Проблемы бернсайдовского типа, теоремы о высоте и о независимости

А. Я. БЕЛОВ
Московский институт открытого образования,
Еврейский университет, Иерусалим
e-mail: akanel@mail.ru

УДК 512.552.4+512.554.32+512.664.2

Ключевые слова: PI-алгебра, теорема Ширшова о высоте, мономиальная алгебра, кольцо, полиномиальное тождество, проблемы бернсайдовского типа, проблема Куроша, базис Грёбнера, нормальные формы, представления.

Аннотация

Обзор посвящён вопросам, относящимся к изучению базисов PI-алгебр. В центре внимания — обобщение и уточнение теоремы Ширшова о высоте, гипотезы Амицура—Шестакова и теоремы о независимости. Главной мотивировкой при создании данной работы явилось то обстоятельство, что изучаемые вопросы проливают свет на параллелизм между объектами, изучаемыми в структурной теории, и конструктивными комбинаторными рассуждениями «на микроуровне», которые связаны с соотношениями в алгебрах и непосредственными вычислениями. Теоремы о высоте и о независимости, а также теория представлений мономиальных алгебр оказываются тесно связанными, с одной стороны, с комбинаторикой слов и нормальных форм, а с другой — со свойствами первичных ассоциативных алгебр и комбинаторикой матричных единиц. Другим мотивом послужила попытка создания своего рода наброска «операционного исчисления» на операторах, связанных с записями преобразований.

Abstract

A. Ya. Belov, Burnside-type problems, theorems on height, and independence, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 5, pp. 19—79.

This review paper is devoted to some questions related to investigations of bases in PI-algebras. The central point is generalization and refinement of the Shirshov height theorem, of the Amitsur–Shestakov hypothesis and of the independence theorem. The paper is mainly inspired by the fact that these topics shed some light on the analogy between structure theory and constructive combinatorial reasoning related to the “microlevel,” to relations in algebras and straightforward calculations. Together with the representation theory of monomial algebras, height and independence theorems are closely connected with combinatorics of words and of normal forms, as well as with properties of primary algebras and with combinatorics of matrix units. Another subject of this paper is an attempt to create a kind of symbolic calculus of operators defined on records of transformations.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 5, с. 19—79.

1. Введение

Структурная теория, развитая в работах Ш. Амицура, И. Капланского и др., позволила решить ряд классических проблем и служит основой для дальнейших исследований. Обычная схема структурных рассуждений состояла в исследовании полупростой части (матриц над телами) и редукции к полупростой ситуации путём факторизации по радикалу.

Несмотря на свою эффективность, рассуждения такого рода не являются конструктивными. А главное — доказательства, которые получаются с помощью структурной теории, не дают понимания происходящего «на микроуровне», т. е. на уровне слов и соотношений между ними. Поэтому структурная теория из-за своей эффективности оказала тормозящее действие на развитие комбинаторных методов, пусть более трудоёмких, зато конструктивных. В результате многие факты, имеющие фундаментальное значение и для самой структурной теории, не получили непосредственного комбинаторного доказательства, не говоря уже о сколь-нибудь разумных оценках. Всё это вызывает проблемы при обобщениях.

Вместе с тем структурные и комбинаторные рассуждения часто оказываются параллельными, и чтобы понять такой параллелизм, нужно иметь задачи, при исследовании которых будут добыты необходимые идеи. Для этой цели очень важны проблемы бернсайдовского типа, кстати сыгравшие важную роль и при создании самой структурной теории. Благодаря гипотезам И. П. Шестакова и Ш. Амицура мы стали лучше понимать, как отражается структура матричных единиц на комбинаторике слов.

Теоремы о высоте и о независимости, а также теория представлений мономиальных алгебр оказываются тесно связанными, с одной стороны, с комбинаторикой слов и нормальных форм, а с другой — со свойствами первичных ассоциативных алгебр и комбинаторикой матричных единиц.

Первым чисто комбинаторным результатом такого рода явилась следующая теорема.

Теорема Ширшова о высоте. *Пусть A — конечно порождённая PI-алгебра. Тогда существует конечный набор элементов Y и число $H \in \mathbb{N}$, такие что A линейно представима (т. е. порождается линейными комбинациями) множеством элементов вида*

$$v_1^{k_1} v_2^{k_2} \ldots v_h^{k_h}, \quad \text{где} \quad h \leqslant H, \quad v_i \in Y.$$

В качестве Y можно взять набор слов степени не выше m.

Такое Y называется *базисом Ширшова* алгебры A.

Из этой теоремы вытекает положительное решение проблемы Куроша и других проблем бернсайдовского типа для PI-колец. Ведь если Y — базис Ширшова и все элементы из Y алгебраичны, то алгебра A конечномерна. Тем самым теорема Ширшова даёт явное указание множества элементов, алгебраичность которых ведёт к конечномерности всей алгебры.

Следствие 1.1. *Если A — PI-алгебра степени m и все слова от образующих A степени не выше m алгебраичны, то A локально конечна.* □

Из теоремы о высоте вытекает и другое следствие.

Следствие 1.2 ([41]). *Пусть A — конечно порождённая PI-алгебра. Тогда* $\mathrm{GKdim}(A) < \infty$. □

$\mathrm{GKdim}(A)$ — это *размерность Гельфанда—Кириллова алгебры A*,

$$\mathrm{GKdim}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln V_A(n)}{\ln(n)},$$

где $V_A(n)$ есть *функция роста алгебры A*, т. е. размерность векторного пространства, порождённого словами степени не выше n от образующих алгебры A.

Для доказательства следствия достаточно заметить, что число решений неравенства $k_1|v_1| + \ldots + k_h|v_h| \leqslant n$, где $h \leqslant H$, не превосходит N^H, и потому $\mathrm{GKdim}(A) \leqslant h(A)$.

Итак, из теоремы о высоте получаются разнообразные следствия. Чуть ниже мы обсудим вопросы, связанные с обращением этих импликаций, а пока введём несколько обозначений и понятий.

Число $m = \deg(A)$ будет обозначать *степень алгебры*, или минимальную степень тождества, которое в ней выполняется; $n = \mathrm{PIdeg}(A)$ есть *сложность* алгебры A, или максимальное k, такое что $\mathbb{M}_k$ — алгебра матриц размера k — принадлежит многообразию $\mathrm{Var}(A)$, порождённому алгеброй A.

Вместо понятия *высоты* удобнее пользоваться близким понятием *существенной высоты*.

Определение 1.3. Алгебра A имеет *существенную высоту* h над конечным множеством Y, называемым *s-базисом*, если можно выбрать такое конечное множество $D \subset A$, что A линейно представима элементами вида $t_1 \cdot \ldots \cdot t_l$, где $l \leqslant 2h+1$ и для любого i либо $t_i \in D$, либо $t_i = y_i^{k_i}$, $y_i \in Y$, причём множество таких i, что $t_i \notin D$, содержит не более h элементов.

Говоря неформально, любое длинное слово есть произведение периодических частей и «прокладок» ограниченной длины. Существенная высота есть число таких периодических кусков, а обычная ещё учитывает «прокладки».

В связи с теоремой о высоте возникли следующие вопросы.

1. На какие классы колец можно распространить теорему о высоте?
2. Над какими Y алгебра A имеет ограниченную высоту?

Вернёмся к ассоциативному случаю.

3. Как оценить высоту?
4. Как устроен вектор степеней $(k_1, \ldots, k_h)$? Прежде всего, какие множества компонент этого вектора являются существенными, т. е. какие наборы величин k_i могут быть одновременно неограниченными? Чему равна существенная высота?

5. Вопрос о более тонком устройстве множества векторов степеней. Верно ли, что оно обладает теми или иными свойствами регулярности?

И наконец, тот круг вопросов, которому посвящена данная работа.

6. Какие наборы слов можно взять в качестве $\{v_i\}$?

Перейдём к обсуждению поставленных вопросов.

Неассоциативные обобщения

Теорема о высоте была распространена на некоторые классы колец, близкие к ассоциативным. С. В. Пчелинцев [20] доказал её для альтернативного случая и случая $(-1,1)$, С. П. Мищенко [19] получил аналог теоремы о высоте для алгебр Ли с разреженным тождеством. В [2] теорема о высоте была доказана для некоторого класса колец, асимптотически близкого к ассоциативным, куда входят, в частности, альтернативные и йордановы PI-алгебры.

Базисы Ширшова

Пусть A — некоторая PI-алгебра и подмножество $M \subseteq A$ является её s-базисом. Тогда если все элементы множества M алгебраичны над K, то алгебра A конечномерна (проблема Куроша). Ограниченность существенной высоты над Y влечёт положительное решение проблемы Куроша над Y. Обратное утверждение значительно менее тривиально.

Теорема 1.4 (А. Я. Белов). *Пусть A — градуированная PI-алгебра, Y — конечное множество однородных элементов. Тогда если при всех n алгебра $A/Y^{(n)}$ нильпотентна, то Y есть s-базис для A. Если при этом Y порождает A как алгебру, то Y — базис Ширшова алгебры A.* □

В формулировке теоремы $Y^{(n)}$ обозначает идеал, порождённый n-ми степенями элементов из Y.

Как показывает следующий пример, непосредственное обращение проблемы Куроша для неградуированного случая не имеет положительного решения. Пусть $A = \mathbb{Q}[x, 1/x]$. Любая проекция π, такая что $\pi(x)$ алгебраичен, имеет конечномерный образ. Однако множество $\{x\}$ не является s-базисом алгебры $\mathbb{Q}[x, 1/x]$. Поэтому определение курошева множества строится следующим образом.

Определение 1.5. Множество $M \subset A$ называется *курошевым*, если любая проекция $\pi\colon A \otimes K[X] \to A'$, в которой образ $\pi(M)$ цел над $\pi(K[X])$, конечномерна над $\pi(K[X])$.

