Классификация операторов с нормальным квадратом в унитарных и евклидовых пространствах*

В. М. ФУТОРНЫЙ
Университет Сан-Паулу, Бразилия
e-mail: futorny@ime.usp.br

Р. А. ХОРН
Университет штата Юта, США
e-mail: rhorn@math.utah.edu

В. В. СЕРГЕЙЧУК
Институт математики, Киев, Украина
e-mail: sergeich@imath.kiev.ua

УДК 512.643

Ключевые слова: канонические матрицы, нормальные матрицы, унитарное подобие, ортогональное подобие.

Аннотация

Получена каноническая форма комплексной матрицы, квадрат которой нормален, относительно преобразований унитарного подобия, а также каноническая форма вещественной матрицы, квадрат которой нормален, относительно преобразований ортогонального подобия.

Abstract

V. Futorny, R. A. Horn, V. V. Sergeichuk, Classification of squared normal operators on unitary and Euclidean spaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 4, pp. 225—232.

We give a canonical form for a complex matrix whose square is normal under transformations of unitary similarity as well as a canonical form for a real matrix whose square is normal under transformations of orthogonal similarity.

Две канонические формы комплексной матрицы A, такой что A^2 — нормальная матрица, относительно унитарного подобия $A \mapsto S^{-1}AS$ (S — унитарная комплексная матрица) были получены в [3] с использованием алгоритма регуляризации и теории коквадратов. Мы получим эти канонические формы

*Работа частично поддержана грантом 307812/2004-9 Национального совета Бразилии по научно-техническому развитию (CNPq) и грантами 2005/60337-2 и 05/59407-6 Научно-исследовательского фонда штата Сан-Паулу (FAPESP).

с помощью алгоритма Литтлвуда [4, 5]. Мы также дадим каноническую форму матрицы B с нормальным квадратом относительно ортогонального подобия $B \mapsto R^{-1}BR$ (R — ортогональная вещественная матрица).

Эти канонические формы являются каноническими матрицами линейных операторов $\mathcal{A}\colon U \to U$, для которых $\mathcal{A}^2$ — нормальный оператор и U — унитарное или евклидово пространство, поскольку при перевыборе базиса матрица оператора $\mathcal{A}$ переходит в унитарно или соответственно ортогонально подобную матрицу.

Задача классификации таких линейных операторов $\mathcal{A}\colon U \to U$, что $\mathcal{A}^3 = 0$ и U — унитарное пространство, содержит задачу классификации произвольных линейных операторов в унитарных пространствах (см. [5, с. 45] или [3]). Поэтому условие «$\mathcal{A}^3$ — нормальный оператор» и даже условие «$\mathcal{A}^3 = 0$» не упрощают задачу классификации линейных операторов $\mathcal{A}$ на унитарном пространстве.

1. Комплексные матрицы с нормальным квадратом относительно унитарного подобия

Теорема 1 ([3]). *Пусть A — квадратная комплексная матрица, для которой A^2 — нормальная матрица. Тогда*

а) *A унитарно подобна прямой сумме блоков вида*

$$[\lambda] \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} \mu & r \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ 0 \leqslant \arg(\mu) < \pi, \quad r \in \mathbb{R},\ r > 0; \tag{1}$$

б) *A также унитарно подобна прямой сумме блоков вида*

$$[\lambda] \quad \text{или} \quad \tau \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \nu & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda, \nu \in \mathbb{C},\ |\nu| < 1, \quad \tau \in \mathbb{R},\ \tau > 0. \tag{2}$$

Эти прямые суммы определяются матрицей A однозначно с точностью до перестановки слагаемых. Обратно, если A унитарно подобна прямой сумме блоков вида (1) *или* (2)*, то матрица A^2 нормальна.*

Доказательство.

