Изоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов градуированных модулей, близких к свободным*

И. Н. БАЛАБА
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ibalaba@tula.net

А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 512.552

Ключевые слова: градуированные кольца, кольца эндоморфизмов, полулинейный изоморфизм, образующие.

Аннотация

Получены критерии индуцируемости изоморфизма градуированных колец изоморфизмов строгих gr-образующих gr-образующим, градуированной эквивалентностью Мориты и полулинейным преобразованием.

Abstract

I. N. Balaba, A. V. Mikhalev, Isomorphisms of graded endomorphism rings of graded modules close to free ones, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 5, pp. 3—18.

We obtain criteria that answer the question when an isomorphism of graded endomorphism rings of strong gr-generators is induced by a gr-generator, graded Morita equivalence, or semi-linear isomorphism.

В [4] были доказаны три критерия индуцируемости изоморфизма колец эндоморфизмов строгих образующих модулей (т. е. модулей, имеющих свободное циклическое прямое слагаемое) функтором, ассоциированным с образующим модулем, эквивалентностью Мориты и полулинейным преобразованием (в некотором смысле это направление связано с исследованием проблемы Бэра—Капланского для модулей). В последние десятилетия отмечается значительный интерес к алгебраическим объектам, снабжённым градуировкой. При этом специальным классам колец и модулей ставятся в соответствие классы градуированных колец и модулей. Цель настоящей работы — получение соответствующих критериев для изоморфизмов градуированных колец эндоморфизмов строгих gr-образующих. В качестве следствий этих критериев получены градуированный

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант № 05-01-00672.

аналог теоремы Болла об индуцируемости изоморфизма градуированных колец эндоморфизмов gr-прообразующих градуированной эквивалентностью Мориты (см. [3]) и теорема об индуцируемости изоморфизма градуированных колец линейных преобразований градуированных векторных пространств некоторым полулинейным преобразованием (см. [2,10]).

1. Предварительные сведения

Предполагается, что все рассматриваемые кольца ассоциативные с единицей 1, все модули унитарные, G — мультипликативная группа с единичным элементом e.

Кольцо A называется *G-градуированным* (или *градуированным по группе G*), если

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g,$$

где $\{A_g \mid g \in G\}$ — семейство аддитивных подгрупп кольца A и $A_g A_h \subseteq A_{gh}$ для всех $g, h \in G$. Легко убедиться, что $1 \in A_e$. Если при этом $A_s A_h = A_{sh}$ для всех $s, h \in G$, то кольцо A называется *строго градуированным*.

Элементы множества $h(A) = \bigcup\limits_{g \in G} A_g$ называются однородными элементами кольца, а ненулевой элемент $a \in A_g$ называется *однородным элементом степени g* (обозначение $\deg a = g$). Любой ненулевой элемент $a \in A$ имеет единственное представление в виде суммы однородных элементов $\sum\limits_{g \in G} a_g$, где $a_g \in A_g$ ненулевые лишь для конечного числа элементов $g \in G$. Ненулевые слагаемые a_g в таком разложении называются *однородными компонентами* элемента a.

Правый A-модуль M называется *G-градуированным*, если

$$M = \bigoplus_{g \in G} M_g,$$

где $\{M_g \mid g \in G\}$ — семейство аддитивных подгрупп в абелевой группе $(M, +)$, таких что $M_h A_g \subseteq M_{hg}$ для всех $h, g \in G$. *Носителем* G-градуированного модуля M называется множество

$$\mathrm{Supp}(M) = \{g \in G \mid M_g \neq 0\}.$$

Аналогично можно определить левый G-градуированный модуль и G-градуированный бимодуль. Чтобы подчеркнуть, с какой стороны определена структура модуля, будем в этих ситуациях использовать обозначения M_A, ${}_AM$, ${}_AM_R$ и т. п., здесь ${}_AM_R$ обозначает A-R-бимодуль (левый A-модуль и правый R-модуль, при этом $(am)r = a(mr)$ для всех $a \in A$, $m \in M$, $r \in R$).

Обозначим через mod-A (A-mod) категорию правых (левых) A-модулей, а через gr.mod-A (A-gr.mod) категорию правых (левых) G-градуированных A-модулей, объектами которой являются правые (левые) G-градуированные A-модули, а морфизмами — сохраняющие градуировку гомоморфизмы. Это означает, что если $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ — множество всех гомоморфизмов из модуля M_A в модуль N_A, то

$$\mathrm{Hom}_{\text{gr.mod-}A}(M,N)=\{f\in \mathrm{Hom}_A(M,N)\mid f(M_g)\subseteq N_g \text{ для всех } g\in G\}.$$

Если $M=\bigoplus\limits_{g\in G} M_g$ — правый градуированный A-модуль и $g\in G$, то обозначим через $M(g)$ модуль M, рассматриваемый с градуировкой $M(g)_h=M_{gh}$, $h\in G$. Правый градуированный A-модуль $M(g)$ называется *g-сдвигом* модуля M.

Легко убедиться, что соответствие $\tau_g\colon M\to M(g)$ определяет функтор сдвига градуировки $\tau_g\colon \text{gr.mod-}A\to \text{gr.mod-}A$, который является эквивалентностью категорий, и при этом имеют место следующие равенства:

1) $\tau_g\circ\tau_h=\tau_{gh}$ для всех $g,h\in G$;
2) $\tau_g\circ\tau_{g^{-1}}=\tau_{g^{-1}}\circ\tau_g=\mathrm{id}_{\text{gr.mod-}A}$ (тождественный функтор);
3) $\tau_g\circ F=F$, где $F\colon \text{gr.mod-}A\to \text{mod-}A$ — функтор, забывающий градуировку.

Кроме гомоморфизмов G-градуированных модулей, сохраняющих градуировку, естественно рассматривать гомоморфизмы, градуировку «сдвигающие».

A-линейное отображение $f\colon M\to N$ правых G-градуированных A-модулей называется *градуированным морфизмом степени g*, если $f(M_h)\subseteq N_{gh}$ для всех $h\in G$. Градуированные морфизмы степени g образуют аддитивную подгруппу $\mathrm{HOM}_A(M,N)_g$ группы $\mathrm{Hom}_A(M,N)$. Из определения следует, что

$$\mathrm{Hom}_{\text{gr.mod-}A}(M,N)=\mathrm{HOM}_A(M,N)_e,$$
$$\mathrm{HOM}_A(M,N)_g=\mathrm{Hom}_{\text{gr.mod-}A}\big(M,N(g)\big)=\mathrm{Hom}_{\text{gr.mod-}A}(M(g^{-1}),N).$$

Ясно, что $\mathrm{HOM}_A(M,N)=\bigoplus\limits_{g\in G}\mathrm{HOM}_A(M,N)_g$ является G-градуированной абелевой группой, а $\mathrm{END}_A(M)=\bigoplus\limits_{g\in G}\mathrm{HOM}_A(M,M)_g$ — G-градуированным кольцом, которое называется *градуированным кольцом эндоморфизмов* градуированного A-модуля M.

Хорошо известно, что если группа G конечна, или модуль M конечно порождён, или оба модуля M и N имеют конечные носители, то $\mathrm{HOM}_A(M,N)=\mathrm{Hom}_A(M,N)$ [9, следствие I.2.11; 8]. В общем случае может иметь место строгое включение.

