда из
$$\mathrm{RDet}\, A = 0 = \bigcup_{k=1}^{n} \bigl(a_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})\partial_k^i A\bigr)$$
получаем, что
$$\overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})(a_k^i \cap \partial_k^i A) = 0$$
для всех значений k. Аналогично из (2) получаем, что
$$\overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{LDet})(a_k^i \cap \partial_k^i A) = 0$$
для всех k. Следовательно,
$$\mathrm{Det}(a_k^i \cap \partial_k^i A) = 0,$$
или
$$\overset{+}{\nabla}(a_k^i \cap \partial_k^i A) = \overset{-}{\nabla}(a_k^i \cap \partial_k^i A),$$
или
$$a_k^i \cap \overset{+}{\nabla}\partial_k^i A = a_k^i \cap \overset{-}{\nabla}\partial_k^i A,$$
и в формулах разложений ориентированных полуперманентов (4) наблюдаются равенства соответствующих булевых слагаемых.

Пусть каждая матрица $a_k^i \cap \partial_k^i A$ ($k = 1, \ldots, n$) для данного i является вырожденной, т. е. $\mathrm{Det}(a_k^i \cap \partial_k^i A) = 0$. Тогда
$$\overset{+}{\nabla}(a_k^i \cap \partial_k^i A) = \overset{-}{\nabla}(a_k^i \cap \partial_k^i A),$$
и для некоторой i-й строки в формулах разложений полуперманентов матрицы имеют место равенства всех соответствующих булевых слагаемых:
$$a_k^i \cap \overset{+}{\nabla}\partial_k^i A = a_k^i \cap \overset{-}{\nabla}\partial_k^i A.$$
Тогда, с одной стороны, выполняется равенство (4) и, следовательно, матрица A вырожденная и $\mathrm{(R)(L)Det}\, A = 0$. С другой стороны, при условии
$$a_k^i \cap \overset{+}{\nabla}\partial_k^i A = a_k^i \cap \overset{-}{\nabla}\partial_k^i A$$

получаем

$$a_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})\partial_k^i A = a_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{LDet})\partial_k^i A = a_k^i \cap \mathrm{RDet}\,\partial_k^i A = a_k^i \cap \mathrm{LDet}\,\partial_k^i A = 0$$

для всех номеров k. Следовательно, вырожденная матрица A удовлетворяет формулам разложения детерминантов (1) и (2) по i-й строке. $\square$

Как было ранее отмечено, квадратные вырожденные $(0, I)$-матрицы бывают двух типов: внешние и внутренние.

Следующая теорема о разложимости определителей внутренних $(0, I)$-матриц придаёт проблеме комбинаторный характер.

Теорема 7.2. *Матрица с элементами из булевой алгебры $B_2 = \{0, I\}$ является ненулевой внутренней и формулы разложения её определителя по строке (или столбцу) верны тогда и только тогда, когда в этой строке (или столбце) существует по крайней мере один ненулевой элемент, через который проходят по крайней мере две диагонали с ненулевыми пересечениями, причём одна чётная и одна нечётная, а все остальные диагонали этой матрицы являются диагоналями с нулевыми пересечениями.*

Доказательство. Как было доказано, если формула разложения по i-й строке (3) (или, по лемме 7.1, формулы (1) и (2)) для некоторой внутренней матрицы A выполняется, то

$$a_k^i \cap \overset{+}{\nabla}\partial_k^i A = a_k^i \cap \overset{-}{\nabla}\partial_k^i A,$$

где $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, может быть два варианта: либо

$$a_k^i \cap \overset{+}{\nabla}\partial_k^i A = a_k^i \cap \overset{-}{\nabla}\partial_k^i A = 0,$$

либо

$$a_k^i \cap \overset{+}{\nabla}\partial_k^i A = a_k^i \cap \overset{-}{\nabla}\partial_k^i A = I.$$

Первое условие даёт, что все диагонали

$$(a_k^i \cap a_1^{\alpha_1}, a_k^i \cap a_2^{\alpha_2}, \ldots, a_k^i \cap a_{k-1}^{\alpha_{k-1}}, a_k^i \cap a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}, \ldots, a_k^i \cap a_n^{\alpha_n})$$

в матрице $a_k^i \cap \partial_k^i A$ являются диагоналями с нулевым пересечением. Это значит, что

$$a_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap a_k^i \cap \ldots \cap a_n^{\alpha_n} = 0$$

и все проходящие через элемент a_k^i диагонали в матрице A являются диагоналями с нулевыми пересечениями.