Теперь можно сформулировать обобщение этой теоремы на неоднородный случай.

Теорема 1.6 (А. Я. Белов). *Пусть A — PI-алгебра, $M \subseteq A$ — некоторое курошево подмножество в A. Тогда M — s-базис алгебры A.*

Следующее предложение показывает, что теорема 1.6 является обобщением теоремы 1.4.

Предложение 1.7. *Пусть A — градуированная алгебра, Y — множество однородных элементов. Тогда если при всех n алгебра $A/Y^{(n)}$ локально нильпотентна, то Y является курошевым множеством.* □

Таким образом, ограниченность существенной высоты есть некоммутативное обобщение свойства *целости*.

Замечания.

1. Отметим, что в случае PI-алгебр Ли положительно решается проблема Куроша, но теорема о высоте не выполняется.
2. Теорема обобщается для некоторого класса колец, асимптотически близкого к ассоциативным (с ограниченной l-длиной, конечной порождённостью алгебры левых умножений и ассоциативными степенями).

Оценки высоты

Первоначальное доказательство А. И. Ширшова, хотя и было чисто комбинаторным (оно основывалось на технике элиминации, развитой им в алгебрах Ли, в частности в доказательстве теоремы о свободе), не давало разумных оценок на высоту. Позднее А. Т. Колотов [13] получил оценку на $\mathrm{ht}(A) \leqslant s^{s^m}$ ($m = \deg(A)$, s — число образующих). Впоследствии Е. И. Зельманов [6] поставил вопрос о наличии экспоненциальной оценки, которая и была получена автором [39].

Теорема Ширшова о высоте. *Пусть A — l-порождённая PI-алгебра степени m. Тогда A имеет ограниченную функцией $H(m,l)$ высоту над множеством слов степени не выше m. При этом $H(m,l) < 2ml^{m+1}$.*

Существенная высота

Ясно, что размерность Гельфанда—Кириллова оценивается существенной высотой и что s-базис является базисом Ширшова тогда и только тогда, когда он порождает A как алгебру.

В представимом случае имеет место и обратное утверждение.

Теорема 1.8 (А. Я. Белов [4]). *Пусть A — конечно порождённая представимая алгебра, и пусть $H_{\mathrm{Ess}\,Y}(A) < \infty$. Тогда $H_{\mathrm{Ess}\,Y}(A) = \mathrm{GKdim}(A)$.* □

Следствие 1.9 (В. Т. Марков). *Размерность Гельфанда—Кириллова конечно порожденной представимой алгебры есть целое число.* □

Следствие 1.10. *Если $H_{\mathrm{Ess}\,Y}(A) < \infty$ и алгебра A представима, то $H_{\mathrm{Ess}\,Y}(A)$ не зависит от выбора s-базиса Y.* □

В силу локальной представимости относительно свободных алгебр размерность Гельфанда—Кириллова в этом случае также равна существенной высоте.

Строение векторов степеней

Итак, в представимом случае размерность Гельфанда—Кириллова и существенная высота ведут себя хорошо. Тем не менее даже тогда множество векторов степеней может быть устроено плохо, а именно может быть дополнением к множеству решений системы экспоненциально-полиномиальных диофантовых уравнений. Поэтому существует пример представимой алгебры с трансцендентным рядом Гильберта. Однако для относительно свободной алгебры ряд Гильберта рационален.

Базисы Ширшова, состоящие из слов

Описание таких базисов даёт следующая теорема.

Теорема 1.11 (А. Я. Белов). *Множество слов Y является базисом Ширшова алгебры A тогда и только тогда, когда для любого слова u длины не выше $m = \mathrm{PIdeg}(A)$ — сложности алгебры A — множество Y содержит слово, циклически сопряжённое к некоторой степени слова u.* $\square$

Сам А. И. Ширшов показал, что в качестве базиса Ширшова можно взять множество слов степени не больше $\deg(A)$. И. В. Львов установил ограниченность высоты над множеством слов длины не выше $\deg(A) - 1$. С. Амицур и И. П. Шестаков высказали гипотезу, что если все слова длины не выше сложности $\mathrm{PIdeg}(A)$ алгебраичны, то сама алгебра конечномерна. И. В. Львов свел это утверждение к следующему.

Теорема 1.12. *Пусть A — конечно порождённая подалгебра алгебры матриц порядка n, а $a_1, \ldots, a_s$ — её образующие. Тогда если все слова от $a_1, \ldots, a_s$ степени не выше n нильпотентны, то алгебра A сама нильпотентна.* $\square$

Отметим, что число n является точной оценкой.

Гипотеза Шестакова была доказана В. А. Уфнаровским [24] и Г. П. Чекану [29][1]. В дальнейшем автор [2] показал, что в качестве $\{v_i\}$ можно взять множество слов из гипотезы Шестакова. Этот результат был также анонсирован Г. П. Чекану [28]. Затем другое доказательство этого факта было получено В. Дренским.

Круг вопросов, относящийся к связям между теоремой о высоте и теоремой о независимости, и будет находиться в центре нашего внимания.

Одна из формулировок теоремы о независимости [25, 29] такова.

Теорема 1.13 (теорема о независимости). *Пусть*

1) *слово $W = a_{i_1} \ldots a_{i_n}$ является минимальным в левом лексикографическом порядке среди всех ненулевых произведений длины, не превосходящей n;*

[1] Г. П. Чекану сообщил в частном письме: «Мы работали в одном секторе... Мы оба выдержали эту дружную и творческую конкуренцию (причём мы сознательно пошли на это, договорившись, что будем работать на разных языках)». В основе доказательств лежал «дух независимости». В последующих работах этих авторов приводились различные уточнения и обобщения такого рода теорем [31].

2) *концы слова W нильпотентны.*

Тогда начальные подслова слова W линейно независимы. $\square$

Для вывода гипотезы И. П. Шестакова (или, что то же самое, утверждения И. В. Львова) из этой теоремы достаточно рассмотреть точное представление алгебры A операторами в n-мерном пространстве V. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — базис этого пространства, тогда для некоторого v_i выполняется неравенство $m_i W \neq 0$.

Рассмотрим вспомогательную алгебру, которую порождают V и A. Пусть $V \cdot V = A \cdot V = 0$ и действие VA совпадает с модульным умножением. Упорядочим образующие так: $v_1 \succ \ldots \succ v_n \succ a_1 \succ \ldots \succ a_s$ и применим теорему о независимости. $\square$

Первоначальные доказательства теоремы о независимости были достаточно сложными. Применение методов символической динамики, связанных с бесконечными словами, или ***сверхсловами***, позволило сделать их прозрачными. Техника сверхслов оказалась довольно близкой по духу структурной теории. Её роль не исчерпывается доказательством утверждений типа теоремы о независимости. С помощью сверхслов можно доказать теорему о высоте, нильпотентность алгебры Ли, порождённой сэндвичами [25], совпадение ниль-радикала и радикала Джекобсона в мономиальных алгебрах, получить описание базисов алгебр с экстремальной функцией роста $V_A(n) = n(n+3)/2$, а также слабонётеровых, полупростых и полупервичных мономиальных алгебр [4] и получить ряд других комбинаторных результатов, относящихся к теории полугрупп и колец.

2. Представления мономиальных полугрупп и независимость

Многие свойства алгебр задаются мономиальными соотношениями. В частности, таковы условия в гипотезе Шестакова: нильпотентность слов степени не выше сложности.

Эта гипотеза связана со структурой алгебры матриц. Перемножение матричных единиц E_{ij} устроено почти мономиально, и язык представлений мономиальных алгебр проливает свет на «матричные» свойства полупростых компонент. Не случайно многие авторы, изучавшие проблематику, связанную с независимостью, активно использовали похожую технику матричных конструкций в других вопросах, связанных с локальной конечностью [27].

К сожалению, основные вопросы, относящиеся к представлению мономиальных алгебр, по всей видимости, алгоритмически неразрешимы. Например, вопрос о представимости мономиальных алгебр сводится к выяснению того, является ли некоторое множество наборов целых чисел множеством решений какой-нибудь системы экспоненциальных диофантовых уравнений. Вопрос же о минимальной размерности представления регулярного языка сводится к тому, как задать язык с помощью системы уравнений некоторым минимальным образом.

Данный раздел посвящён представлениям первичных автоматных мономиальных алгебр, некоторым конструкциям и утверждениям, которые могут быть интересны сами по себе. Изучаются вопросы, связанные с точностью представлений полугрупп, рассматриваются некоторые алгоритмические проблемы (проблема нахождения минимальной размерности точного представления). Граф Γ, соответствующий первичной автоматной мономиальной алгебре, *сильно связен*. Это значит, что из любой вершины можно пройти в любую, двигаясь по стрелкам. Если он нетривиален, т. е. содержит более одного цикла, то он содержит и *зацепляющиеся циклы* (т. е. два различных цикла с общей вершиной). В этом случае рост числа путей экспоненциален и задача отыскания всех неприводимых представлений является дикой (даже для графа из одной вершины и двумя петлями). Таким образом, общие вопросы и не предполагают окончательного ответа. Тем не менее можно получить некоторую интересную информацию о структуре представлений, чем мы и займёмся.

Под *графами* мы понимаем *автоматы*, или ориентированные графы, вообще говоря с петлями и кратными рёбрами, на которых написаны буквы некоторого алфавита. Некоторые вершины называются *начальными*, а некоторые — *финальными*. Пути из начальной вершины в финальную соответствует слово, которое можно прочитать, двигаясь вдоль него. Множество таких слов называется *языком графа* G и будет обозначаться $\mathcal{L}(G)$. Язык, имеющий вид $\mathcal{L}(G)$ для некоторого G, называется *регулярным языком*. Имеются и другие равносильные определения понятия регулярности. Мы будем также пользоваться таким: язык $\mathcal{L}$ *регулярен*, если все подслова входящих в него слов можно разбить на конечное число классов так, что замена подслова на любое другое слово того же класса не нарушает свойства принадлежности объемлющего слова языку $\mathcal{L}$.