а) Пусть A — комплексная матрица с нормальным квадратом. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ — все различные собственные числа A, упорядоченные так, что

$$0 \leqslant \arg(\lambda_i) < \pi \quad \text{и} \quad -\lambda_i \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\} \implies \lambda_{i+1} = -\lambda_i \tag{3}$$

для каждого ненулевого собственного числа λ_i. По теореме Шура об унитарной триангуляризации [2, теорема 2.3.1], матрица A унитарно подобна матрице вида

$$T = \begin{bmatrix} \Lambda_{\lambda_1} & T_{12} & \dots & T_{1t} \\ & \Lambda_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & T_{t-1,t} \\ 0 & & & \Lambda_{\lambda_t} \end{bmatrix},$$

в которой каждый блок Λ_{λ_i} — верхнетреугольная $(n_i \times n_i)$-матрица вида

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Если 0 является собственным числом матрицы A и соответствующий блок $\Lambda_0 = [a_{ij}]$ ненулевой, то множества индексов $\{i \mid a_{ij} \neq 0\}$ и $\{j \mid a_{ij} \neq 0\}$ не пересекаются, поскольку блок Λ_0 верхнетреугольный и $\Lambda_0^2 = 0$. Мы приводим Λ_0 одновременными перестановками строк и столбцов к виду

$$\Lambda_0 = \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

с квадратными блоками по диагонали.

Поскольку A^2 — нормальная матрица, T^2 тоже нормальна. Но T^2 верхнетреугольна, поэтому

$$T^2 = \lambda_1^2 I_{n_1} \oplus \lambda_2^2 I_{n_2} \oplus \ldots \oplus \lambda_t^2 I_{n_t}.$$

Отсюда следует, что $\Lambda_{\lambda_i} = \lambda_i I_{n_i}$ для всех $\lambda_i \neq 0$.

Если $T_{ij} \neq 0$, то $\lambda_i^2 = \lambda_j^2$, так как T коммутирует с T^2. Используя условие (3), получаем, что $j = i+1$, $0 \leqslant \arg(\lambda_i) < \pi$ и $\lambda_{i+1} = -\lambda_i$.

Таким образом, T — прямая сумма матриц двух типов:

$$\Lambda_\lambda = \lambda I \quad \text{и} \quad T_\mu = \begin{bmatrix} \mu I & F_\mu \\ 0 & -\mu I \end{bmatrix} \quad (0 \leqslant \arg(\mu) < \pi,\ F_\mu \neq 0).$$

Если $F_\mu = U\Sigma_\mu V$ — сингулярное разложение, то T_μ унитарно подобна

$$S^{-1} T_\mu S = \begin{bmatrix} \mu I & \Sigma_\mu \\ 0 & -\mu I \end{bmatrix}, \quad S := \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, A унитарно подобна прямой сумме матриц вида (1). Покажем, что эта сумма определяется по A однозначно с точностью до перестановки слагаемых. Мы дадим прямое доказательство однозначности, хотя мы могли бы воспользоваться теоремой 3.1 из [5] о том, что каждая система линейных отображений унитарных пространств разложима в прямую сумму неразложимых систем однозначно с точностью до изоморфизма слагаемых.

Пусть T и T' — две матрицы, являющиеся прямыми суммами блоков вида (1). Пусть λ — собственное число T. Группируя слагаемые с собственными числами λ и $-\lambda$, мы получим разложения в прямую сумму

$$T = T_1 \oplus T_2, \quad T' = T_1' \oplus T_2',$$

в которых T_1 и T_1' — прямые суммы блоков, каждое собственное число которых λ или $-\lambda$; T_2 и T_2' — прямые суммы блоков, которые не имеют собственных чисел λ и $-\lambda$. Предположим, что T и T' унитарно подобны и докажем, что их разложения в прямые суммы совпадают с точностью до перестановки слагаемых. Достаточно проверить, что разложения матриц T_1 и T_1' совпадают с точностью до перестановки слагаемых. Пусть S — такая унитарная матрица, что $TS = ST'$. Поскольку у T_1 и T_1' нет общих собственных чисел с T_2 и T_2', матрица S имеет вид $S = S_1 \oplus S_2$ и

$$T_1 S_1 = S_1 T_1'. \tag{4}$$

Таким образом, T_1 унитарно подобна T_1'.