Замечание. При рассмотрении левых G-градуированных A-модулей *градуированным морфизмом степени g* называется A-линейное отображение $f\colon M\to N$, для которого $(M_h)f\subseteq N_{hg}$ при всех $h\in G$, а g-сдвигом модуля M называется модуль $M(g)$, рассматриваемый с градуировкой $M(g)_h=M_{hg}$, $h\in G$.

Отображение $\varphi\colon A\to B$ двух G-градуированных колец называется *гомоморфизмом* (*изоморфизмом*) градуированных колец, если φ является кольцевым гомоморфизмом (изоморфизмом) и $\varphi(A_g)\subseteq B_g$ для всех $g\in G$.

Градуированные кольца A и B называются *η-изоморфными*, если существуют изоморфизм колец $\varphi\colon A \to B$ и автоморфизм η группы G, такие что $\varphi(A_g) \subseteq B_{\eta(g)}$ для всех $g \in G$.

Лемма 1.1. *Пусть M — правый градуированный A-модуль. Тогда тождественное преобразование* $\mathrm{id}\colon \mathrm{END}_A(M) \to \mathrm{END}_A\big(M(g)\big)$ *является η-изоморфизмом градуированных колец, где $\eta\colon h \mapsto g^{-1}hg$ — внутренний автоморфизм группы G.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{END}_A(M)_h$. Тогда $f(M_s) \subseteq M_{hs}$ для всех $s \in G$. Следовательно, для всех $s \in G$ получим, что

$$f(M(g)_s) = f(M_{gs}) \subseteq M_{hgs} = M_{gg^{-1}hgs} = M(g)_{g^{-1}hgs}$$

и $f \in \mathrm{END}_A\big(M(g)\big)_{g^{-1}hg}$. Таким образом, $\mathrm{END}_A(M)_h \subseteq \mathrm{END}_A\big(M(g)\big)_{g^{-1}hg}$ для любого $h \in G$. □

2. Строгие градуированные образующие

Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ — абелевы категории. Ковариантный функтор $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ называется *унивалентным* (*полным* или *вполне унивалентным*), если для любой пары X, Y объектов категории $\mathcal{C}$ индуцированное отображение

$$T_{X,Y}\colon \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(TX,TY)$$

инъективно (соответственно сюръективно или биективно) (см. [5, гл. 2]).

Объект U категории $\mathcal{C}$ называется *образующим*, если основной ковариантный функтор $h^U = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(U, \text{-})$ со значениями в категории множеств унивалентен.

Заметим, что, в отличие от категории модулей mod-A, само кольцо A, рассматриваемое как правый градуированный A-модуль A_A, образующим категории градуированных A-модулей gr.mod-A может не являться.

Известно [9, теоремы I.3.4 и I.5.1; 6, теоремы 2.8 и 4.6], что правый градуированный модуль A_A является образующим категории gr.mod-A в том и только в том случае, если A — строго градуированное кольцо. Тогда функтор

$$\text{-}\otimes_{A_e}\colon \text{mod-}A_e \to \text{gr.mod-}A$$

является эквивалентностью категорий.

В то же время легко убедиться, что $P = \bigoplus\limits_{g\in G} A(g)$ является образующим категории gr.mod-A. Более того, gr.mod-A — категория Гротендика [9, п. I.1].

Для градуированного A-модуля M_A определим *gr-след*

$$\mathrm{gr.tr}_A(M) = \sum_{f \in \mathrm{HOM}_A(M,A)} f(M).$$

Лемма 2.1. *Пусть U_A — правый градуированный A-модуль, $B = \mathrm{END}_A(U)$ — его градуированное кольцо эндоморфизмов. Тогда равносильны следующие условия:*

1) $\bigoplus\limits_{g\in G} U(g)$ *является образующим категории* gr.mod-A;
2) *функтор* $\mathrm{HOM}_A(U,\text{-})\colon \text{gr.mod-}A \to \text{gr.mod-}B$ *унивалентен*;
3) *для любого градуированного A-модуля M каноническое отображение* $\rho\colon U^{(I)} \to M$, *где* $I = h\big(\mathrm{HOM}_A(U,M)\big)$, — *эпиморфизм*;
4) $\text{gr.tr}_A(U) = A$;
5) *существуют конечные множества градуированных морфизмов* $f_1, f_2, \ldots, f_n \in h\big(\mathrm{HOM}_A(U,A)\big)$ *и однородных элементов* $u_1, u_2, \ldots, u_n \in h(U)$, *такие что* $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(u_i) = 1$;
6) U_A — *образующий категории* mod-A.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Поскольку модуль $V = \bigoplus\limits_{g\in G} U(g)$ — образующий категории gr.mod-A, то функтор $h^V = \mathrm{Hom}_{\text{gr.mod-}A}(V,\text{-})$ является унивалентным, т. е. для любых градуированных модулей $M, N \in \text{gr.mod-}A$ и любых различных морфизмов $f_i \in \mathrm{Hom}_{\text{gr.mod-}A}(M,N)$ $(i = 1,2)$ найдётся морфизм $f \in \mathrm{Hom}_{\text{gr.mod-}A}(V,M)$, такой что $f_1 f \neq f_2 f$. Но

$$\mathrm{Hom}_{\text{gr.mod-}A}(V,M) = \mathrm{Hom}_{\text{gr.mod-}A}\left(\bigoplus_{g\in G} U(g), M\right) = \prod_{g\in G} \mathrm{Hom}_{\text{gr.mod-}A}(U(g),M),$$

следовательно, существует $f_g \in \mathrm{Hom}_{\text{gr.mod-}A}(U(g),M)$, для которого $f_1 f_g \neq f_2 f_g$.

Унивалентность функтора $\mathrm{HOM}_A(U,\text{-})$ следует из того, что

$$\mathrm{Hom}_{\text{gr.mod-}A}(U(g),M) = \mathrm{HOM}_A(U,M)_{g^{-1}} \subseteq \mathrm{HOM}_A(U,M).$$

Для доказательства импликации 2) $\Longrightarrow$ 3) предположим противное, т. е. что $\operatorname{Im}\rho \neq M$ для некоторого $M \in \text{gr.mod-}A$. Тогда $\operatorname{Im}\rho$ является градуированным подмодулем в M, и пусть $\pi\colon M \to M/\operatorname{Im}\rho$ — естественный эпиморфизм. Поскольку $\pi \neq 0$, из унивалентности функтора $\mathrm{HOM}_A(U,\text{-})$ следует, что существует морфизм $f \in h\big(\mathrm{HOM}_A(U,M)\big)$, такой что $\pi f \neq 0$. Отсюда получаем, что $\operatorname{Im} f \not\subset \operatorname{Im}\rho$, что противоречит определению образа $\operatorname{Im}\rho$.

Импликации 3) $\Longrightarrow$ 4) и 5) $\Longrightarrow$ 6) очевидны; эквивалентность 4) $\Longleftrightarrow$ 5) следует из определения gr-следа модуля.

Докажем, что справедлива импликация 6) $\Longrightarrow$ 5). Пусть градуированный A-модуль U_A является образующим категории mod-A. Тогда существуют конечные множества гомоморфизмов $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathrm{Hom}_A(U,A)$ и элементов $u_1, u_1, \ldots, u_n \in U$, такие что $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(u_i) = 1$. Без ограничения общности можно считать, что все элементы u_i $(i = 1,\ldots,n)$ однородные, и пусть $\deg u_i = g_i$.