Такие же рассуждения позволяют заключить во втором случае, что через элемент $a_k^i = I$ матрицы A проходят по крайней мере две диагонали, причём одна чётная, а другая нечётная, с ненулевыми пересечениями.

То, что в строке (или столбце) внутренней матрицы A обязательно существует ненулевой элемент, через который проходят две диагонали с ненулевыми пересечениями и противоположной чётности, следует из определяющего внутреннюю матрицу равенства $\triangle A = \overset{+}{\nabla} A = \overset{-}{\nabla} A = I$.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть в i-й строке (или столбце) матрицы A существуют элементы $a_k^i = I$, $k \in K \subseteq \{1, \ldots, n\}$, через каждый из которых проходят по крайней мере две диагонали вида $(a_1^{\alpha_1}, \ldots, a_k^i, \ldots, a_n^{\alpha_n})$ с ненулевыми пересечениями, причём одна чётная и одна нечётная. Следовательно, $\triangle A = \overset{+}{\nabla} A = \overset{-}{\nabla} A = I$, и матрица A является внутренней. С другой стороны, это влечёт существование двух диагоналей, причём одной чётной и другой нечётной, с ненулевым пересечением вида

$$(a_k^i \cap a_1^{\alpha_1}, a_k^i \cap a_2^{\alpha_2}, \ldots, a_k^i \cap a_{k-1}^{\alpha_{k-1}}, a_k^i \cap a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}, \ldots, a_k^i \cap a_n^{\alpha_n})$$

в матрице $a_k^i \cap \partial_k^i A$. Следовательно,

$$a_k^i \cap \overset{+}{\nabla} \partial_k^i A = a_k^i \cap \overset{-}{\nabla} \partial_k^i A = I$$

для всех $k \in K \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Ясно, что если все диагонали в матрице A, проходящие через каждый элемент $a_k^i = I$ при $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus K$ (тем более через элементы $a_k^i = 0$), являются диагоналями с нулевыми пересечениями, то снова получаем равенство

$$a_k^i \cap \overset{+}{\nabla} \partial_k^i A = a_k^i \cap \overset{-}{\nabla} \partial_k^i A = 0.$$

Выполнено условие 2 теоремы 7.1, следовательно, формула (3) для i-й строки (или столбца) верна. $\square$

Следствие. *Для внутренней ненулевой* $(0, I)$*-матрицы выполняются формулы разложения* по любой строке (или столбцу) *тогда и только тогда, когда в каждой строке* (*или столбце*) *существуют ненулевые элементы, через которые проходят по крайней мере две диагонали с ненулевыми пересечениями, причём противоположной чётности, а все остальные диагонали являются диагоналями с нулевыми пересечениями.*

Условия этого следствия выполняются для матриц из следующего примера.

Пример 7.2. Любая внутренняя (3×3)-матрица над $B_2 = \{0, I\}$ может быть представлена одним из следующих типов:

$$A_1 = \begin{pmatrix} I & I & a_3^1 \\ I & I & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & I \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} I & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & I & I \\ a_1^3 & I & I \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} I & a_2^1 & I \\ a_1^2 & I & a_3^2 \\ I & a_2^3 & I \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} a_1^1 & I & I \\ a_1^2 & I & I \\ I & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & I \\ I & I & a_3^2 \\ I & I & a_3^3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу A_1. В ней через элемент $a_1^1 = I$ уже проходит одна чётная диагональ (a_1^1, a_2^2, a_3^3), $a_1^1 \cap a_2^2 \cap a_3^3 = I$. Следовательно, для выполнения формул разложения (1)—(3) для первой строки нечётная диагональ (a_1^1, a_2^3, a_3^2), проходящая через этот же элемент $a_1^1 = I$, должна быть с ненулевым пересечением, т. е. $a_1^1 \cap a_2^3 \cap a_3^2 = I$. Поэтому $a_2^3 = a_3^2 = I$.