Если T_1 — прямая сумма (1×1)-блоков $[\lambda]$ и $[-\lambda]$, то разложения T_1 и T_1' в прямые суммы совпадают с точностью до перестановки слагаемых. Пусть T_1 имеет прямое слагаемое размера 2×2 вида (1). Одновременными перестановками строк и столбцов в T_1 и одновременными перестановками строк и столбцов в T_1' приведём их к виду

$$T_1 = \begin{bmatrix} \lambda I_p & \Sigma \\ 0 & -\lambda I_q \end{bmatrix}, \quad T_1' = \begin{bmatrix} \lambda I_{p'} & \Sigma' \\ 0 & -\lambda I_{q'} \end{bmatrix},$$

где

$$\Sigma = \operatorname{diag}(r_1, \ldots, r_k) \oplus 0, \quad \Sigma' = \operatorname{diag}(r_1', \ldots, r_{k'}') \oplus 0 \,—$$

действительные матрицы,

$$r_1 \geqslant \ldots \geqslant r_k > 0, \quad r_1' \geqslant \ldots \geqslant r_{k'} > 0,$$

и если $\lambda = 0$, то Σ и Σ' не имеют нулевых столбцов (и поэтому их столбцы линейно независимы; нулевые столбцы и строки матриц T_1 и T_1' располагаем в первой вертикальной и первой горизонтальной полосах этих матриц). Из (4) следует, что $S_1 = U \oplus V$, где U размера $p \times p$. Получаем, что $\Sigma V = U \Sigma'$ и в силу единственности сингулярного разложения $\Sigma = \Sigma'$.

Мы доказали, что прямые суммы матриц вида (1) канонические относительно унитарного подобия.

б) Докажем, что прямые суммы матриц вида (2) тоже являются каноническими. Достаточно показать, что отображение

$$f\colon\ \tau \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \nu & 0 \end{bmatrix} \longmapsto \tau \begin{bmatrix} \sqrt{\nu} & 1 - |\nu| \\ 0 & -\sqrt{\nu} \end{bmatrix}$$

(в котором $0 \leqslant \arg(\sqrt{\nu}) < \pi$) является биекцией множества матриц вида

$$M_{\nu,\tau} := \tau \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \nu & 0 \end{bmatrix}, \quad \nu \in \mathbb{C},\ |\nu| < 1, \quad \tau \in \mathbb{R},\ \tau > 0, \tag{5}$$

на множество матриц вида

$$N_{\mu,r} := \begin{bmatrix} \mu & r \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{C},\ 0 \leqslant \arg(\mu) < \pi, \quad r \in \mathbb{R},\ r > 0,$$

и каждая матрица $M_{\nu,\tau}$ унитарно подобна матрице $f(M_{\nu,\tau})$.

Вначале докажем, что отображение f биективно. Зафиксируем матрицу $N_{\mu,r}$ и проверим, что она имеет в точности один прообраз $M_{\nu,\tau}$. Равенство $f(M_{\nu,\tau}) = N_{\mu,r}$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\tau\sqrt{\nu} = \mu, \quad \tau(1 - |\nu|) = r, \tag{6}$$

т. е. тогда и только тогда, когда

$$\frac{\mu}{r} = \frac{\sqrt{\nu}}{1-|\nu|}, \quad \tau = \frac{r}{1-|\nu|}. \tag{7}$$

Представим комплексные числа μ/r и ν в тригонометрической форме: $\mu/r = \rho e^{i\varphi}$ и $\nu = \chi e^{i\psi}$. Первое равенство в (7) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\rho = \frac{\sqrt{\chi}}{1-\chi}, \quad \varphi = \frac{\psi}{2}. \tag{8}$$

Существует единственное действительное число χ в интервале $(0,1)$, удовлетворяющее первому равенству в (8), поскольку действительная функция $y = \frac{\sqrt{x}}{1-x}$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ на интервале $[0,1)$. Таким образом, существует единственное ν, удовлетворяющее первому равенству в (7). Мы находим τ из второго равенства и получаем искомый прообраз $M_{\nu,\tau}$ матрицы $N_{\mu,r}$.