Для каждого $i = 1,\ldots,n$ и каждого $x \in U_h$ положим $\hat{f}_i(x) = f_i(x)_{g_i^{-1}h}$ (здесь $f_i(x)_{g_i^{-1}h}$ означает $(g_i^{-1}h)$-компоненту элемента $f_i(x)$). Ясно, что $\hat{f}_i\colon U \to A$ — градуированный морфизм степени g_i^{-1} и $\sum\limits_{i=1}^{n} \hat{f}_i(u_i) = 1$.

Докажем импликацию 5) $\Longrightarrow$ 1). Из условия 5) следует, что отображение

$$f = \bigoplus_{i=1}^{n} f_i \colon \bigoplus_{i=1}^{n} U(g_i) \to A, \quad \text{где} \quad g_i^{-1} = \deg(f_i),$$

является эпиморфизмом в категории градуированных A-модулей. Так как $\bigoplus\limits_{g\in G} A(g)$ — образующий категории gr.mod-A, то образующим является и $\bigoplus\limits_{g\in G} U(g)$. □

Определение 2.1. Градуированный A-модуль U_A будем называть gr-образующим, если он удовлетворяет условиям леммы 2.1.

Заметим, что градуированный A-модуль P является проективным объектом категории gr.mod-A тогда и только тогда, когда он, рассматриваемый без градуировки, является проективным A-модулем [9, следствие I.2.2].

Лемма 2.2. *Пусть U_A — gr-образующий и $R = \mathrm{END}_A(U)$ — его градуированное кольцо эндоморфизмов. Тогда $\mathrm{HOM}_A(U, A)$ является конечно порождённым проективным правым градуированным R-модулем.*

Доказательство. Согласно лемме 2.1 U_A является gr-образующим в том и только в том случае, если существуют конечные множества градуированных морфизмов $f_1, f_2, \ldots, f_n \in h\big(\mathrm{HOM}_A(U, A)\big)$ и однородных элементов $u_1, u_2, \ldots, u_n \in h(U)$, такие что

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(u_i) = 1. \tag{1}$$

С другой стороны, по лемме о дуальном базисе R-модуль $_RU$ (рассматриваемый без градуировки) конечно порождён и проективен тогда и только тогда, когда существуют конечные множества элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{Hom}_R(U, R)$ и $u_1, u_2, \ldots, u_n \in U$, такие что

$$\sum_{i=1}^{n} (v)\varphi_i u_i = v \tag{2}$$

для любого $v \in U$.

Ясно, что если положить $[u, f]v = uf(v)$ для любых $u, v \in U$, $f \in \mathrm{HOM}_A(U, A)$, то отображение $f \to [\text{-}, f]$ определяет каноническое отображение $\mathrm{HOM}_A(U, A) \to \mathrm{HOM}_R(U, R)$. Таким образом, умножив (1) на v слева, получим, что (2) выполняется для $\varphi_i = [\text{-}, f_i]$. Доказательство леммы завершено. □

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые определения из [4]. Пусть A — кольцо, M_A — правый A-модуль, $\mathrm{End}_A(M)$ — его кольцо эндоморфизмов. Тогда

1) модуль M_A называется *строгим образующим*, если $M = P \oplus H$, где $P \cong A_A$;

2) идемпотент $e \in \mathrm{End}_A(M)$ называется *идемпотентным эндоморфизмом ранга* 1 (обозначение $\mathrm{r}(e) = 1$), если eM — свободный правый A-модуль ранга 1, т. е. $M_A = eM \oplus H$, где $eM \cong A_A$ (в этом случае M_A — строгий образующий);
3) подкольцо R кольца эндоморфизмов $E = \mathrm{End}_A(M)$ строгого образующего модуля M_A называется *обильным*, если оно удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:
   а) существует базис x в eM_A, такой что $Rx = M$;
   б) $Ry = M_A$ для любого базиса y в eM_A;
   в) Re — левый идеал кольца E.

Ясно, что все свободные модули являются строгими образующими и всякий строгий образующий является образующим категории mod-A.

Определение 2.2. Градуированный A-модуль M_A называется строгим gr-образующим, если $M = P \oplus H$, где P и H — градуированные подмодули модуля M, а P — gr-свободный модуль ранга 1.

Заметим, что если градуированный A-модуль M_A является строгим gr-образующим, то он, рассматриваемый без градуировки, является строгим образующим. Ясно также, что если M_A — строгий gr-образующий, то M_A — gr-образующий.

Поскольку модуль $M_A \in \mathrm{gr.mod}\text{-}A$, являющийся свободным A-модулем, не обязательно является gr-свободным A-модулем [9, замечание A.I.2.6], однородный идемпотент $u \in \mathrm{END}_A(M)$ назовём *идемпотентным эндоморфизмом ранга* 1, если uM — gr-свободный модуль ранга 1 (обозначение $\mathrm{gr.r}(u) = 1$).

Заметим, что все однородные идемпотенты принадлежат единичной компоненте, а из определения следует, что если $\mathrm{gr.r}(u) = 1$, то M_A является строгим gr-образующим.

Лемма 2.3. *Пусть A — G-градуированное кольцо, M_A — строгий gr-образующий и $R = \mathrm{END}_A(M)$ — его градуированное кольцо эндоморфизмов. Тогда R — обильное подкольцо в кольце $E = \mathrm{End}_A(M)$.*

Доказательство. Пусть M_A — строгий gr-образующий, т. е. существует однородный идемпотент $u \in R$, такой что uM является gr-свободным модулем ранга 1. Следовательно, существуют $x \in h(uM)$ и градуированный подмодуль $h \in H$ в M_A, такие что $M = xA \oplus H$.

Пусть $m \in h(M)$. Тогда отображение $f_m\colon M \to M$, определённое правилом $f_m(xa + h) = ma$ для всех $a \in A$, $h \in H$, является градуированным морфизмом, степень которого равна $(\deg m)(\deg x)^{-1}$. Таким образом, для любого $m \in h(M)$ существует $f_m \in h(R)$, для которого $f_m(x) = m$. Отсюда следует, что $Rx = M$ и R является обильным подкольцом в кольце $E = \mathrm{End}_A(M)$. □

Определение 2.3 [4]. Пусть ${}_RM_A$ и ${}_SN_B$ — бимодули. Тройка отображений (α, β, γ), где $\alpha\colon R \to S$ и $\gamma\colon A \to B$ — изоморфизмы колец, $\beta\colon M \to N$ — изоморфизм абелевых групп и $(rma)^\beta = r^\alpha m^\beta a^\gamma$ для всех $r \in R$, $m \in M$, $a \in A$, называется полулинейным изоморфизмом бимодулей ${}_RM_A$ и ${}_SN_B$.