Определение 2.1. По графу Γ мономиальной алгебры A_Γ её представление строится следующим образом. Вершинам отвечают базисные векторы, стрелке, соединяющей i-ю вершину с j-й, — матричная единица E_{ij}, каждой образующей a_p алгебры A_Γ — оператор $\sum \alpha_{ij}^p E_{ij}$, где $\alpha_{ij}^p = 0$, если буква a_p не написана на стрелке, соединяющей соответствующую пару вершин, а в остальных случаях α_{ij}^p образуют набор независимых взаимно трансцендентных параметров. Такое представление называется *каноническим представлением* мономиальной алгебры.

2.1. Основная конструкция. Минимальные образы

Граф называется детерминированным, если из каждой вершины исходит не более одной стрелки, соответствующей данной букве. Пусть G — детерминированный сильно связный граф, задающий автоматную алгебру A_G, $\dim(V) < \infty$ и ядро представления $\rho\colon A_G \to \operatorname{End}(V)$ не содержит мономов.

Среди образов пространства V при действии слов из A_G есть ненулевые подпространства, минимальные по включению. Их мы будем называть *минимальными образами*. Поскольку граф G сильно связен, можно дать равносильное определение: это ненулевые образы пространства V минимальной размерности.

Очевидно следующее утверждение.

Предложение 2.2.

1. *Каждое слово из A_G действует на минимальном образе либо изоморфно отображая его в другой минимальный образ, либо обращая в нуль.*
2. *Любой минимальный образ порождает A_G-модуль без подпространств, аннулирующих A_G. Верно и обратное: каждый такой модуль порождён минимальными образами.*
3. *Неприводимый A_G-подмодуль, не аннулирующий мономы, пересекается с каждым минимальным образом и порождается как векторное пространство этими пересечениями.*
4. *Минимальные образы имеют одинаковые размерности.* □

Всюду ниже рассматриваются только A_G-модули V без подпространств, аннулирующих A_G, и, кроме того, нет мономов, аннулирующих всё V. Нас будут интересовать минимальные размерности таких модулей. Если не оговорено противное, то считается, что никакое слово из A не аннулирует всё пространство V.

2.2. Копроизведение мономиальных алгебр. Граф путей

Множество всех ненулевых слов автоматной алгебры образует регулярный язык. Регулярность языка $\mathcal{L}$ равносильна возможности разбить подслова слов из $\mathcal{L}$ на конечное число классов так, что замена любого подслова u слова v на любое подслово u' того же класса сохраняет свойство принадлежности слова v данному языку. Можно считать также, что замена подслова на эквивалентное не меняет класса эквивалентности всего слова.

Определение 2.3. Пусть $\bar{A}$ — автомат. *Граф путей* $G(\bar{A})$ — это граф, вершины которого суть классы эквивалентности слов в $\mathcal{L}(\bar{A})$. Если v_1 и v_2 — вершины и a — буква алфавита, то от v_1 к v_2 ведёт стрелка, помеченная буквой a, тогда и только тогда, когда для некоторых слов $\bar{v}_1 \in v_1$, $\bar{v}_2 \in v_2$ выполняется равенство $\bar{v}_1 a = \bar{v}_2$.

Вершина графа $G(A)$ называется *полной*, если соответствующий класс эквивалентности содержит слово, отличное от пустого слова Λ.

Ясно, что граф $G(\bar{A})$ всегда является детерминированным.

Замечание. Вообще говоря, построенный граф путей не является детерминированным графом с минимальным числом вершин, задающим язык $\mathcal{L}$. Однако граф путей содержит такой подграф.

Известно, что копроизведение двух ненулевых алгебр есть первичная алгебра. Следующее предложение описывает простейшие свойства копроизведений мономиальных алгебр.

Предложение 2.4.

1. *Копроизведение мономиальных алгебр $\{A_i\}$ есть первичная мономиальная алгебра. Если все A_i автоматны, то копроизведение автоматно и его граф сильно связен.*

2. *Пусть* $*\mathcal{L}$ *есть язык, слова которого суть произведения слов из* $\mathcal{L}$ *в любом количестве. Тогда* $\mathcal{L}(A * B) = *\big(\mathcal{L}(A)\mathcal{L}(B)\big) \cup \mathcal{L}(A) \cup \mathcal{L}(B)$.
3. *Если* $i > 2$ *или хотя бы одна* A_i *не является* 1*-порождённой алгеброй с нулевым умножением, то рост копроизведения экспоненциален. Если же при этом все* A_i *автоматны, то граф их копроизведения содержит зацепляющиеся циклы и количество различных слов длины* n *в алгебре* A *растёт экспоненциально с ростом* n.
4. *Если все* A_i, $i = 1, 2$, *являются* 1*-порождёнными алгебрами с нулевым умножением, то граф их копроизведения состоит из одного цикла длины* 2*, а множество ненулевых слов в* $A_1 * A_2$ *есть множество подслов слова* $(a_1a_2)^\infty$, *где* a_i — *образующая алгебры* A_i. □

Далее $\mathcal{L}(A)$ обозначает язык ненулевых слов алгебры A,

$$\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 = \{u_1u_2 \mid u_1 \in \mathcal{L}_1,\ u_2 \in \mathcal{L}_2\}, \quad *\mathcal{L} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^n.$$

Изучим граф копроизведения более подробно.

Предложение 2.5 (граф копроизведения). *Пусть* A_1 *и* A_2 — *автоматные мономиальные алгебры,* G_1 *и* G_2 — *подграфы графов путей этих алгебр, состоящие из всех полных вершин. Тогда минимальный детерминированный граф* G, *отвечающий копроизведению* $A_1 * A_2$ *устроен следующим образом*:

1) G_i, $i = 1, 2$, — *непересекающиеся подграфы графа* G, *стрелки внутри* G_i *помечены образующими алгебры* A_i;
2) *пусть* $i \neq j$, v — *произвольная вершина в* G_i, a_{jk} — *образующая алгебры* A_j, w — *вершина в* G_j, *ей соответствующая. Тогда* v *соединена с* w *стрелкой, помеченной буквой* a_{jk};
3) *других стрелок, кроме описанных в предыдущих пунктах, в графе* G *нет.* □

Абсолютно свободная ассоциативная алгебра мономиальна. В частности, мономиально кольцо многочленов от одного переменного $\mathbb{F}[x]$. Нас интересует копроизведение $A' = A * \mathbb{F}[x]$. Следующее предложение позволяет строить минимальные представления ρ_i алгебры A' без мономиального ядра (т. е. с ядром, не содержащим мономов).

Предложение 2.6. *Пусть* $C_1, \ldots, C_n$ — *ненулевые матрицы и основное поле* $\mathbb{F}$ *бесконечно. Тогда найдётся открытое и плотное по Зарискому множество* $\mathcal{S}$ *в пространстве матриц, такое что для всех* $B \in \mathcal{S}$ *выполняется неравенство* $BA_1BA_2B \ldots A_nB \neq 0$.

Доказательство. Указанное неравенство задаёт открытое по Зарискому множество в пространстве матриц. Поэтому достаточно проверить, что оно непусто. Возьмём такую матрицу B, что её образ одномерен и пересекается с её ядром, а также с ядрами матриц C_i, $i = 1, \ldots, n$, по нулевому вектору и, кроме того, ядро B не пересекается с образами BA_i. Ясно, что матрица B удовлетворяет требуемому неравенству.

Данное предложение можно уточнить. Если k — минимум ранга матриц C_i, то можно взять матрицу B, образ которой k-мерен и не пересекается с ядрами рассматриваемых операторов (а ядро не пересекается с образами BA_i). Тогда ранг произведения будет равен k. $\square$

Следствие 2.7. *Пусть $\mathbb{F}$ имеет достаточную степень трансцендентности. Тогда минимальные размерности представлений без мономиального ядра у алгебр A и A' совпадают.* $\square$

Если алгебра A автоматна, то граф путей алгебры A' устроен следующим образом.

1. Вершины графа $G(A')$ — это полные вершины графа путей G_A и ещё одна вершина v. Вершины из $G(A)$ соединены всеми стрелками из $G(A)$ и никакими другими.
2. Каждая стрелка, помеченная буквой x, ведёт в вершину v.
3. Стрелка из вершины v, помеченная буквой a_i, ведёт в вершину $[a_i]$, отвечающую классу эквивалентности слова из одной буквы a_i.

2.3. Расположения слов в графах. Слова с единственным концом в расположениях

Определения и конструкции. Пусть Γ — автомат, задающий некоторый регулярный язык $\mathcal{L} = \mathrm{Wd}(A)$, состоящий из ненулевых слов автоматной алгебры A. Такой язык вместе с каждым словом содержит все его подслова (и каждый язык, удовлетворяющий этому условию, является множеством ненулевых слов некоторой мономиальной алгебры). *Расположением слова v* назовём путь в Γ, идя по которому можно это слово прочитать. Естественным образом определяется также *начало расположения* и *конец расположения*. Ясно, что если граф Γ детерминированный, то слова, у которых число концов расположений не превосходит k, образуют идеал. Пусть u — вершина детерминированного графа, а W — слово. Тогда uW означает вершину, являющуюся концом расположения W, начало которого есть u. Если такого расположения нет, полагаем $uW = 0$.

Поставим в соответствие каждой вершине v графа Γ язык $\mathcal{L}_v$, состоящий из слов, имеющих расположение с началом в вершине v. *Вербальный аннулятор* вершины v есть язык $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_v$.