Каждая пара матриц $(M_{\nu,\tau}, N_{\mu,r})$, в которой $N_{\mu,r} = f(M_{\nu,\tau})$, полностью определяется параметрами $\mu \in \mathbb{C}$ и $\tau \in \mathbb{R}$. Эти параметры удовлетворяют условиям $0 \leqslant \arg(\mu) < \pi$ и $\tau > 0$, поскольку в силу (6) оставшиеся параметры ν и r выражаются через них:

$$\nu = \frac{\mu^2}{\tau^2}, \quad r = \tau(1-|\nu|) = \tau - \frac{\mu\bar{\mu}}{\tau}.$$

Отсюда

$$\mu(\tau - r) = \frac{\mu^2\bar{\mu}}{\tau} = \nu\bar{\mu}\tau,$$

и поэтому

$$N_{\mu,r}S = SM_{\nu,\tau}, \quad S := \frac{1}{\sqrt{\tau^2+\mu\bar{\mu}}}\begin{bmatrix} \tau & \bar{\mu} \\ -\mu & \tau \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $M_{\nu,\tau}$ унитарно подобна матрице $N_{\mu,r}$. □

Алгоритмом Литтлвуда [4—6] преобразует каждую квадратную комплексную матрицу A в матрицу A_{can}, которая унитарно подобна A. Две квадратные матрицы A и B унитарно подобны тогда и только тогда, когда они преобразуются в одну и ту же матрицу $A_{\mathrm{can}} = B_{\mathrm{can}}$. Поэтому A_{can} — каноническая форма матрицы A относительно унитарного подобия. Структура A_{can} изучалась в [1, 5]. Если A имеет нормальный квадрат, то A_{can} одновременными перестановками строк и столбцов приводится к прямой сумме блоков вида (1).

2. Вещественные матрицы с нормальным квадратом относительно ортогонального подобия

Овеществлением комплексной $(m\times n)$-матрицы M называется вещественная $(2m \times 2n)$-матрица $M^{\mathbb{R}}$, которая получается заменой каждого элемента $a + bi$

матрицы M блоком
$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Вещественная форма Жордана матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ может быть получена из канонической формы Жордана матрицы A заменой всех пар комплексно сопряжённых клеток Жордана
$$J_n(a+bi) \oplus J_n(a-bi), \quad b>0,$$
на $J_n(a+bi)^{\mathbb{R}}$ (см. [2, теорема 3.4.5]). Действительная каноническая форма нормальной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ относительно подобия может быть получена из её диагональной канонической формы заменой всех пар комплексно сопряжённых диагональных элементов
$$[a+bi] \oplus [a-bi], \quad b>0,$$
на $[a+bi]^{\mathbb{R}}$ (см. [2, теорема 2.5.8]). В следующей теореме мы покажем, что вещественная каноническая форма матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ с нормальным квадратом относительно ортогонального подобия может быть получена таким же способом из канонической формы, полученной в теореме 1 б) (и из любой другой канонической формы матрицы A относительно унитарного подобия).

Теорема 2. *Пусть A — квадратная вещественная матрица, квадрат которой нормален. Тогда A ортогонально подобна прямой сумме вещественных блоков вида*
$$[\lambda], \quad \tau\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \nu & 0 \end{bmatrix} \quad (|\nu|<1,\ \tau>0) \tag{9}$$
и
$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad (b>0), \quad \tau\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & -d & 0 & 0 \\ d & c & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (d>0,\ c^2+d^2<1,\ \tau>0). \tag{10}$$
Эта прямая сумма определяется матрицей A однозначно с точностью до перестановки слагаемых. Она может быть получена из канонической формы матрицы A относительно унитарного подобия, являющейся прямой суммой матриц вида (2), *заменой всех пар слагаемых*
$$[a+bi] \oplus [a-bi] \quad (b>0), \quad \tau\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c+di & 0 \end{bmatrix} \oplus \tau\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c-di & 0 \end{bmatrix} \quad (d>0)$$
соответствующими матрицами (10). *Обратно, если A ортогонально подобна прямой сумме блоков вида* (9) *или* (10), *то матрица A^2 нормальна.*

Доказательство. Вначале докажем, что комплексная матрица M имеет нормальный квадрат тогда и только тогда, когда её овеществление $M^{\mathbb{R}}$ имеет нормальный квадрат. Если M представлена в виде $M = A + Bi$ с A и B над $\mathbb{R}$, то её овеществление $M^{\mathbb{R}}$ одновременными перестановками строк и столбцов приводится к виду

$$M_{\mathbb{R}} := \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}.$$

Поскольку

$$\begin{bmatrix} A+Bi & 0 \\ 0 & A-Bi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & iI \\ I & -iI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & iI \\ I & -iI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix},$$