Лемма 2.4 [4, лемма 1.7]. *Пусть M_A и N_B — правые модули, $R = \mathrm{End}_A(M)$ и $S = \mathrm{End}_B(N)$ — их кольца эндоморфизмов, (β, γ) — полулинейный изоморфизм модулей M_A и N_B. Тогда существует единственный изоморфизм колец $\alpha\colon R \to S$, такой что (α, β, γ) является полулинейным изоморфизмом бимодулей ${}_RM_A$ и ${}_SN_B$. При этом $r^{\alpha}(n) = \bigl[r\bigl(n^{\beta^{-1}}\bigr)\bigr]^{\beta}$ для всех $n \in N$, $r \in R$.*

Пусть A, B, R и S — кольца, ${}_SN_B$ — бимодуль, $\alpha\colon R \to S$ и $\gamma\colon A \to B$ — изоморфизмы колец. Как и в [4], через $[\alpha, N, \gamma]$ будем обозначать R-A-бимодуль N, в котором $r * n = r^{\alpha}n$ и $n * a = na^{\gamma}$ для всех $r \in R$, $n \in N$, $a \in A$. При $\alpha = \mathrm{id}_R$ получаем правый A-модуль $[N, \gamma]$.

Лемма 2.5. *Пусть M_A — строгий gr-образующий, $R = \mathrm{END}_A(M)$ — его градуированное кольцо эндоморфизмов, $E = \mathrm{End}_A(M)$ — кольцо эндоморфизмов, u — однородный идемпотентный эндоморфизм ранга 1, x — однородный базис в uM_A. Тогда*

1) *отображение $\beta\colon {}_RRu \to {}_RM$, для которого $(yu)^{\beta} = yux$ при $y \in R$, является градуированным изоморфизмом степени $\sigma = \deg x$ левых градуированных R-модулей, т. е. $\beta(Ru)_g = M_{g\sigma}$ для всех $g \in G$;*
2) $\mathrm{End}_E(M) = \mathrm{End}_R(M) = \mathrm{END}_R(M) \approx A$ (*изоморфизм градуированных колец*);
3) *отображение $\gamma\colon uRu \to A$, для которого $m(uyu)^{\gamma} = \bigl(m^{\beta^{-1}}uyu\bigr)^{\beta}$ при $m \in M$, $y \in R$, есть изоморфизм колец, при котором $\gamma(uRu)_g \subseteq A_{\sigma^{-1}g\sigma}$, а тройка отображений $(\mathrm{id}_R, \beta, \gamma)$ является полулинейным изоморфизмом бимодулей ${}_RRu_{uRu}$ и ${}_RM_A$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Поскольку по лемме 2.3 R является обильным подкольцом кольца $E = \mathrm{End}_A(M)$, то по [4, лемма 1.9] имеем, что отображение $\beta\colon Ru \to M$, для которого $(yu)^{\beta} = yux$ при $y \in R$, является изоморфизмом левых E-модулей, а следовательно, и левых R-модулей. Так как при этом $\deg\bigl((ye)^{\beta}\bigr) = \deg(ye)\deg x$ для любого однородного элемента $y \in R$, то β является градуированным изоморфизмом степени $\sigma = \deg x$.

Убедимся в справедливости утверждения 2). Так как кольцо R обильно, из [4, лемма 1.9] получаем изоморфизм колец $\mathrm{End}_R(M) = \mathrm{End}_E(M) \approx A$ при каноническом отображении $\varphi\colon A \to \mathrm{End}({}_EM)$. Но поскольку A является градуированным кольцом и $\mathrm{END}_R(M) \subseteq \mathrm{End}_R(M)$, то $\varphi(A_g) \subseteq \mathrm{END}_R(M)_g$. Таким образом, $\mathrm{END}_R(M) = \mathrm{End}_R(M) \approx A$.

Докажем утверждение 3). Из [4, лемма 1.9] следует, что γ является изоморфизмом колец, при котором тройка $(\mathrm{id}_R, \beta, \gamma)$ является полулинейным изоморфизмом бимодулей ${}_RRu_{uRu}$ и ${}_RM_A$. Но так как $\bigl(m^{\beta^{-1}}uyu\bigr)^{\beta} \in M_{h\sigma^{-1}g\sigma}$ для любых $m \in M_h$, $y \in R_g$, то $\gamma(uRu)_g \subseteq A_{\sigma^{-1}g\sigma}$. □

Известно [7, предложение 2.1], что для любого градуированного A-модуля M кольцо gr-биэндоморфизмов $\mathrm{BIEND}_A(M) = \mathrm{END}_R(M)$ является плотным подкольцом кольца биэндоморфизмов $\mathrm{Biend}_A(M) = \mathrm{End}_E(M)$ в конечной топологии. Из леммы 2.5 следует, что если M является строгим gr-образующим, то $\mathrm{BIEND}_A(M) = \mathrm{Biend}_A(M)$.

Лемма 2.6. *Если M_A — градуированный A-модуль, $R = \mathrm{END}_A(M)$ — его градуированное кольцо эндоморфизмов, $u = u^2$, $v = v^2$ — однородные идемпотенты в R, то uRv и $\mathrm{HOM}_A(vM, uM)$ изоморфны как градуированные uRu-vRv-бимодули. В частности, Rv и $\mathrm{HOM}_A(vM, M)$ изоморфны как градуированные R-vRv-бимодули, а uR и $\mathrm{HOM}_A(M, uM)$ — как градуированные uRu-R-бимодули.*

Доказательство. Пусть $E = \mathrm{End}_A(M)$. Тогда по [4, лемма 1.10] имеем канонический изоморфизм uEu-vEv-бимодулей $uEv \cong \mathrm{Hom}_A(vM, uM)$ для любых $u = u^2$, $v = v^2 \in E$. Так как $R = \mathrm{END}_A(M) \subseteq \mathrm{End}_A(M) = E$ и $u = u^2$, $v = v^2 \in R_e$, ясно, что uRv и $\mathrm{HOM}_A(vM, uM)$ изоморфны как градуированные uRu-vRv-бимодули. □

Лемма 2.7. *Пусть M_A — строгий gr-образующий, $R = \mathrm{END}_A(M)$ — его градуированное кольцо эндоморфизмов, $u = u^2$, $w = w^2 \in h(R)$, причём $\mathrm{gr.r}(u) = 1$. Тогда равносильны следующие условия*:

1) *wM_A — конечно порождённый проективный градуированный A-модуль*;
2) *$(wRu)_{uRu}$ — конечно порождённый проективный градуированный uRu-модуль*;
3) *$wRuRw = wRw$.*

Доказательство. Докажем равносильность условий 1) и 2). В силу леммы 2.5 существует полулинейный изоморфизм $(\mathrm{id}_R, \beta, \gamma)$ бимодулей ${}_R Ru_{uRu}$ и ${}_R M_A$, для которого $\gamma(uRu)_g \subseteq A_{\sigma^{-1} g \sigma}$. Рассмотрим градуированный бимодуль ${}_R P_A = [\mathrm{id}_R, \tau_{\sigma^{-1}}(Ru), \gamma^{-1}]$, где $\tau_{\sigma^{-1}}(Ru)$ — σ^{-1}-сдвиг левого градуированного R-модуля Ru. Тогда для $yu \in Ru$ имеем

$$[(yu) * a]^\beta = \left(yua^{\gamma^{-1}}\right)^\beta = (yu)^\beta a,$$

т. е. β является изоморфизмом градуированных бимодулей ${}_R P_A$ и ${}_R M_A$. Заметим, что при этом $(wRu)^\beta = w(Ru)^\beta = wM$.