Предложение 2.8. *Если граф Γ минимален и детерминирован, то для любых двух вершин $v_1 \neq v_2$ графа Γ имеет место неравенство $\mathcal{L}_{v_1} \neq \mathcal{L}_{v_2}$.*

Доказательство. Пусть $v_1 \neq v_2$, но $\mathcal{L}_{v_1} = \mathcal{L}_{v_2}$. Пусть $W \in \mathcal{L}_{v_1} = \mathcal{L}_{v_2}$, $u_1 = v_1 W$, $u_2 = v_2 W$. Тогда $\mathcal{L}_{u_1} = \mathcal{L}_{u_2}$. Склеим все пары вершин u_1 и u_2, которые так получаются. При такой склейке сохраняется детерминированность и получается меньший граф. $\square$

Замечания.

1. Как показывает пример алгебры $A' = A * \mathbb{F}[x]$, где A — произвольная автоматная не абсолютно свободная мономиальная алгебра, языки $\mathcal{L}_{v_i}$ могут быть сравнимы по включению.
2. Рассуждение со склейкой вершин напоминает рассуждения, связанные с построением эндоморфизма, в доказательстве теоремы плотности в теории колец (см. [26]).

Из предыдущего предложения в силу детерминированности Γ вытекает следствие.

Следствие 2.9.

1. *Пусть слово W имеет расположения с концами только в вершинах $v_1, \ldots, v_k$, где $k > 1$. Тогда существует такое слово $U \in \mathrm{Wd}(A)$, что $WU \in \mathrm{Wd}(A)$, причём количество возможных концов расположений слова WU строго меньше k.*
2. *Для любого $W \in \mathrm{Wd}(A)$ и любой вершины w существует такое $U \in \in \mathrm{Wd}(A)$, что w — единственный возможный конец расположения слова UW.* □

Напомним, что граф Γ считается сильно связным.

Исследуем взаимосвязь расположений слов и минимальных образов. Перепишем результат данного следствия в более удобном для нас виде.

Предложение 2.10. *Пусть дано представление $\rho\colon A \to \mathrm{End}(V)$, вершины v_1, v_2 и слово v. Тогда существует слово w', которое содержит v в качестве подслова и обладает следующими свойствами.*

1. *Существует расположение слова w' с началом в вершине v_1.*
2. *Конец любого расположения слова w' совпадает с v_2.*
3. *Образ всего пространства представления под действием w' есть минимальный образ* (*см. начало раздела* 2.1). □

Пусть v — вершина Γ. Рассмотрим множество слов, удовлетворяющих заключению предыдущего предложения, концы расположений которых совпадают с v. Через $\hat{v}$ обозначим множество соответствующих минимальных образов.

Из предложений 2.8, 2.2 вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.11.

1. *Пусть $h \in \mathrm{Wd}(A)$, v — вершина Γ. Тогда если $vh = 0$, то h действует на пространствах из $\hat{v}$ нулевым образом, а если $vh \neq 0$, то h их изоморфно отображает в пространства из $\widehat{vh}$.*
2. *Если $v_1 \neq v_2$, то любые два пространства из $\hat{v}_1$ и $\hat{v}_2$ имеют нулевое пересечение* (*и потому различны*). □

Таким образом, множества $\hat{u}$ и $\hat{v}$ при $u \neq v$ не пересекаются.

Назовём *словом минимального образа* слово u, под действием которого из V получается минимальное пространство. Из предыдущего предложения, а также предложений 2.8, 2.2 вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.12.

1. *Слово минимального образа есть слово с единственным концом расположения.*
2. *Минимальные образы из $\hat{v}$ под действием слова u с единственным концом расположения склеиваются. Если $vu = 0$, то они переходят в нуль, а если $vu \neq 0$, то каждый из них изоморфно отображается в минимальный образ, соответствующий слову u.* □

Замечание. Хотя для каждого u, такого что $vu \neq 0$, происходит склейка минимальных образов из $\hat{v}$, канонического изоморфизма между ними может не быть. Изоморфизм φ между пространствами V_1 и V_2 из $\hat{v}$ естественно определяется словом u:

$$\varphi(a) = b \iff a \cdot u = b \cdot u,$$

но может зависеть от u. Более того, минимальных образов и таких изоморфизмов между ними может быть бесконечно много.

Рассматривая пути с единственным концом расположения в минимальном детерминированном сильно связном графе и воспользовавшись предложениями 2.8, 2.10, получаем следующее утверждение.

Предложение 2.13.

1. *Минимальный детерминированный сильно связный граф с точностью до изоморфизма единствен.*
2. *Граф путей содержит такой граф своим подграфом. При этом вложении независимые системы вершин* (см. *определение* 2.14) *переходят в независимые системы.* □

Замечание. Все результаты, относящиеся к детерминированным автоматам, имеют дуальную переформулировку для кодетерминированного случая.

2.4. Теорема о независимости для представлений автоматных алгебр

Определение 2.14. Система вершин $\{v_i\}$ графа G называется *независимой*, если для любого непустого набора вершин $N \subseteq \{v_i\}$ существует слово W, зануляющее все вершины из N, кроме в точности одной.

Из этого определения и предложения 2.2 получаем следующую теорему.

Теорема 2.15 (теорема независимости для автоматных алгебр). *Пусть $\vec{v}_i \neq 0$ обозначает вектор из произвольного минимального образа V_i, отвечающего вершине v_i. Тогда если $\{v_i\}$ — независимый набор вершин, то набор векторов $\{\vec{v}_i\}$ также линейно независим.* □

Следствие 2.16. *Минимальная размерность представления без мономиального ядра не меньше максимального числа элементов независимой системы вершин. В частности, если все языки $\mathcal{L}_{v_i}$ несравнимы по включению, то множество всех вершин независимо и эта размерность равна числу вершин графа* (*в силу конструкции* канонического представления). □

Замечания.

1. Мы взяли самое слабое понятие независимости. Более сильным было бы такое: для любого v_i существует такое слово W, что $v_iW \neq 0$, но $v_jW = 0$ при всех $j \neq i$.
2. По всей видимости, задача о нахождении максимального числа элементов независимой системы NP-полна.
3. Возникает вопрос: верно ли, что максимальные независимые системы вершин содержат одинаковое число элементов. По всей видимости, ответ отрицателен.
4. Отметим, что все наши рассуждения проходят и для алгебр над телами.
5. Из результатов следующих разделов легко получается, что если все вершины независимы, то минимальная размерность представления, точного на полугруппе слов, равна удвоенному числу вершин графа.

«Классическая» теорема о независимости тесно связана с представлениями автоматных алгебр. Нас интересуют ненильпотентные представления (и случай наличия мономиального ядра). Пусть $\rho\colon A \to \operatorname{End}(V)$ — представление алгебры A. Система вершин $\{v_i\}$ называется *независимой в представлении* ρ, если для любого непустого подмножества $N \subseteq \{v_i\}$ найдутся вершина $v_j \in N$, минимальный образ $V_j \in \hat{v}_j$ и слово w, такие что $V_j\rho(w) \neq 0$ и для любых $V_i \in \hat{v}_i$ при $v_i \in N \setminus v_j$ справедливо равенство $V_i\rho(w) = 0$.

Дадим теперь другую версию теоремы о независимости.

Теорема 2.17. *Пусть G_A — минимальный детерминированный граф мономиальной автоматной алгебры A, $\rho\colon A \to \operatorname{End}(V)$ — её неприводимое представление, $\{v_i\}$ — независимая система вершин в этом представлении. Кроме того, каждому v_i отвечает ненулевой минимальный образ V_i. Пусть $w_i \in V_i \setminus 0$. Тогда векторы w_i линейно независимы.*

Доказательство. Рассуждения полностью аналогичны рассуждениям для случая отсутствия мономиального ядра. Поскольку представление ρ неприводимо, V порождается как векторное пространство минимальными образами. □

Пример. Пусть граф G состоит из одного цикла. Его вершинам соответствуют несравнимые по включению множества аннулирующих слов. Данному графу соответствует период u, и множество ненулевых слов алгебры A_G есть множество подслов в u^∞. Это алгебра A_u (см. [4]), любой её мономиальный фактор нильпотентен, и минимальная размерность ненильпотентного представления равна длине цикла — числу вершин графа G.

Дадим теперь ещё одну версию теоремы о независимости.

Пусть w — правильное слово[1] длины n, $A(w)$ — алгебра, образующие которой суть буквы, входящие в w, а множество определяющих соотношений есть $\{u = 0 \mid u \succ w\}$. Это свободная алгебра с экстремальным словом[2] w. Соответствующий граф G_w устроен так. Имеется цикл, вдоль которого написано слово w. Вершинам цикла v_i отвечают начальные подслова w_i подслова w (начальной вершине соответствует пустое слово Λ). Если при этом $w_i a_j \succ w_{i+1}$, то $v_i a_j = 0$, а если $w_i a_j \prec w_{i+1}$, то стрелка, помеченная буквой a_j, соединяет вершину v_i с началом цикла.

Если представление $\rho\colon A(w) \to \mathrm{End}(V)$ имеет минимальный образ, соответствующий начальному подслову слова w длины $n-1$, и, кроме того, $\rho(w^2) \neq 0$, то система вершин, отвечающих n начальным подсловам в w $(\Lambda, w_1, \ldots, w_{n-1})$, независима в этом представлении. Это вытекает из следующей леммы и следствия из неё.