Рассмотрим теперь элемент $a_2^2 = I$ матрицы A_1. Через него уже проходит одна чётная диагональ (a_1^1, a_2^2, a_3^3), $a_1^1 \cap a_2^2 \cap a_3^3 = I$. Чтобы формулы разложения

(1)—(3) выполнялись для второй строки, нужно, чтобы $a_1^3 \cap a_2^2 \cap a_3^1 = I$ для нечётной диагонали (a_1^3, a_2^2, a_3^1), проходящей через элемент $a_2^2 = I$. Поэтому $a_1^3 = a_3^1 = I$.

Таким образом, для внутренних (3×3)-матриц над $B_2 = \{0, I\}$ формулы разложения (1)—(3) выполняются для двух строк (и, следовательно, для любой строки или столбца) только для матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} I & I & I \\ I & I & I \\ I & I & I \end{pmatrix} = J.$$

Можно привести пример внутренних $(n \times n)$-матриц $(n \geqslant 4)$, отличных от матрицы J, для которых формулы разложения определителей по любой строке выполняются. Например, матрица

$$\begin{pmatrix} I & I & 0 & 0 \\ I & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & I \\ 0 & 0 & I & I \end{pmatrix}$$

внутренняя, так как $\overset{\pm}{\nabla} A = I$. Разложения (1) и (2) по любой строке или столбцу выполняются. Так,

$$\left(I \cap (\mathrm{R})(\mathrm{L})\mathrm{Det} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & I \\ 0 & I & I \end{pmatrix} \right) \cup \left(I \cap (\mathrm{L})(\mathrm{R})\mathrm{Det} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & I \\ 0 & I & I \end{pmatrix} \right) \cup 0 \cup 0 = 0$$

есть разложение по первым двум строкам (или столбцам).

8. Разложения Лапласа для произвольных квадратных булевых матриц

Теорема 8.1. *Пусть A — квадратная матрица с элементами из произвольной булевой алгебры. Формулы* (1) *и* (2) *разложения по i-й строке* (*столбцу*) *ориентированных детерминантов матрицы A выполняются тогда и только тогда, когда формулы разложения по i-й строке* (*столбцу*) (1) *и* (2) *выполняются для ориентированных детерминантов её внутренней части $\hat{A}$.*

Доказательство. Правая часть формулы (1) и разложение $A = \check{A} \cup \hat{A} \cup \overset{+}{A} \cup \overset{-}{A}$ дают

$$\bigcup_{k=1}^{n} \bigl(a_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma} (\mathrm{RDet}) \partial_k^i A \bigr) = \bigcup_{k=1}^{n} \bigl\{ a_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma} (\mathrm{RDet}) \partial_k^i \bigl[\check{A} \cup \hat{A} \cup \overset{+}{A} \cup \overset{-}{A} \bigr] \bigr\} =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{n} \bigl\{ a_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma} (\mathrm{RDet}) \partial_k^i \bigl[\bigl((\mathrm{Per}\, A)' \cap A \bigr) \cup (\triangle A \cap A) \cup$$

$$\cup\, (\mathrm{RDet}\, A \cap A) \cup (\mathrm{LDet}\, A \cap A) \bigr] \bigr\} =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{n} \bigl\{ a_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet}) \bigl[\bigl((\mathrm{Per}\, A)' \cap \partial_k^i A \bigr) \cup (\triangle A \cap \partial_k^i A) \cup$$
$$\cup\, (\mathrm{RDet}\, A \cap \partial_k^i A) \cup (\mathrm{LDet}\, A \cap \partial_k^i A) \bigr] \bigr\}.$$