Так как $\gamma\colon uRu \to A$ является изоморфизмом колец, то правый uRu-модуль $(wRu)_{uRu}$ конечно порождён и проективен тогда и только тогда, когда wM_A — конечно порождённый проективный A-модуль.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть выполнено условие 2). В силу леммы 2.5 существует полулинейный изоморфизм $(\mathrm{id}_R, \beta, \gamma)$ градуированных бимодулей ${}_R Q_{uRu}$ и ${}_R M_A$, где $Q = \tau_{\sigma^{-1}}(Ru)$ — σ^{-1}-сдвиг левого градуированного R-модуля Ru. Из леммы 2.6 получим

$$wRw \cong \mathrm{END}_A(wM) \cong \mathrm{END}_{uRu}(wQ) = \mathrm{END}_{uRu}(wRu),$$
$$uRw \cong \mathrm{HOM}_A(wM, uM) \cong \mathrm{HOM}_{uRu}(wQ, uQ) = \mathrm{HOM}_{uRu}(wRu, uRu).$$

Так как $(wRu)_{uRu}$ — конечно порождённый проективный градуированный uRu-модуль, то существует конечный дуальный базис

$$\{y_i \in uRw,\ x_i \in wRu \mid i = 1, \ldots, n\},$$

для которого $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i(y_i z) = z$ для всех $z \in wRu$. Отсюда $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i y_i)z = z$, или $\Bigl(w - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\Bigr)z = 0$ для всех $z \in wRu$. Следовательно, $w - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \in wRw = \mathrm{END}_{uRu}(wRu)$, поэтому $w = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \in wRuRw$. Таким образом, $wRuRw = wRw$.

Убедимся, что справедлива импликация 3) $\Longrightarrow$ 2). Пусть выполнено условие 3). Тогда $w = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ для некоторых $x_1, \ldots, x_n \in wRu$, $y_1, \ldots, y_n \in uRw$. Ясно, что

$$z = wz = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) z = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i z)$$

для всех $z \in wRu$. Поскольку $uRw \cong \mathrm{HOM}_{uRu}(wRu, uRu)$, то

$$\{y_i \in uRw,\ x_i \in wRu \mid i = 1, \ldots, n\} —$$

конечный дуальный базис правого uRu-модуля $(wRu)_{uRu}$, т. е. $(wRu)_{uRu}$ — конечно порождённый проективный uRu-модуль. □

Следствие 2.1. *Пусть M_A — строгий gr-образующий, $R = \mathrm{END}_A(M)$ — его градуированное кольцо эндоморфизмов, $0 \neq w = w^2 \in h(R)$. Тогда равносильны следующие условия*:

1) *wM — конечно порождённый проективный градуированный A-модуль*;
2) *существует идемпотент $u = u^2 \in h(R)$, $\mathrm{gr.r}(u) = 1$, такой что $(wRu)_{uRu}$ — конечно порождённый проективный градуированный uRu-модуль*;

2′) *для всякого идемпотента $u = u^2 \in h(R)$, $\mathrm{gr.r}(u) = 1$, градуированный uRu-модуль $(wRu)_{uRu}$ конечно порождён и проективен*;

3) *существует идемпотент $u = u^2 \in h(R)$, $\mathrm{gr.r}(u) = 1$, такой что $wRuRw = wRw$*;

3′) *$wRuRw = wRw$ для всякого идемпотента $u = u^2 \in h(R)$, $\mathrm{gr.r}(u) = 1$.*

3. Теоремы об изоморфизмах градуированных колец эндоморфизмов

Из леммы 2.1 и [1, теорема 1] следует, что если U_A — gr-образующий A-модуль и $B = \mathrm{END}_A(U)$, то функтор $\mathrm{HOM}_A(U, \text{-})\colon \text{gr.mod-}A \to \text{gr.mod-}B$ является вполне унивалентным и существует естественная эквивалентность функторов

$$\mathrm{HOM}_A(U, \text{-}) \otimes_B U \simeq 1_{\text{gr.mod-}A}.$$

Если же U_A — конечно порождённый проективный gr-образующий A-модуль, то функтор $\mathrm{HOM}_A(U, \text{-})$ является градуированной эквивалентностью категорий gr.mod-A и gr-$\mathrm{END}_A(U)$ [1, теорема 3].

Определение 3.1. Пусть A и B — градуированные кольца, M_A и N_B — правые градуированные модули, $R = \mathrm{END}_A(M)$ и $S = \mathrm{END}_B(N)$ — их градуированные кольца эндоморфизмов, $\alpha\colon R \to S$ — изоморфизм градуированных колец. Будем говорить, что изоморфизм α индуцируется gr-образующим A-модулем U_A, если

1) $B = \mathrm{END}_A(U)$;
2) существует изоморфизм градуированных B-модулей $\sigma\colon \mathrm{HOM}_A(U, M) \to N$, такой что $[\mathrm{HOM}_A(U, r)(x)]^\sigma = r^\alpha x^\sigma$ для всех $x \in \mathrm{HOM}_A(U, M)$, $r \in R$.

Теорема 3.1. *Пусть A и B — G-градуированные кольца, M_A и N_B — строгие gr-образующие, $R = \mathrm{END}_A(M)$ и $S = \mathrm{END}_B(N)$ — их градуированные кольца эндоморфизмов, $\alpha\colon R \to S$ — изоморфизм градуированных колец. Тогда следующие условия равносильны*:

1) *для любого идемпотентного эндоморфизма $u = u^2 \in h(R)$ ранга 1 градуированный B-модуль $u^\alpha N$ конечно порождён и проективен*;
2) *для любых идемпотентных эндоморфизмов $u = u^2 \in h(R)$ и $w = w^2 \in h(S)$, ранги которых равны 1, выполнено равенство $u^\alpha SwSu^\alpha = u^\alpha Su^\alpha$*;
3) *для любого идемпотентного эндоморфизма $w = w^2 \in h(S)$ ранга 1 градуированный A-модуль $w^{\alpha^{-1}}M$ является gr-образующим*;
4) *существует идемпотентный эндоморфизм $u = u^2 \in h(R)$ ранга 1, такой что $u^\alpha N$ — конечно порождённый проективный градуированный B-модуль*;
5) *существуют идемпотентные эндоморфизмы $u = u^2 \in h(R)$ и $w = w^2 \in h(S)$, ранги которых равны 1, такие что $u^\alpha SwSu^\alpha = u^\alpha Su^\alpha$*;
6) *существует идемпотентный эндоморфизм $w = w^2 \in h(S)$ ранга 1, такой что $w^{\alpha^{-1}}M$ является gr-образующим A-модулем*;
7) *существует gr-образующий правый A-модуль U_A, индуцирующий изоморфизм α.*

Доказательство. Из леммы 2.7 следует, что 1) $\Longleftrightarrow$ 2) и 4) $\Longleftrightarrow$ 5).