Лемма 2.18. *Конец правильного слова лексикографически меньше его начала.*

Доказательство можно найти, например, в [25] или [27]. □

Следствие 2.19. *Пусть $\rho(W^2) \neq 0$. Тогда для любого набора вершин N можно указать слово u, умножение на которое переводит одну вершину из этого набора (обозначим соответствующее слово v) в v_{n-1}, а остальные — в нуль, причём $\rho(vu) \neq 0$.* □

Пусть теперь $\rho(w) \neq 0$. Расширим алфавит младшей буквой a_0, расширим основное поле достаточным числом трансцендентных элементов, и тогда можно выбрать в качестве $\rho(a_0)$ оператор общего положения. Воспользовавшись предложением 2.6, получим представление алгебры $A(w)' = \mathbb{F}[a_0] * A(W)$, в котором каждой вершине будет отвечать минимальный образ. Векторы из этих минимальных образов могут оказаться линейно зависимыми, поскольку концы слова W могут оказаться лексикографически сравнимыми.

Однако если учесть нильпотентность концов слова W и построить соответствующий граф, получится доказательство теоремы о независимости, по сути дела не отличающееся от изложенного в разделе 3.2.3. Кроме того, из независимости векторов из минимальных образов для независимых систем вершин вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.20. *Минимальная размерность ненильпотентного представления мономиальной алгебры равна минимальной длине периода в бесконечных словах алгебры A.* □

Замечание. Алгебра $A(w)$ — достаточно интересный объект. Её исследовал, в частности, Г. П. Чекану [27]. Укажем на красивый результат, полученный этим автором. Можно указать такую линейную комбинацию слов в алгебре $A(W)$, что

[1] Слово называется *правильным*, если оно лексикографически больше всех циклически сопряжённых ему слов. Два слова u_1 и u_2 являются *циклически сопряжёнными*, если для некоторых слов v_1 и v_2 выполняются равенства $u_1 = v_1 v_2$, $u_2 = v_2 v_1$.

[2] Слово называется *экстремальным*, если любое лексикографически большее слово нулевое.

её $(n-1)$-я степень равна подслову w^n, а n-я степень равна нулю. Тем самым в любом факторе алгебры $A(w)$, в котором $w^n \neq 0$ (или, что равносильно, в ситуации, когда w — экстремальное слово и $w^n \neq 0$), имеется нильпотент, порядок которого в точности равен n.

2.5. Минимальные образы. Хорошие представления

Пусть $\rho\colon A \to \mathrm{End}(V)$ — представление автоматной алгебры A без мономиального ядра. Представление называется *хорошим*, если для каждой вершины v минимального детерминированного графа G_A множество $\hat{v}$ минимальных образов, ей соответствующих, состоит из одного элемента.

Любое представление есть фактор канонического представления, и каноническое представление является хорошим, однако фактор хорошего представления таковым быть не обязан. Наша цель — исследовать соотношение между произвольными и хорошими представлениями.

Пусть $\rho\colon A \to \mathrm{End}(V)$ — произвольное представление автоматной алгебры A без мономиального ядра. Воспользуемся предложением 2.10. Для каждой вершины v_i графа G_A зафиксируем минимальный образ $V_i \in \hat{v}_i$, а также слово w_i, такое что

1) слово w_i имеет расположение с началом в вершине v_i;
2) все расположения слова w_i имеют конец v_i;
3) образ пространства представления V под действием $\rho(w_i)$ есть V_i.

Каждой стрелке, помеченной буквой a_α и ведущей в вершину v_i, поставим в соответствие слово $u_{\alpha,i} = a_\alpha w_i$ и элемент $W_{\alpha,i} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} t_{ij\alpha} a_\alpha w_i^j$, где $\{t_{ij\alpha}\}$ — набор независимых переменных (коммутирующих с элементами A и между собой) или «взаимно трансцендентных коэффициентов».

Предложение 2.21.
1. *$W_{\alpha,i}$ порождают мономиальную алгебру A'', действующую в пространстве $V' = V \otimes \mathbb{F}[[t_{ij\alpha}]]$ (и в пространстве $V'' = V \otimes \mathbb{F}((t_{ij\alpha}))$).*
2. *Получившееся представление алгебры A'' в пространстве V'' является хорошим. При этом V_i отвечают минимальные образы $V_i \otimes \mathbb{F}((t_{ij\alpha}))$.* $\square$

В формулировке $\mathbb{F}[[t_{ij\alpha}]]$ означает кольцо формальных степенных рядов, $\mathbb{F}((t_{ij\alpha}))$ — его поле частных.

Замечания.
1. Данная конструкция существенно зависит от выбора минимальных образов V_i. Если исходное представление не является хорошим, то отображения в новой алгебре, связывающие минимальные образы, не согласованы с отображениями в исходной алгебре.
2. Слово w_i может иметь несколько начал. Поэтому, по всей видимости, может случиться так, что граф Γ для алгебры A'', соответствующий графу G_A, уже не является минимальным (хотя будет детерминированным). Было бы интересно получить соответствующий пример.

3. Эта конструкция возникла при исследовании минимальной размерности представления полугруппы.
4. В силу линейной зависимости минимальных образов данная операция плохо согласуется с операцией расклейки букв (см. [4]).

2.6. Представления мономиальных полугрупп

Нас интересуют вопросы, связанные с точностью представлений мономиальных полугрупп. При этом предполагается, как обычно, что мономиального ядра у представления нет.

Пусть граф G содержит зацепляющиеся циклы.

Определение 2.22. Назовём два пути *эквивалентными*, если они имеют общие начало и конец, а кроме того, каждая стрелка графа G участвует в этих путях одинаковое число раз. Два слова w_1 и w_2 из $\mathcal{L}(G)$ *эквивалентны*, если количества расположений слов w_1 и w_2 в каждом данном классе одинаковы.

Ясно, что эквивалентным словам в каноническом представлении (и в его факторах) соответствуют одинаковые операторы.

Предложение 2.23. *Число $N(n)$ классов эквивалентности путей длины n растёт полиномиально. Имеет место неравенство*

$$N(n) \leqslant |\operatorname{vert}(G)|^2 n^{\operatorname{arr}(G)},$$

где $\operatorname{vert}(G)$ — число вершин графа G, а $\operatorname{arr}(G)$ — число стрелок. □

При доказательстве неточности представлений будет использовано следующее соображение, принадлежащее В. А. Уфнаровскому: *если минимальный граф G содержит зацепляющиеся циклы, то число путей длины n растёт экспоненциально, а число соответствующих классов эквивалентности — полиномиально.*

С помощью данного соображения непосредственно получается следующее утверждение.

Предложение 2.24. *Пусть G — детерминированный (кодетерминированный) граф, содержащий зацепляющиеся циклы, ρ — хорошее представление (например, каноническое) с одномерными образами (кообразами). Тогда соответствующее представление полугруппы слов не является точным.* □

Теперь избавимся от условия, что представление должно быть хорошим. Докажем следующую теорему.

Теорема 2.25. *Пусть G — детерминированный (кодетерминированный) автомат, причём минимальные образы (кообразы) в неприводимом представлении ρ одномерны. Тогда ограничение представления ρ на полугруппу слов не является точным, если рост в $\mathcal{L}(G)$ экспоненциален (или, что равносильно, G содержит зацепляющиеся циклы), а сам граф G сильно связен.*

Доказательство повторяет конструкции предыдущего раздела 2.5. Возьмём два зацепляющихся цикла C_1 и C_2 с общей вершиной v. Пусть u_1, u_2 — слова, отвечающие прохождению циклов C_1 и C_2 соответственно. Тогда $u_1 \neq u_2$ в силу детерминированности G. Зафиксируем минимальный образ U, отвечающий вершине v. В силу предложения 2.10 существует слово w со следующими свойствами:

1) слово w имеет расположение с началом в вершине v;
2) все расположения слова w имеют конец в вершине v;
3) образ пространства представления под действием $\rho(w)$ есть U.

Тогда $0 \neq wu_1wu_2w \neq wu_2wu_1w \neq 0$, и, поскольку операторы u_iw, действуя на одномерном пространстве U, коммутируют, имеем соотношение $\rho(wu_1wu_2w) = \rho(wu_2wu_1w) \neq 0$, которое и означает неточность представления ρ на полугруппе слов. □

Если G — детерминированный автомат, сильно связный, содержащий зацепляющиеся циклы, и ограничение представления ρ на полугруппу слов является точным, то минимальные образы не менее чем двумерны. Воспользовавшись теоремой о независимости для представлений, получаем следствие.

Следствие 2.26. *Минимальная размерность представления, обладающего только что указанными свойствами, не меньше удвоенного числа элементов независимой системы вершин.* □

Отметим, что общие матрицы порядка больше первого образуют свободную полугруппу относительно умножения. Поэтому если поставить в соответствие вершинам G векторные пространства размерности 2, а стрелкам — общие матрицы, то получится точное представление полугруппы слов.

Замечание. Условие сильной связности G в наших рассмотрениях является существенным. Образ может стать одномерным при отправке в последний цикл, который уже ни с чем не зацеплен. Исключив эту ситуацию, можно восстановить справедливость только что доказанной теоремы.

Пример. Даже когда все $\mathcal{L}_{v_i}$ попарно несравнимы по включению, может наблюдаться покрытие некоторого языка $\mathcal{L}_{v_i}$ языками $\mathcal{L}_{v_j}$ при $i \neq j$. Вот простейший пример.

Граф G состоит из четырёх вершин P_1, P_2, P_3 и Q. Из P_1 в Q ведут стрелки, помеченные буквами x, y, из P_2 в Q — стрелки, помеченные буквами y, z, из P_3 в Q — стрелки, помеченные буквами z, x. Из Q в вершины P_i ведут стрелки, помеченные буквами a_i соответственно.

В пространстве представления алгебры A_G может наблюдаться линейная зависимость между разными минимальными образами. Максимальная независимая система в G содержит три вершины. Можно показать, что минимальная размерность представления без мономиального ядра алгебры A_G равна трём, а минимальная размерность представления, точного на полугруппе слов, — шести.