Учитывая теорему 2.1 и то, что коэффициенты $(\mathrm{Per}\, A)'$, $\triangle A$, $\mathrm{RDet}\, A$, $\mathrm{LDet}\, A$ попарно не пересекаются, получаем равенство

$$\bigcup_{k=1}^{n} \bigl(a_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet}) \partial_k^i A \bigr) =$$
$$= \bigcup_{k=1}^{n} \bigl(\check{a}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet}) \partial_k^i \check{A} \bigr) \cup \bigcup_{k=1}^{n} \bigl(\hat{a}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet}) \partial_k^i \hat{A} \bigr) \cup$$
$$\cup \bigcup_{k=1}^{n} \bigl(\overset{+}{a}{}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet}) \partial_k^i \overset{+}{A} \bigr) \cup \bigcup_{k=1}^{n} \bigl(\overset{-}{a}{}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet}) \partial_k^i \overset{-}{A} \bigr). \tag{5}$$

Здесь посредством $\check{a}_k^i$, $\hat{a}_k^i$, $\overset{+}{a}{}_k^i$, $\overset{-}{a}{}_k^i$ обозначены элементы матриц $\check{A}$, $\hat{A}$, $\overset{+}{A}$, $\overset{-}{A}$ соответственно. Следовательно,

$$\check{a}_k^i = (\mathrm{Per}\, A)' \cap a_k^i \subseteq (\mathrm{Per}\, A)', \qquad \hat{a}_k^i = \triangle A \cap a_k^i \subseteq \triangle A,$$
$$\overset{+}{a}{}_k^i = \mathrm{RDet}\, A \cap a_k^i \subseteq \mathrm{RDet}\, A, \qquad \overset{-}{a}{}_k^i = \mathrm{LDet}\, A \cap a_k^i \subseteq \mathrm{LDet}\, A.$$

Предположим, что формулы (1) и (2) выполняются для матрицы A. Заметим, что в равенстве (5) стоят слагаемые, удовлетворяющие включениям

$$\bigcup_{k=1}^{n} \bigl(\check{a}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet}) \partial_k^i \check{A} \bigr) \subseteq (\mathrm{Per}\, A)', \qquad \bigcup_{k=1}^{n} \bigl(\hat{a}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet}) \partial_k^i \hat{A} \bigr) \subseteq \triangle A,$$
$$\bigcup_{k=1}^{n} \bigl(\overset{+}{a}{}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet}) \partial_k^i \overset{+}{A} \bigr) \subseteq \mathrm{RDet}\, A, \qquad \bigcup_{k=1}^{n} \bigl(\overset{-}{a}{}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet}) \partial_k^i \overset{-}{A} \bigr) \subseteq \mathrm{LDet}\, A,$$

и $(\mathrm{Per}\, A)'$, $\triangle A$, $\mathrm{RDet}\, A$, $\mathrm{LDet}\, A$ попарно не пересекаются. Если выполняется (1), то все эти слагаемые должны содержаться в $\mathrm{RDet}\, A$. Это даёт равенства

$$\bigcup_{k=1}^{n} \bigl(\check{a}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet}) \partial_k^i \check{A} \bigr) = \bigcup_{k=1}^{n} \bigl(\hat{a}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet}) \partial_k^i \hat{A} \bigr) = \bigcup_{k=1}^{n} \bigl(\overset{-}{a}{}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet}) \partial_k^i \overset{-}{A} \bigr) = 0.$$

Подобным образом из (2) получаем равенства

$$\bigcup_{k=1}^{n} \bigl(\check{a}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{LDet}) \partial_k^i \check{A} \bigr) = \bigcup_{k=1}^{n} \bigl(\hat{a}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{LDet}) \partial_k^i \hat{A} \bigr) = \bigcup_{k=1}^{n} \bigl(\overset{+}{a}{}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{LDet}) \partial_k^i \overset{+}{A} \bigr) = 0.$$