то

$$M_{\mathbb{R}} = S^{-1}(M \oplus \bar{M})S = S^*(M \oplus \bar{M})S$$

с унитарной матрицей

$$S := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & iI \\ I & -iI \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $M^{\mathbb{R}}$ имеет нормальный квадрат тогда и только тогда, когда $M_{\mathbb{R}}$ имеет нормальный квадрат (т. е. $(M_{\mathbb{R}}^2)^* M_{\mathbb{R}}^2 = M_{\mathbb{R}}^2 (M_{\mathbb{R}}^2)^*$). Это имеет место тогда и только тогда, когда

$$(M^2)^* M^2 = M^2 (M^2)^* \quad \text{и} \quad (\bar{M}^2)^* \bar{M}^2 = \bar{M}^2 (\bar{M}^2)^*,$$

т. е. тогда и только тогда, когда M имеет нормальный квадрат.

Каноническая форма вещественных матриц относительно ортогонального подобия может быть получена из канонической формы комплексных матриц относительно унитарного подобия следующим образом. Квадратную комплексную матрицу A назовём *разложимой*, если она унитарно подобна прямой сумме квадратных матриц меньшего размера. Пусть $\mathcal{S}$ — любое множество неразложимых канонических комплексных матриц относительно унитарного подобия (например, множество неразложимых матриц, на которых алгоритм Литтлвуда действует тождественно). Каждую матрицу $M \in \mathcal{S}$, которая унитарно подобна вещественной матрице R, мы заменим матрицей R. Каждую пару $\{M, N\} \subset \mathcal{S}$, в которой M не является унитарно подобной вещественной матрице и N унитарно подобна комплексно сопряжённой матрице $\bar{M}$, мы заменим матрицей $M^{\mathbb{R}}$ или $N^{\mathbb{R}}$ ($N = M$, если M унитарно подобна матрице $\bar{M}$). Обозначим полученное множество через $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$. В силу теоремы 4.1 из [5] о системах линейных отображений унитарных и евклидовых пространств каждая действительная матрица A ортогонально подобна прямой сумме матриц множества $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ и эта сумма определяется по A однозначно с точностью до перестановки слагаемых.

Если мы удалим из $\mathcal{S}$ матрицы с ненормальным квадратом и построим множество $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$, то оно будет состоять из вещественных матриц с нормальными квадратами и каждая вещественная матрица с нормальным квадратом будет ортогонально подобна прямой сумме матриц из $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$, определяемой однозначно с точностью до перестановки слагаемых.

Покажем, что если $\mathcal{S}$ — множество матриц вида (2), то $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ — множество матриц вида (9) и (10). Вещественные матрицы вида (2) соответствуют (9). Каждая пара $\{[a+bi], [a-bi]\} \subset \mathcal{S}$, где $b > 0$, соответствует $[a+bi]^{\mathbb{R}}$, которая является первой матрицей в (9). Каждая пара $\{M_{c+di,\tau}, M_{c-di,\tau}\} \subset \mathcal{S}$ матриц вида (5), где $d > 0$ и $c^2+d^2 < 1$, соответствует $M^{\mathbb{R}}_{c+di,\tau}$, которая является второй матрицей в (10). $\square$

Литература

[1] Сергейчук В. В. Классификация линейных операторов в конечномерном унитарном пространстве // Функц. анализ и его прил. — 1984. — Т. 18, № 3. — С. 57—62.

[2] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989.

[3] Horn R. A., Sergeichuk V. V. Some canonical forms for unitary congruence and $*$congruence // Linear Multilinear Algebra.

[4] Littlewood D. E. On unitary equivalence // J. London Math. Soc. — 1953. — Vol. 28. — P. 314—322.

[5] Sergeichuk V. V. Unitary and Euclidean representations of a quiver // Linear Algebra Appl. — 1998. — Vol. 278. — P. 37—62.

[6] Shapiro H. A survey of canonical forms and invariants for unitary similarity // Linear Algebra Appl. — 1991. — Vol. 147. — P. 101—167.