2.7. Задачи нахождения минимальной размерности представления

Рассмотрим случай представлений над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом R. Если $R = \bigoplus R_i$, то представление есть подпрямое произведение представлений над R_i и множество ненулевых слов есть объединение множеств ненулевых слов в соответствующих представлениях. Поэтому минимальная размерность точного (ненильпотентного, без мономиального ядра и др.) представления мономиальной алгебры A ищется так: надо покрыть множество ненулевых слов из A множествами ненулевых слов алгебр A_i, чтобы максимальная размерность представлений этих алгебр была минимальна (другой вопрос — нахождение соответствующих алгоритмов). Под *размерностью представления* понимается ранг соответствующего R-модуля.

Рассмотрим ситуацию, когда R имеет делители нуля, но не нильпотенты.

Предложение 2.27. *Минимальная размерность представлений нильпотентной мономиальной полугруппы, а также её полугрупповой алгебры над кольцом без нильпотентов равна индексу нильпотентности.* □

Наличие нильпотентов в основном кольце может приводить к понижению размерности представления. При этом минимальная размерность представлений фактор-алгебры может возрасти, даже когда исходная алгебра нильпотентна. Например, минимальная размерность представления свободной нильпотентной алгебры степени k над кольцом с нильпотентами равна двум. Однако минимальная размерность представления её фактора по подходящему набору мономов может быть сколь угодно большой.

По всей видимости, задача о нахождении минимальной размерности представления нильпотентной мономиальной алгебры является NP-полной. Она может содержать задачу нахождения ограниченных решений системы экспоненциальных диофантовых уравнений.

Исследование многообразий мономиальных алгебр сводится к случаю алгебр, заданных замечательным графом [4]. В этой связи представляется интересной задача нахождения минимальных размерностей представлений для алгебр (над произвольным R), связанных с такими графами. Замечательный граф представляет собой последовательность циклов, соединённых перемычками. Стрелка, имеющая общую вершину с циклом, помечена буквой, которая нигде больше не встречается.

Пусть w — слово. Алгебру, все ненулевые слова которой суть подслова в w, мы обозначим $a(w)$. *Базисным набором слов* называется такой набор слов $\{v_i\} \subset \mathrm{Wd}(A)$, что для любого подслова v слова $u \in \mathrm{Wd}(A)$ замена v на подходящее v_i (которое зависит от v) сохраняет принадлежность $\mathrm{Wd}(A)$.

Предложение 2.28. *Минимальная размерность представления $a(w)$ не превосходит максимального числа элементов базисного множества.* □

С другой стороны, можно показать, что эта размерность не превосходит также порядка слабопсевдопериодичности слова w. В случае, когда w начинается и кончается буквами, которые нигде больше не встречаются, ситуация упрощается и минимальная размерность становится равной этому порядку.

Предложение 2.29. *Пусть G — замечательный граф, v_1 — слово, отвечающее его входной перемычке, v_2 — выходной, l_1 — порядок левой квазипериодичности слова v_1, l_2 — порядок правой квазипериодичности слова v_2, n — число вершин G, лежащих на циклах или других перемычках. Тогда минимальная размерность представления алгебры A_G равна $n + l_1 + l_2$.* □

Перечислим вопросы, которые мы собираемся обсудить.

1. Заслуживает изучения проблема нахождения минимальной размерности точного представления первичной автоматной алгебры над *хорошим* телом (мультипликативная группа которого содержит свободную группу с двумя образующими). В этом случае каноническое представление является точным (но между минимальными образами минимального точного представления может наблюдаться линейная зависимость).

2. Нужно показать алгоритмическую неразрешимость проблемы нахождения минимальной размерности представления регулярного языка над полем характеристики нуль. (Аналогичные проблемы для представлений без мономиального ядра, а также представлений мономиальных алгебр не должны отличаться по сути.) Над полем положительной характеристики эта проблема может быть алгоритмически разрешима.

3. По всей видимости, та же проблема в нильпотентном случае алгоритмически разрешима, но NP-полна (во всех вариантах для различных типов основных колец).

4. Пусть G — недетерминированный граф. Нужно разработать алгоритм проверки того, является ли соответствующее каноническое представление точным на полугруппе слов. Слова W_i и W_j склеиваются при каноническом представлении тогда и только тогда, когда для каждого класса эквивалентности (см. определение 2.22) количества расположений W_i и W_j из этого класса совпадают.

Чтобы представление было точным, надо исключить ситуацию, описанную в разделе 2.6, когда после прохождения любого пути, отвечающего U, все расположения слов W_1 и W_2 — циклы. Такая ситуация может возникнуть и при произвольной размерности минимальных образов. Для этого достаточно ввести две новые буквы a и b и расширить G, пририсовав к каждой вершине две петли, помеченные буквами a и b.

По всей видимости, возможны также и другие явления, связанные с различного рода линейными комбинациями. Поэтому возникает вопрос: если ситуация, описанная в предыдущем абзаце, не имеет места, то верно ли, что каноническое представление на полугруппе слов является точным? Ответ может быть и положительным. Приведём некоторые соображения, которые могут оказаться полезными.

Минимальные образы можно рассматривать как наборы вершин графа G с некоторыми весами. По набору минимальных образов можно построить детерминированный граф G' и, зафиксировав минимальный образ для каждой вершины, получить хорошее представление. Доказательство точности исходного представления сводится к доказательству точности этого хорошего представления или к доказательству того, что операторы, связанные с прохождением циклов, образуют свободную полугруппу. Точно так же достаточно показать, что словам aU и bV отвечают разные операторы. Это можно попытаться сделать, построив (с помощью некоторого алгебраического расширения кольца структурных констант) такой вектор v в расширенном пространстве представления, что $va = 0$, но $vbU \neq 0$ при всех U. Вектор v можно строить как свободный объект, удовлетворяющий уравнению $va = 0$, а неравенство доказывать исходя из соображений «перемешивания» координат (заметим, что все коэффициенты при переменных в каноническом представлении — натуральные числа). Если нет сильного перемешивания, то найдётся слово, которое, начинаясь в вершине u, с необходимостью заканчивается в вершине v графа G. Возможно, в этом и состоит критерий точности представления.

Отметим, что для представлений над телом, содержащим свободные подгруппы, любое каноническое представление является точным.

5. Необходимым условием представимости является выполнение теоремы о высоте. В этом случае при некотором h все слова алгебры имеют вид $u_1^{k_1}u_2^{k_2}\ldots u_l^{k_l}$, где $l \leqslant h$, а $\{u_i\}$ — фиксированный набор слов. Необходимое и достаточное условие представимости формулируется как условие на множество векторов степеней $\vec{k} = \langle k_1, \ldots, k_l\rangle$. Оно означает, что множество таких $\langle k_1, \ldots, k_l\rangle$, что $u_1^{k_1}\ldots u_l^{k_l} = 0$, должно задаваться системой экспоненциальных диофантовых уравнений.

Поясним условие теоремы. Пусть A — квадратная матрица. Тогда (ij)-й элемент матрицы A^n для любого n имеет вид $\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i^n P_i(n)$, где λ_i — элемент из конечного алгебраического расширения K основного поля $P_i \in K[x]$. Таким образом, равенство нулю слова данного типа означает равенство нулю всех компонент соответствующего оператора, и необходимость условий теоремы получается из раскрытия скобок.

Пример. Известно, что все решения уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = 1$ $(d \neq k^2)$ имеют вид (x_n, y_n): $x_n + \sqrt{d}y_n = (x_0 + \sqrt{d}y_0)^n$, где (x_0, y_0) — минимальное решение. Множество решений имеет логарифмическую плотность, и ряд Гильберта указанной ниже алгебры трансцендентен:

$$\begin{aligned}
&CA^xB^yD = 0, \quad \text{если} \ \ x^2 - dy^2 = 0,\\
&C^2 = D^2 = AC = BC = DC = DB = DA = 0,\\
&BA = AD = CB = CD = 0.
\end{aligned}$$

(Это алгебра подслов множества слов вида CA^xB^yD, где $x^2 - dy^2 \neq 0$.)

Итак, вопрос о представимости мономиальной алгебры сводится к следующей проблеме: *является ли данное множество множеством нулей некоторого экспоненциального диофантова полинома от нескольких переменных*. Известно, что эта проблема алгоритмически неразрешима. Алгоритмически неразрешима также проблема распознавания наличия натурального нуля у такого полинома. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 2.30. *Проблема изоморфизма и проблема равенства рядов Гильберта двух мономиальных подалгебр матричных алгебр алгоритмически неразрешимы.* □

Можно ограничиться матрицами размера 1000×1000 над $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_9]$ (см. [4]).

6. Что касается классификации представлений, то ручными задачами являются только описание представлений 1-порождённой мономиальной алгебры и 2-порождённой мономиальной алгебры с нулевым умножением. Задача классификации неприводимых представлений мономиальной алгебры имеет смысл только в первичном случае и является ручной только для алгебр вида A_u [4].

3. Теорема о независимости и неуменьшаемые слова

Утверждения типа теоремы о независимости проясняют, как отражаются свойства матричных единиц на комбинаторике слов. На данной проблематике можно понять, какие комбинаторные конструкции соответствуют структурной теории.

И. Херстейн так сформулировал общую схему структурных рассуждений:

1. Докажите теорему для тел.
2. Затем переходите к примитивным кольцам, сводя утверждение с помощью теоремы плотности к матричным кольцам.
3. Отсюда получите теорему для полупростых колец; теперь мы знаем её для R/J.
4. Остаётся прояснить вопрос для радикала.