Тогда формулы (1) и (2) выполняются для внутренней части $\hat{A}$ матрицы A. Их можно записать в виде

$$\bigcup_{k=1}^{n}\big(\hat{a}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})\partial_k^i \hat{A}\big) = 0 = \mathrm{RDet}\,\hat{A}, \tag{1$'$}$$

$$\bigcup_{k=1}^{n}\big(\hat{a}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{LDet})\partial_k^i \hat{A}\big) = 0 = \mathrm{LDet}\,\hat{A}. \tag{2$'$}$$

Предположим теперь, что формулы разложения по i-й строке ($1'$), ($2'$) выполняются для детерминантов внутренней части $\hat{A}$ матрицы A. Учитывая теорему 6.1 и то, что $\breve{A}$, $\overset{+}{A}$, $\overset{-}{A}$ являются матрицами с нулевой внутренностью, получаем равенства

$$\bigcup_{k=1}^{n}\big(\breve{a}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})\partial_k^i \breve{A}\,\big) = \mathrm{RDet}\,\breve{A} = 0,$$

$$\bigcup_{k=1}^{n}\big(\overset{+}{a}{}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})\partial_k^i \overset{+}{A}\big) = \mathrm{RDet}\,\overset{+}{A} = \mathrm{RDet}\,A,$$

$$\bigcup_{k=1}^{n}\big(\overset{-}{a}{}_k^i \cap \overset{i+k}{\sigma}(\mathrm{RDet})\partial_k^i \overset{-}{A}\big) = \mathrm{RDet}\,\overset{-}{A} = 0.$$

Тогда (5) даёт равенство (1) для матрицы A. Аналогичными рассуждениями устанавливается формула (2). $\square$

Очевидно, таким же образом можно доказать, что формула разложения детерминанта (3) матрицы A выполняются тогда и только тогда, когда она выполняются для детерминанта внутренней части $\hat{A}$ матрицы A.

9. Обратимые булевы матрицы и разложения детерминантов

Определение 9.1. Определим *произведение* $C = A \sqcap B$ квадратных $(n \times n)$-матриц A и B как матрицу того же размера, элементы которой c_j^i вычисляются по формуле

$$c_j^i = \bigcup_{t=1}^{n}(a_t^i \cap b_j^t).$$

Определение 9.2. Матрица A *обратима*, если существует матрица A^{-1} и выполнены равенства $A \sqcap A^{-1} = A^{-1} \sqcap A = E$. Матрицу A^{-1} называют *обратной* матрицей для A, а $E = (\delta_j^i)$, где δ_j^i есть I, если $i = j$, и 0, если $i \neq j$, — *единичной* матрицей.

Общий вид обратимой булевой матрицы и различные условия обратимости хорошо известны (см., например, [2, 7, 8]).

Определение 9.3. *Положительной* и *отрицательной присоединённой* для $(n \times n)$-матрицы A назовём $(n \times n)$-матрицы $\overset{+}{\mathrm{adj}}\,A$ и $\overset{-}{\mathrm{adj}}\,A$, элементы которых

$\big(\overset{+}{\mathrm{adj}}\,A\big)^i_j$ и $\big(\overset{-}{\mathrm{adj}}\,A\big)^i_j$ определяются равенствами

$$\big(\overset{+}{\mathrm{adj}}\,A\big)^i_j = {}^{i+j}\overset{}{\sigma}\big(\overset{+}{\nabla}\big)\partial^j_i A, \quad \big(\overset{-}{\mathrm{adj}}\,A\big)^i_j = {}^{i+j}\overset{}{\sigma}\big(\overset{-}{\nabla}\big)\partial^j_i A$$

соответственно. Таким образом,

$$\big(\overset{+}{\mathrm{adj}}\,A\big)^i_j = \overset{+}{\nabla}\partial^j_i A, \quad \big(\overset{-}{\mathrm{adj}}\,A\big)^i_j = \overset{-}{\nabla}\partial^j_i A,$$

если $i+j$ чётно, и

$$\big(\overset{+}{\mathrm{adj}}\,A\big)^i_j = \overset{-}{\nabla}\partial^j_i A, \quad \big(\overset{-}{\mathrm{adj}}\,A\big)^i_j = \overset{+}{\nabla}\partial^j_i A,$$

если $i+j$ нечётно.