Докажем эквивалентность 2) $\Longleftrightarrow$ 3). Пусть $u = u^2 \in h(R)$, $w = w^2 \in h(S)$ и $\mathrm{gr.r}(u) = \mathrm{gr.r}(w) = 1$, обозначим $v = w^{\alpha^{-1}}$. В силу леммы 2.1 градуированный A-модуль vM является gr-образующим тогда и только тогда, когда vM является образующим A-модулем. Согласно лемме 2.5 существует полулинейный изоморфизм $(\mathrm{id}_R, \beta, \gamma)$ бимодулей ${}_R Ru_{uRu}$ и ${}_R M_A$. Отображение β индуцирует изоморфизм A-модулей $[vRu, \gamma^{-1}]_A$ и vM_A (см. доказательство леммы 2.7). Таким образом, vM_A является образующим A-модулем в том и только в-том случае, когда $[vRu, \gamma^{-1}]_A$ является образующим A-модулем. Так как γ — изоморфизм колец uRu и A, то $[vRu, \gamma^{-1}]_A$ является образующим A-модулем в том и только в-том случае, когда vRu является образующим uRu-модулем, что эквивалентно равенству $\mathrm{tr}_{uRu}(vRu) = \mathrm{gr.tr}_{uRu}(vRu) = uRu$. В силу лемм 2.6 и 2.7 последнее равенство эквивалентно равенству $uRvRu = uRu$. Поскольку α — изоморфизм градуированных колец и $w = v^\alpha$, равенства $uRvRu = uRu$ и $u^\alpha SwSu^\alpha = u^\alpha Su^\alpha$ равносильны.

Аналогично проверяется эквивалентность 5) $\Longleftrightarrow$ 6).

Импликация 1) $\Longrightarrow$ 4) очевидна.

Докажем импликацию 6) $\Longrightarrow$ 7). Пусть выполнено условие 6) и $v = w^{\alpha^{-1}}$. Так как $\mathrm{gr.r}(w) = 1$, то существует полулинейный изоморфизм $(\mathrm{id}_S, \delta, \varepsilon)$ бимодулей ${}_S Sw_{wSw}$ и ${}_S N_B$, такой что $\varepsilon\big((wSw)_g\big) \subseteq B_{\sigma^{-1}g\sigma}$ и $\delta\big((Sw)_h\big) \subseteq N_{h\sigma}$ для некоторого $\sigma \in G$ (см. лемму 2.5).

Положим $\xi = \varepsilon^{-1}\alpha^{-1}$. Тогда $\xi\colon B \to vRv$ — изоморфизм колец и $\xi(B_g) = (vRv)_{\sigma g \sigma^{-1}}$.

Определим бимодуль ${}_B U_A$, беря в качестве U_A A-модуль vM_A, рассматриваемый с градуировкой $U_g = (vM)_{\sigma g}$, а умножение на элементы кольца B осуществляя по правилу $b \circ y = b^{\xi} y$ для любых $b \in B$, $y \in U$. Легко убедиться, что ${}_B U_A$ является G-градуированным B-A-бимодулем. Поскольку $U_A = \tau_\sigma(vM) = vM(\sigma)$ и $\mathrm{END}_A(vM) = vRv$, по лемме 1.1 получим $\mathrm{END}_A(U) = B$.

Из леммы 2.6 следует, что $\mathrm{HOM}_A(vM, M) = Rv$. Из того, что

$$\mathrm{HOM}_A(U, M)_h = \mathrm{HOM}_A(\tau_\sigma(vM), M)_h = \mathrm{HOM}_A(vM, M)_{h\sigma^{-1}},$$

получим, что градуированный B-модуль $\mathrm{HOM}_A(U, M)$ можно отождествить с модулем $\tau_{\sigma^{-1}}(Rv)$, если умножение на элементы кольца B определить по правилу $y \circ b = y b^{\xi}$, т. е. $\mathrm{HOM}_A(U, M) = [\tau_{\sigma^{-1}}(Rv), \xi]_B$.

Обозначим через χ композицию изоморфизмов абелевых групп

$$Ru \xrightarrow{\alpha} Su \xrightarrow{\delta} N$$

и покажем, что $\chi = \alpha\delta$ — изоморфизм B-модулей. Действительно, если $y \in Rv$, $b \in B$, то

$$(y * b)^{\chi} = (y b^{\xi})^{\chi} = (y b^{\varepsilon^{-1}\alpha^{-1}})^{\chi} = \\ = \Big[\big(y\big(b^{\varepsilon^{-1}}\big)^{\alpha^{-1}}\big)^{\alpha}\Big]^{\delta} = \big[y^{\alpha} b^{\varepsilon^{-1}}\big]^{\delta} = \big[y^{\alpha}\delta b^{\varepsilon^{-1}}\big]^{\varepsilon} = y^{\chi} b.$$

Поскольку при этом $\big((Rv)_h\big)^{\chi} \subseteq N_{h\sigma}$, то χ является изоморфизмом левых градуированных B-модулей $\mathrm{HOM}_A(U, M)$ и N.

Из леммы 2.6 следует, что каноническое вложение $Rv \to \mathrm{HOM}_A(vM, M)$ является вложением R-модулей. Поэтому $\mathrm{HOM}_A(U, r)x = rx$ для всех $x \in Rv$, $r \in R$. Следовательно,

$$(\mathrm{HOM}_A(U, r)x)^{\chi} = (rx)^{\chi} = [(rx)^{\alpha}]^{\delta} = [r^{\alpha} x^{\alpha}]^{\delta} = r^{\alpha}(x^{\alpha})^{\delta} = r^{\alpha} x^{\chi}.$$

Таким образом, градуированный A-модуль U_A индуцирует изоморфизм α.

Докажем импликацию 7) $\Longrightarrow$ 1). Пусть выполнено условие 7), т. е. существует gr-образующий A-модуль U_A, индуцирующий изоморфизм α, и $\chi\colon \mathrm{HOM}_A(U, M) \to N$ — такой изоморфизм градуированных B-модулей, что $(\mathrm{HOM}_A(U, r)x)^{\chi} = r^{\alpha} x^{\chi}$ для всех $r \in R$, $x \in \mathrm{HOM}_A(U, M)$.

Так как M_A — строгий gr-образующий, то существует идемпотент $u = u^2 \in h(R)$, такой что $uM_A = A(\sigma)$ для некоторого $\sigma \in G$. Используя соотношения

$$\mathrm{HOM}_A(U, uM) = \mathrm{HOM}_A\big(U, A(\sigma)\big) = \tau_\sigma\big(\mathrm{HOM}_A(U, A)\big)$$

и лемму 2.2, получаем, что $\mathrm{HOM}_A(U, uM)$ — конечно порождённый проективный правый градуированный B-модуль. Тогда

$$(u^{\alpha}N)^{\chi^{-1}} = \mathrm{HOM}_A(U, u)\,\mathrm{HOM}_A(U, M) = \mathrm{HOM}_A(U, uM).$$

Таким образом, $u^{\alpha}N$ — конечно порождённый проективный правый градуированный B-модуль. □

Подобно неградуированному случаю градуированный модуль будем называть *gr-прообразующим*, если он является конечно порождённый проективным gr-образующим.

Следствие 3.1. *Пусть M_A — gr-образующий правый A-модуль, N_B — gr-прообразующий правый B-модуль, $\alpha\colon \mathrm{END}_A(M) \to \mathrm{END}_B(N)$ — изоморфизм градуированных колец эндоморфизмов. Тогда существует gr-образующий правый A-модуль U_A, индуцирующий изоморфизм α.*

Доказательство. Так как M_A является gr-образующим A-модулем, то в силу леммы 2.1 существует эпиморфизм правых градуированных A-модулей $f\colon \bigoplus_{i=1}^{k} M(g_i) \to A$ для некоторых $g_1, g_2, \ldots, g_k \in G$. Следовательно, существуют такие $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in G$, причём $\sigma_1 = e$, что модули $\tilde{M} = \bigoplus_{i=1}^{n} M(\sigma_i)$ и $\tilde{N} = \bigoplus_{i=1}^{n} N(\sigma_i)$ — строгие gr-образующие.