Эта структурная схема имеет хорошее комбинаторное отражение в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Множество лексикографически неуменьшаемых слов в PI-алгебре A имеет ограниченную высоту над множеством слов, степень которых не превышает сложности алгебры A.*

Доказательство. Пусть m — минимальная степень тождеств алгебры A, $n = \mathrm{PIdeg}(A)$ — сложность A. Поскольку A имеет ограниченную высоту над множеством слов степени не выше m, достаточно показать, что если $|u|$ — нециклическое слово длины, большей n, то при достаточно больших k слово u^k есть линейная комбинация лексикографически меньших слов.

Шаг 1. Рассмотрим правый A-модуль M, заданный образующей v и соотношениями $vW = 0$, где $W \prec u^{\infty/2}$ (т. е. W меньше некоторой степени u). Здесь через $u^{\infty/2}$ обозначается бесконечное вправо слово с периодом u, через $\prec$ — отношение лексикографического порядка. Наша цель — показать, что $Mu^k = 0$ при некотором k.

В самом деле, в этом случае некоторая степень u^k линейно представима меньшими словами. В силу теоремы Ширшова о высоте множество неуменьшаемых слов имеет ограниченную высоту над множеством Y_m — множеством слов степени не выше m. А если любая достаточно большая степень нециклического слова длины, большей чем $n = \mathrm{PIdeg}(A)$, линейно представима меньшими словами, то слова длины, большей чем n, можно исключить из Y_m.

Шаг 2. Соответствие $t\colon vs \to vus$ задаёт корректно определённый эндоморфизм модуля M, поэтому M можно рассматривать как $A[t]$-модуль. Наша цель — показать, что $Mt^k = 0$ при некотором k или, что то же самое, $\bar{M} = M \otimes \mathbb{F}[t, t^{-1}] = 0$.

Шаг 3. Если $Mt^k \in M \cdot J(\operatorname{Ann} M)$, где $J(\operatorname{Ann} M)$ — радикал Джекобсона аннулятора, то $Mt^{lk} \in M \cdot J(\operatorname{Ann} M)^l$, и по теореме Брауна о нильпотентности радикала $Mt^{lk} = 0$ при достаточно большом l. (Воспользовавшись центральностью t в $A[t]$, можно обойтись и теоремой Амицура о локальной нильпотентности радикала.) Поэтому, переходя к модулю M над фактор-алгеброй $B = A[t]/J(\operatorname{Ann} M)$, можем считать, что $J(\operatorname{Ann} M) = 0$.

Шаг 4. Используя примарное разложение, сводим доказательство к случаю, когда M есть точный модуль над первичным кольцом B.

Шаг 5. Элементы центра $Z(B)$ не имеют аннулятора, поэтому мы можем по ним локализовать и, заменив $Z(B)$ его алгебраическим расширением, прийти к случаю, когда B — алгебра матриц порядка k над полем, а $\bar{M}$ — k-мерное векторное пространство. При этом $k \leqslant n$.

Шаг 6. Поскольку M есть векторное пространство размерности, меньшей чем $|u|$, набор векторов $\vec{v} = \vec{v}\,u_0, \vec{v}\,u_1, \ldots, \vec{v}\,u_{n-1}$ линейно зависим (u_i есть начальное подслово длины i слова u, u_0 есть пустое слово). Таким образом, имеет место равенство

$$\sum_{i\in I} \lambda_i \vec{v}_i u_i = 0, \tag{1}$$

где $I \subseteq \{0, \ldots, n-1\}$, $\lambda_i \in \mathbb{F} \setminus 0$.

Каждому u_i поставим в соответствие слово $u^{(i)}$ так, что $u_i u^{(i)} = u^{|u|}$. Нетрудно показать, что все $u^{(i)}$ лексикографически сравнимы. Пусть $u^{(j)}$ — наименьшее из тех $u^{(i)}$, которые участвуют в формуле (1). Перепишем равенство (1) в виде

$$\vec{v}_j u_j = \sum_{i\in I\setminus\{j\}} \beta_i \vec{v}_i u_i, \tag{2}$$

где $\beta_i = -\alpha_i/\alpha_j$. Но тогда

$$\vec{v}u^{|u|} = \vec{v}_j u_j u^{(j)} = \sum_{i\in I\setminus\{j\}} \beta_i \vec{v}_i u_i u^{(j)}. \tag{3}$$

Если $i \in I \setminus \{j\}$, то $u^{(j)} \prec u^{(i)}$ и $u_i u^{(j)} \prec u_i u^{(i)} = u^{|u|}$, поэтому $v u_i u^{(j)} = 0$. Таким образом, все члены в правой части равенства (3) нулевые. Следовательно, $\vec{v} u^{|u|} = 0$, что означает равенство нулю модуля N. $\square$

Замечание. Мы завершили доказательство без ссылок на теоремы типа теоремы о независимости. Между тем такие ссылки сокращают рассуждения последнего шага. В самом деле, применив конструкцию 2 из раздела 3.1.5, мы получаем минимальное ненулевое правое сверхслово $vu^{\infty/2}$, что противоречит следствию 3.59 из теоремы о независимости.

Прокомментируем доказательство. Модуль M очень похож на неприводимый модуль. Имеется параллелизм рассуждений, связанных с рассмотрением таких модулей и с рассмотрением слов, линейно не представимых меньшими. Модуль M можно определить с помощью левых сверхслов, имеющих начиная с некоторого места период u; t означает оператор сдвига. Периодическое слово есть собственный вектор для оператора t с собственным значением u. Принадлежность радикалу Джекобсона означает, помимо всего прочего, отсутствие ненулевых собственных значений. Рассмотрение левых сверхслов позволяет показать нильпотентность $J(A[t])$. Отметим, что аналогия между структурными и комбинаторными рассуждениями ещё во многом остаётся неясной.

Чтобы лучше выявить структурно-комбинаторный параллелизм, мы дадим и другое доказательство этой теоремы, не использующее структурной теории.

Замечание. Первоначальное доказательство ограниченности высоты над множеством слов степени не выше сложности [2, 4] основывалось на создании лексикографически минимальных подслов *внутри* обрабатываемых объектов. Такой подход лучше с точки зрения получения оценок. Только сейчас, в данной работе, удалось реализовать изначальный подход автора, связанный с построением лексикографически минимальных *начальных* подслов: создаются «нарушения», «плохие» нарушения откачиваются в конец, затем «нарушения разглаживаются» и «хорошие» остаются в начале. (Нарушение является «хорошим», если оно приводит к уменьшению лексикографического типа исходного слова.)

3.1. Вспомогательные утверждения. Общий план

В этом разделе мы приводим некоторые вспомогательные утверждения, которые позволяют переходить от комбинаторных свойств алгебр к структурным.

Далее $u \sqsubseteq v$ означает, что слово u есть подслово в v, а $u \sqsubset v$ — что слово u есть собственное подслово в v. Рассмотрим периодическое слово u^∞. Слово u считаем *нециклическим*, т. е. u не является степенью другого слова. Пусть $|u| = n$. Определим алгебру A_u^F (или просто алгебру A_u, когда ясно, какое основное поле F имеется в виду) как мономиальную алгебру, все ненулевые слова которой есть подслова в u^∞. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2 ([2, 4]). $\mathrm{Var}(A_u^F) = \mathbb{M}_n^F$. $\square$

Доказательство основано на построении эпиморфизма на алгебру матриц и мономорфизма в алгебру матриц над кольцом многочленов. Автомат, представляющий алгебру A_u^F, устроен следующим образом. Имеется цикл, на котором написано слово u. Ненулевые слова A_u^F — это в точности те слова, которые можно прочитать по этому циклу. Представление строится так. Каждой вершине цикла ставится в соответствие базисный вектор $\vec{e_i}$, а букве a_j — сумма $\sum \lambda_i E_{i,i+1}$, которая берётся по таким i, что из i-й вершины цикла выходит стрелка, помеченная буквой a_j.

Отметим, что каждая первичная мономиальная PI-алгебра совпадает с одной из алгебр вида A_u^F.

Нам также понадобится следующая лемма.

Лемма 3.3 (о вычёркиваниях и приписках). *Пусть $t = t_1 v t_2 \subset u^\infty$, а слово v является циклически сопряжённым к u. Тогда для всех $k \geqslant 0$ выполняется $t_1 v^k t_2 \subset u^\infty$. В частности, $t_1 t_2 \subset u^\infty$ и $t_1 v^2 t_2 \subset u^\infty$.* □

Замечание. Лемма о вычёркиваниях и приписках, которая позволит получать явные оценки, является комбинаторным фактом, соответствующим унитарной замкнутости многообразия, порождённого алгеброй матриц.

В теореме 3.2 утверждается, что с помощью тождества сложности меньше n можно нарушить периодичность в последовательности периода n. Из теоремы 3.2 выводятся следующие утверждения (см. [4]).

Лемма 3.4 (о порче периода). *Пусть u — нециклическое слово длины n, и пусть f — полилинейное тождество сложности меньше n и степени p. Тогда можно указать слова $t_0, \ldots, t_{p+1}$ со следующими свойствами*:

1) $t = t_0 \ldots t_{p+1} \sqsubset u^\infty$;
2) *слово t линейно представимо по модулю $T(f)$ словами вида $t_\sigma = t_0 t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(p)} t_{p+1}$, такими что $t_\sigma \not\sqsubset u^\infty$*;
3) *при этом каждое такое t_σ содержит подслово, лексикографически меньшее слова u^2*;
4) $2n \leqslant t_i \leqslant 3n$ *для всех i.*

Таким образом, тождество сложности n позволяет разрушать период длины больше n.

Доказательство. Из теоремы 3.2 следует существование слова $t = t_0 t_1 \ldots t_p t_{p+1} \sqsubset u^\infty$, линейно представимого по модулю $T(f)$ словами $t_\sigma = t_0 t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(p)} t_{p+1} \not\sqsubset u^\infty$, не содержащимися в u^∞. Применив лемму 3.3 о вычёркиваниях и приписках, можно добиться нужных ограничений на длины слов t_i.