В [1] была установлена связь обратных и присоединённых булевых матриц. Главный результат этой статьи сформулирован ниже и приводится без доказательства.

Лемма 9.1. *Для булевой квадратной матрицы A обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда $\mathrm{Det}\,A = I$ и $\big(A \sqcap \overset{+}{\mathrm{adj}}\,A\big) \cap \big(A \sqcap \overset{-}{\mathrm{adj}}\,A\big) = \Theta$ (или $\big(\overset{+}{\mathrm{adj}}\,A \sqcap A\big) \cap \big(\overset{-}{\mathrm{adj}}\,A \sqcap A\big) = \Theta$). Кроме того, обратная матрица равна булевой сумме её присоединённых матриц, т. е. $A^{-1} = \overset{+}{\mathrm{adj}}\,A \cup \overset{-}{\mathrm{adj}}\,A$, причём $\overset{+}{\mathrm{adj}}\,A \cap \overset{-}{\mathrm{adj}}\,A = \Theta$.*

Определение 9.4. Пусть $i \neq j$. Тогда равенства

$$\bigcup_{k=1}^{n} \big(a^i_k \cap {}^{j+k}\sigma(\mathrm{RDet})\partial^j_k A\big) = 0, \quad \bigcup_{k=1}^{n} \big(a^i_k \cap {}^{j+k}\sigma(\mathrm{LDet})\partial^j_k A\big) = 0$$

и эквивалентное им равенство

$$\bigcup_{k=1}^{n} (a^i_k \cap \mathrm{Det}\,\partial^j_k A) = 0 \tag{6}$$

назовём формулами *ложного разложения* определителей для строк i и j. Формулы ложного разложения определителей для пары столбцов можно выписать аналогичным образом.

Заметим, что формулы ложных разложений определителей квадратных булевых матриц в общем случае не выполняются.

Следующая теорема показывает связь проблемы обратимости булевых матриц и возможности разложения их определителей.

Теорема 9.1. *Для квадратной булевой матрицы A обратная матрица существует тогда и только тогда, когда $\mathrm{Det}\,A = I$ и для её определителя выполняются формулы разложений и формулы ложных разложений для любых её строк (или столбцов).*

Доказательство. Очевидно, что из формул (3), (6) и равенства $\operatorname{Det} A = I$ следует существование обратной матрицы A^{-1}. Элементами такой матрицы являются $(A^{-1})^i_j = \operatorname{Det} \partial^j_i A$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Покажем теперь, что существование обратной матрицы A^{-1} влечёт выполнение (3), (6) и равенства $\operatorname{Det} A = I$.

Из леммы 9.1 сразу получаем $\operatorname{Det} A = I$.

Обозначим через $A^{\langle [i] \Downarrow [j] \rangle}$ и $A_{\langle [i] \Rightarrow [j] \rangle}$ матрицы, полученные из матрицы A заменой j-й строки (или j-го столбца) строкой (соответственно столбцом) этой же матрицы с номером i. Понятно, что $A^{\langle [j] \Downarrow [j] \rangle} = A$ и $A_{\langle [j] \Rightarrow [j] \rangle} = A$.

Равенство

$$\big(A \sqcap \overset{+}{\operatorname{adj}} A\big) \cap \big(A \sqcap \overset{-}{\operatorname{adj}} A\big) = \Theta$$

из леммы 9.1 даёт

$$\left[\bigcup_{k=1}^{n} \big(a^i_k \cap \big(\overset{+}{\operatorname{adj}} A\big)^k_j\big)\right] \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n} \big(a^i_k \cap \big(\overset{-}{\operatorname{adj}} A\big)^k_j\big)\right] = 0$$

для всех $i, j = 1, \ldots, n$. Тогда, учитывая определение 9.3 для присоединённых матриц, получаем

$$\left[\bigcup_{k=1}^{n} \big(a^i_k \cap \overset{i+j}{\sigma}(\overset{+}{\nabla}) \partial^j_k A\big)\right] \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n} \big(a^i_k \cap \overset{i+j}{\sigma}(\overset{-}{\nabla}) \partial^j_k A\big)\right] = 0$$