Ясно, что при этом

$$\tilde{R} = \mathrm{END}_A(\tilde{M}) = M_n(R)(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \quad \tilde{S} = \mathrm{END}_A(\tilde{N}) = M_n(S)(\sigma_1, \ldots, \sigma_n),$$

где через $M_n(R)(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ обозначается градуированное кольцо матриц над градуированным кольцом R (см. [9]). Следовательно, α индуцирует изоморфизм градуированных колец $\tilde{\alpha}\colon \tilde{R} \to \tilde{S}$. Тогда, поскольку $u^{\tilde{\alpha}}\tilde{N}$ — конечно порождённый проективный B-модуль, в силу теоремы 3.1 существует gr-образующий правый A-модуль U_A, индуцирующий изоморфизм $\tilde{\alpha}$, т. е. $B = \mathrm{END}_A(U)$, $\chi\colon \mathrm{HOM}_A(U, \tilde{M}) \to \tilde{N}$ — изоморфизм градуированных B-модулей и $\chi\,\mathrm{HOM}_A(U, \text{-})\chi^{-1} = \tilde{\alpha}$. Но тогда

$$\begin{aligned}\mathrm{HOM}_A(U, M) &= \mathrm{HOM}_A(U, E_{11}\tilde{M}) = \mathrm{HOM}_A(U, E_{11})\,\mathrm{HOM}_A(U, \tilde{M}) = \\ &= \chi^{-1}\tilde{\alpha}(E_{11})\chi\,\mathrm{HOM}_A(U, \tilde{M}) = \chi^{-1}E_{11}\tilde{N} = \chi^{-1}N\end{aligned}$$

(здесь E_{11} обозначает матричную единицу). Поэтому $\chi\colon \mathrm{HOM}_A(U, M) \to N$ также является изоморфизмом градуированных модулей и для всех $r \in R$, $x \in \mathrm{HOM}_A(U, M) = \mathrm{HOM}_A(U, E_{11}\tilde{M})$ имеют место соотношения

$$(\mathrm{HOM}_A(U, r)x)^{\chi} = (\mathrm{HOM}_A(U, E_{11}r)x)^{\chi} = (rE_{11})^{\tilde{\alpha}}x^{\chi} = r^{\alpha}E_{11}x^{\chi} = r^{\alpha}x^{\chi}.$$

Итак, gr-образующий правый A-модуль U_A индуцирует изоморфизм α. □

Теорема 3.2. *Пусть A и B — G-градуированные кольца, M_A и N_B — строгие gr-образующие, $R = \mathrm{END}_A(M)$ и $S = \mathrm{END}_B(N)$ — их градуированные кольца эндоморфизмов, $\alpha\colon R \to S$ — изоморфизм градуированных колец. Тогда равносильны следующие условия*:

1) *если* $u = u^2 \in h(R)$, $\mathrm{gr.r}(u) = 1$, *то* $u^\alpha N_B$ — *gr-прообразующий* B*-модуль*;
2) *если* $u = u^2 \in h(R)$, $\mathrm{gr.r}(u) = 1$, *и* $w = w^2 \in h(S)$, $\mathrm{gr.r}(w) = 1$, *то* $u^\alpha N_B$ *и* $w^{\alpha^{-1}} M_A$ — *конечно порождённые проективные градуированные правые модули*;
3) *если* $u = u^2 \in h(R)$, $\mathrm{gr.r}(u) = 1$, *и* $w = w^2 \in h(S)$, $\mathrm{gr.r}(w) = 1$, *то* $u^\alpha N_B$ *и* $w^{\alpha^{-1}} M_A$ — *gr-образующие модули*;
4) *существует идемпотентный эндоморфизм* $u = u^2 \in h(R)$, $\mathrm{gr.r}(u) = 1$, *такой что* $u^\alpha N_B$ — *gr-прообразующий правый* B*-модуль*;
5) *существуют идемпотентные эндоморфизмы* $u = u^2 \in h(R)$, $\mathrm{gr.r}(u) = 1$, *и* $w = w^2 \in h(S)$, $\mathrm{gr.r}(w) = 1$, *такие что* $u^\alpha N_B$ *и* $w^{\alpha^{-1}} M_A$ — *конечно порождённые проективные градуированные модули*;
6) *существуют идемпотентные эндоморфизмы* $u = u^2 \in h(R)$, $\mathrm{gr.r}(u) = 1$, *и* $w = w^2 \in h(S)$, $\mathrm{gr.r}(w) = 1$, *такие что* $u^\alpha N_B$ *и* $w^{\alpha^{-1}} M_A$ — *gr-образующие проективные модули*;
7) *существует градуированная эквивалентность* $T\colon \mathrm{gr.mod}\text{-}A \to \mathrm{gr.mod}\text{-}B$, *такая что* $T(M) = N$ *и* $T(r)x = r^\alpha x$ *для всех* $x \in N$, $r \in R$.

Доказательство. Докажем эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 2). Условие 1) о том, что $u^\alpha N_B$ — конечно порождённый проективный gr-образующий B-модуль для всех $u = u^2 \in h(R)$, $\mathrm{gr.r}(u) = 1$, по теореме 3.1 для α^{-1} (эквивалентность 3) $\Longleftrightarrow$ 1)) равносильно тому, что $w^{\alpha^{-1}} M_A$ — конечно порождённый проективный модуль для всех $w = w^2 \in h(S)$, $\mathrm{gr.r}(w) = 1$, т. е. условию 2).

Докажем эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 3). Условие 1) о том, что $u^\alpha N_B$ — конечно порождённый проективный gr-образующий B-модуль для всех $u = u^2 \in h(R)$, $\mathrm{gr.r}(u) = 1$, по теореме 3.1 (эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 3)) равносильно тому, что $w^{\alpha^{-1}} M_A$ — gr-образующий для всех $w = w^2 \in h(S)$, $\mathrm{gr.r}(w) = 1$, т. е. условию 3).

Аналогично проверяются эквивалентности 4) $\Longleftrightarrow$ 5), 4) $\Longleftrightarrow$ 6).

Убедимся, что справедлива эквивалентность 3) $\Longleftrightarrow$ 6). Условие, что модуль $u^\alpha N_B$ — gr-образующий для всех $u = u^2 \in h(R)$, $\mathrm{gr.r}(u) = 1$, по теореме 3.1 для α^{-1} (эквивалентность 3) $\Longleftrightarrow$ 6)) равносильно тому, что существует $u = u^2 \in h(R)$, $\mathrm{gr.r}(u) = 1$, для которого модуль $u^\alpha N_B$ — gr-образующий. Аналогичные рассуждения проводятся для $w^{\alpha^{-1}} M_A$.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 7). Из условия 3) и равносильного ему условия 2) следует, что $w^{\alpha^{-1}} M_A$ является конечно порождённым проективным gr-образующим A модулем. По пункту 7) теоремы 3.1 изоморфизм α индуцируется градуированным A-модулем $U_A = \tau_\sigma(w^{\alpha^{-1}} M) = w^{\alpha^{-1}} M(\sigma)$, который также является gr-прообразующим. Следовательно, функтор

$$T = \mathrm{HOM}_A(U, \text{-})\colon \mathrm{gr.mod}\text{-}A \to \mathrm{gr.mod}\text{-}B$$

является градуированной эквивалентностью.