для всех $i, j = 1, \ldots, n$. Формулы разложения Лапласа полуперманентов любых квадратных булевых матриц всегда выполняются. Тогда последние равенства перепишутся как

$$\big[\overset{+}{\nabla} A^{\langle [i] \Downarrow [j] \rangle}\big] \cap \big[\overset{-}{\nabla} A^{\langle [i] \Downarrow [j] \rangle}\big] = \triangle A^{\langle [i] \Downarrow [j] \rangle} = 0$$

(или $\triangle A_{\langle [i] \Rightarrow [j] \rangle} = 0$) для всех $i, j = 1, \ldots, n$.

Таким образом, из существования обратной матрицы A^{-1} следует, что все матрицы $A^{\langle [i] \Downarrow [j] \rangle}$ (или $A_{\langle [i] \Rightarrow [j] \rangle}$), $i, j = 1, \ldots, n$, являются матрицами с нулевой внутренностью. Следовательно, для них выполняются формулы разложения определителей (теорема 6.1) по любой строке (или столбцу). Остаётся заметить, что в случае $i = j$ разложения определителя $\operatorname{Det} A^{\langle [i] \Downarrow [j] \rangle}$ по j-й строке есть формулы (3), а в случае $i \neq j$ они становятся формулами ложных разложений (6). $\square$

Замечание. Условия $A^{-1} = \overset{+}{\operatorname{adj}} A \cup \overset{-}{\operatorname{adj}} A$, $\overset{+}{\operatorname{adj}} A \cap \overset{-}{\operatorname{adj}} A = \Theta$ из леммы 9.1 можно записать в виде

$$(A^{-1})^j_i = \overset{+}{\nabla} \partial^i_j A \cup \overset{-}{\nabla} \partial^i_j A = \big[\overset{+}{\nabla} \partial^i_j A \setminus \overset{-}{\nabla} \partial^i_j A\big] \cup \big[\overset{-}{\nabla} \partial^i_j A \setminus \overset{+}{\nabla} \partial^i_j A\big].$$

Мы получаем некий аналог известных выражений для элементов обратных матриц:

$$(A^{-1})^j_i = \operatorname{Per} \partial^i_j A = \operatorname{Det} \partial^i_j A \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Очевидно, обратимые матрицы не являются единственными, для определителей которых выполняются формулы разложений Лапласа и формулы ложных разложений для любых её строк или столбцов. В частности, они выполняются для матрицы $\alpha \cap A$, где A — обратимая булева матрица, а $\alpha \in B$, причём $\alpha \neq I$.

Литература

[1] Поплавский В. Б. Обратимые и присоединённые булевы матрицы // Чебышёвский сб. — 2005. — Т. 6, вып. 1. — С. 174—181.

[2] Скорняков Л. А. Обратимые матрицы над дистрибутивными структурами // Сиб. мат. журн. — 1986. — Т. 27, № 2. — С. 182—185.

[3] Chesley D. S., Bevis J. H. Determinants for matrices over lattices // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 1969. — Vol. 68, no. 2. — P. 138—144.

[4] Golan J. S. Semirings and Their Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.

[5] Poplavski V. On orientability and degeneration of Boolean binary relation on a finite set // Mathematical Logic in Asia. Proc. 9th Asian Logic Conf. Novosibirsk, Russia, 16—19 August 2005. — Singapore: World Scientific, 2006. — P. 203—214.

[6] Poplin P. L., Hartwig R. E. Determinantal identities over commutative semirings // Linear Algebra Appl. — 2004. — Vol. 387. — P. 99—132.

[7] Reutenauer C., Straubing H. Inversion of matrices over a commutative semiring // J. Algebra. — 1984. — Vol. 88. — P. 350—360.

[8] Rutherford D. E. Inverses of Boolean matrices // Proc. Glasgow Math. Assoc. — 1963. — Vol. 6, no. 1. — P. 49—53.