Наконец, докажем импликацию 7) $\Longrightarrow$ 1). Пусть изоморфизм α индуцируется конечно порождённым проективным gr-образующим U_A, и пусть $\chi\colon \mathrm{HOM}_A(U, M) \to N$ — такой изоморфизм градуированных B-модулей, что

$(\mathrm{HOM}_A(U,r)x)^\chi = r^\alpha x^\chi$ для всех $r\in R$, $x\in \mathrm{HOM}_A(U,M)$. Тогда по пункту 1) теоремы 3.1 $u^\alpha N_B$ — конечно порождённый проективный B-модуль. Поскольку $u^\alpha N \cong \mathrm{HOM}_A(U,uM)$ и uM_A — gr-свободный A-модуль ранга 1 для всякого $u=u^2\in h(R)$, $\mathrm{gr.r}(u)=1$, то $u^\alpha N_B$ является gr-образующим. □

Следствие 3.2 [3]. *Пусть M_A и N_B — gr-прообразующие правые модули, $\alpha\colon \mathrm{END}_A(M)\to \mathrm{END}_B(N)$ — изоморфизм градуированных колец эндоморфизмов. Тогда существует градуированная эквивалентность категорий*

$$T\colon \mathrm{gr.mod}\text{-}A\to \mathrm{gr.mod}\text{-}B,$$

такая что $T(M)=N$ и $N(r)x=r^\alpha x$ для всех $r\in \mathrm{END}_A(M)$, $x\in N$.

Доказательство. По следствию 3.1 изоморфизм α индуцируется gr-образующим

$$U_A=\tau_\sigma\big(w^{\alpha^{-1}}\tilde M\big)=w^{\alpha^{-1}}\tilde M(\sigma).$$

Поскольку модуль $w^{\alpha^{-1}}\tilde M$ является прямым слагаемым в модуле $\tilde M=\bigoplus\limits_{i=1}^{n} M(\sigma_i)$, то $w^{\alpha^{-1}}\tilde M$ является конечно порождённым проективным градуированным A-модулем, а следовательно, таковым является и U_A, т. е.

$$\mathrm{HOM}_A(U,\text{-})\colon \mathrm{gr.mod}\text{-}A\to \mathrm{gr.mod}\text{-}B\,—$$

градуированная эквивалентность. □

Теорема 3.3. *Пусть A и B — G-градуированные кольца, M_A и N_B — строгие gr-образующие, $R=\mathrm{END}_A(M)$ и $S=\mathrm{END}_B(N)$ — их градуированные кольца эндоморфизмов, $\alpha\colon R\to S$ — изоморфизм градуированных колец. Тогда равносильны следующие условия:*

1) *если $u=u^2\in h(R)$ и $\mathrm{gr.r}(u)=1$, то $\mathrm{gr.r}(u^\alpha)=1$;*
2) *существует идемпотентный эндоморфизм $u=u^2\in h(R)$, такой что $\mathrm{gr.r}(u)=\mathrm{gr.r}(u^\alpha)=1$;*
3) *существуют элемент $\sigma\in G$ и полулинейный изоморфизм (β,γ) модулей M_A и N_B, такой что $\beta(M_g)\subset N_{g\sigma}$, $\gamma(A_g)\subseteq B_{\sigma^{-1}g\sigma}$ и (β,γ) индуцирует изоморфизм α, т. е. $r^\alpha=\beta r\beta^{-1}$.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) очевидна.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Положим $v=u^\alpha$. Из леммы 2.5 следует, что существуют полулинейные изоморфизмы бимодулей

$$(\mathrm{id}_R,\beta_1,\gamma_1)\colon {}_RRu_{uRu}\to {}_RM_A,\quad \beta_1(Ru)_g\subseteq M_{g\varsigma},\quad \gamma_1(uRu)_h\subseteq A_{\varsigma^{-1}h\varsigma},$$
$$(\mathrm{id}_S,\beta_2,\gamma_2)\colon {}_SSv_{vSv}\to {}_SN_B,\quad \beta_2(Sw)_g\subseteq N_{g\tau},\quad \gamma_2(wSw)_h\subseteq B_{\tau^{-1}h\tau}$$

для некоторых $\varsigma,\tau\in G$. Тогда пара отображений $(\beta=\beta_2\alpha\beta_1^{-1},\ \gamma=\gamma_2\alpha\gamma_1^{-1})$ является полулинейным изоморфизмом модулей M_A и N_B, который индуцирует изоморфизм α, причём $\beta(M_g)\subseteq N_{g\varsigma^{-1}\tau}$, $\gamma(A_h)\subseteq B_{\tau^{-1}\varsigma h\varsigma^{-1}\tau}$.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть существует полулинейный изоморфизм (β,γ) модулей M_A и N_B, такой что $\beta(M_g)\subset N_{g\sigma}$, $\gamma(A_g)\subseteq B_{\sigma^{-1}g\sigma}$ и (β,γ)

индуцирует изоморфизм α, т. е. $(rma)^\beta = r^\alpha m^\beta a^\gamma$ для всех $r \in R$, $m \in M$, $a \in A$ (лемма 2.4). Тогда, поскольку $M_A = uM \oplus H$, где $uM \approx A(g) = xA$, $\deg x = g$, имеем $u^\alpha N = (uM)^\beta = (xA)^\beta = x^\beta B$. Следовательно, $xa = 0$ тогда и только тогда, когда $x^\beta a^\gamma = (xa)^\beta = 0$. Таким образом, поскольку $x^\beta \in N_{g\sigma}$, имеет место изоморфизм градуированных модулей $u^\alpha N \approx B(g\sigma)$, т. е. $\mathrm{gr.r}(u^\alpha) = 1$. $\square$

Литература

[1] Балаба И. Н. Эквивалентности Мориты категорий градуированных модулей // Успехи мат. наук. — 1987. — Т. 42, № 3 (255). — С. 177—178.

[2] Балаба И. Н. Изоморфизмы градуированных колец линейных преобразований градуированных векторных пространств // Чебышёвский сб. — 2005. — Т. 6, вып. 4. — С. 6—23.

[3] Балаба И. Н. Изоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов прообразующих // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 1. — С. 3—10.

[4] Михалёв А. В. Изоморфизмы колец эндоморфизмов модулей, близких к свободным // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1989. — № 2. — С. 20—27.

[5] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. I. — М.: Мир, 1977.

[6] Dade E. C. Group-graded rings and modules // Math. Z. — 1980. — Vol. 74, no. 3. — P. 241—262.

[7] Gomez Pardo J. L., Năstăsescu C. Topological aspects of graded rings // Commun. Algebra. — 1993. — Vol. 21, no. 12. — P. 4481—4493.

[8] Năstăsescu C. Some construction over graded rings. Application // J. Algebra. — 1989. — Vol. 120. — P. 119—138.

[9] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. Graded Ring Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1982.

[10] Racine M. L. Primitive superalgebras with superinvolution // J. Algebra. — 1998. — Vol. 206. — P. 588—614.