Осталось установить наличие подслова, лексикографически меньшего чем u. Заметим, что достаточно показать наличие подслова, меньшего чем u^2. Пусть слово u представлено в виде $u = e_i f_i$, причём $|e_i| = i$ (и $|f_i| = n - i$). Тогда e_i называется *i-началом слова u*, а f_i — *i-концом*. Между концами и началами есть взаимно-однозначное соответствие. Поскольку u нециклично, все его циклически сопряжённые различны. Слова $f_i u$ при разных f_i начинаются с разных мест периода или разных слов, являющихся циклически сопряжёнными к u. Поэтому все $f_i u$ попарно лексикографически сравнимы и образуют линейно упорядоченное множество. Тем самым на множествах концов f_i и начал e_i также индуцируется порядок. Пусть N — соответствующая нумерация каждого из этих множеств числами от 1 до n, где $n = |u|$. При этом $N(e_i) = N(f_i)$.

Элементы t_i разрезают периодическую последовательность в различных местах периода. Тем самым возникает набор начал $\{e^\alpha\}$ (среди которых могут быть совпадающие) и соответствующий набор концов $\{f^\alpha\}$ слова u. Перестановке σ отвечает слово t_σ и вместе с ним — другое соответствие между множествами $\{e^\alpha\}$ и $\{f^\alpha\}$.

Если при этом какому-то $e^\alpha = e_i$ отвечает $f^\beta = f_j$, причём $f_j < f_i$, то $e_i f_j u \prec e_i f_i u = u^2$, и в силу замечания, сделанного в начале доказательства леммы 3.4, слово t_σ содержит подслово, меньшее u. Если же какому-то $e^\alpha = e_i$ отвечает $f^\beta = f_j$, и при этом $f_j > f_i$, то найдётся и такое $e^{\alpha'} = e_{i'}$, что ему отвечает $f^{\beta'} = f_{j'}$ и $f_{j'} < f_{i'}$, и мы опять вернулись к предыдущей ситуации.

В самом деле, ясно, что $\sum N(e^\alpha) - \sum N(f^\alpha) = 0$, поскольку каждому началу слова u, входящего в t, соответствует его конец. Поэтому сумма разностей порядковых номеров начал и соответствующих им концов в слове t_σ равна нулю. Следовательно, наличие положительного члена влечёт наличие отрицательного и наоборот.

С другой стороны, если t_σ не является подсловом в u^∞, то в данной сумме ненулевые члены найдутся, поскольку какому-то началу будет соответствовать конец, не дополняющий его до u. Лемма доказана. $\square$

Точно так же доказывается следующее утверждение.

Предложение 3.5. *Пусть f — полилинейное тождество степени p и сложности меньше n, $T(f)$ — соответствующий T-идеал, u — циклическое слово длины n. Тогда слово $(u^2tu^2)^{2(p+1)}$ линейно представимо по модулю $T(f)$ словами, содержащими подслова вида αrt, $|\alpha| = |u|$, $\alpha \succ u$, и вида β, $|\beta| = |u|$, $u \succ \beta$.* $\square$

Итак, с помощью «порчи периода» можно создавать подслова, лексикографически меньшие периода. Однако это происходит *где-то внутри*. Наша основная цель — создать такой кусок *в начале*.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.6 (о тиражировании). *Пусть f — полилинейное тождество алгебры A степени p, $D = \{d_j\}$ — множество слов степени не выше p (включая пустое слово Λ) от образующих алгебры A и элементов c_i, $C = \{c_i\}$ — выделенный набор. Тогда для любого натурального R набор $\{(c_i d_j)^R,\ i = 1, \ldots, |C|,$ $j = 1, \ldots, |D|\}$ также выделенный. ($|M|$ — число элементов множества M.)*

Доказательство. Каждое слово длины не меньше $l(\{c_i\})$ линейно представимо словами вида $d_k c_i e_k$, d_k, где e_k — произведение образующих. Воспользуемся этим фактом, а также тем, что каждое слово, имеющее достаточно высокую степень по $\alpha = \{c_i\}$, нужным образом представимо в силу теоремы Ширшова о высоте. $\square$

3.1.1. Общая схема доказательства

Мы считаем, что слово u меньше всех циклически сопряжённых к нему. Пусть f — полилинейное тождество алгебры A степени p и сложности n. В силу теоремы Ширшова каждое неуменьшаемое слово есть произведение не более чем $\mathrm{ht}(A)$ степеней слов u_i, причём $|u_i| \leqslant p$. Поэтому достаточно доказать, что достаточно большая степень нециклического слова u длины, большей n, линейно представима меньшими словами по модулю $T(f)$. Тогда слишком большая степень слова u не может быть подсловом неуменьшаемого слова, и можно исключить u из базиса Ширшова.

С помощью тождества f можно разрушать период и создавать «сбои» — положительные (связанные с подсловами, большими u) и отрицательные (связанные с подсловами, меньшими u).

Если в слове t_σ первым идёт «отрицательный сбой», то $t_\sigma \prec u^k = t_{\mathrm{id}}$. Поэтому прежде всего нас интересуют t_σ, которые начинаются с «положительного сбоя».

Общая идея доказательства заключается в следующем. Если «положительные сбои» унести в конец или как-то иначе от них избавиться, то степень слова u удастся уменьшить. «Положительные сбои» как бы «гасятся»«отрицательными». Если, идя слева направо, создать несколько систем последовательных «положительных сбоев», которые «гасятся» дополнительными системами «отрицательных сбоев», после чего «положительные сбои» перекачать вправо, то не все «отрицательные сбои» скомпенсируются, а появление «отрицательного сбоя» впереди «положительного» ведёт к уменьшению порядка всего слова.

Схема создания этих образований такова. Будем осуществлять нарушение периода, идя справа налево. Тогда ранее созданное не повлияет на свойства последующего. (Работа ведётся с левым лексикографическим порядком.)

Далее, пусть $t_\sigma = V_+V_-$, $V_+ \succ u^k, V_- \prec u^k$ и пусть мы добились появления слова $W = (u^h t_\sigma)^s$, где s достаточно большое. Применив лемму о порче периода к слову W, мы создадим образование вида $V_+^2V_+^1V_-^1V_-^2$. (Знак символизирует увеличение или уменьшение лексикографического порядка по сравнению со степенью слова u.)

Можно создавать (с помощью леммы о тиражировании) образования с любым числом этажей и последовательность таких образований, идущих справа налево. В полугрупповом случае, если бы V_- компенсировало V_+, отправка V_+ направо всё бы решила. Однако компенсация происходит только в линейных комбинациях. Кроме того, отправка «позитива» направо осуществляется с помощью тождества. А оно может содержать члены, в которых не меняются первые позиции, но «проворачиваются» остальные. Поэтому приходится работать так: по модулю «хвостов тождеств» (индукция по степени тождества) лексикографический тип всего слова уменьшается, а «хвост» образует «гнездо», позволяющее принимать начало. Итоговая индукция ведётся по наборам позиций и «хвостам» частичных тождеств. Общая схема рассуждений такова: «испортить—откачать—разгладить».

Естественно строить не образования вида $(u^h t_\sigma)^s$, а образования вида

$$\left(u^h \sum_{\sigma:\, t_\sigma \succ u^k} \mu_\sigma t_\sigma\right)^s,$$

применять к ним лемму о порче и получать аналогичное двухэтажное образование. Таким образом, на каждом шаге возникает всего одно образование — линейная комбинация мономов. Поэтому такие образования создаются через равные промежутки (при проходе справа налево) и, поскольку образование одно, возникает степень вида $(ut)^s$, к которой применяется лемма о порче и создаётся образование для следующего этажа.

Итак, слово u^k представимо по модулю лексикографически меньших слов линейной комбинацией вида

$$R_1 = \sum_i \lambda_{i1} S_i^{1+} u^2 T_i^{1-},$$

где $S_i^{1+} \succ u$, $T_i^{1-} \prec u$. Тогда слово $u^{(k+4)p}$ линейно представимо по модулю лексикографически меньших слов элементом

$$(u^2 R u^2)^p = u^2 \sum_i \lambda_{i1} S_i^{1+} u^2 T_i^{1-} u^2.$$

Применив лемму о порче 3.4, получим, что $u^{(k+4)p}$ линейно представимо по модулю меньших слов элементом

$$\sum_j \lambda j_2 S_j^{2+} \sum_i \lambda_{i1} S_i^{1+} u^2 T_i^{1-} T_j^{2-}.$$

Продолжая этот процесс, в итоге имеем, что слово $u^{k(4p)^s}$ линейно представимо по модулю меньших слов элементом

$$\sum_{j_s} \lambda j_s S_j^{s+} \ldots \sum_{i_1} \lambda_{i1} S_i^{1+} u^2 T_i^{1-} \ldots T_{j_s}^{s-}.$$

Итак, нужное образование создано. Разумеется, можно создать также несколько таких образований, идущих подряд.

3.1.2. Комбинаторное доказательство теоремы о неуменьшаемых словах

Перейдём к формальным конструкциям. Начнём с чисто комбинаторного, но не совсем конструктивного доказательства, затем займёмся его конструктивизацией.

Пусть f означает тождество сложности $n = \mathrm{PIdeg}(A)$, $p = \deg(f)$. Первый шаг проведём как в предыдущем доказательстве. Рассмотрим правый A-модуль M, заданный образующей v и соотношениями $vW = 0$, где $W \prec u^{\infty/2}$ (т. е. W меньше некоторой степени слова u). Здесь через $u^{\infty/2}$ обозначается бесконечное вправо слово с периодом u (реже так обозначается слово, бесконечное влево), через $\prec$ — отношение лексикографического порядка. Соответствие $\tau\colon vs \to vus$ задаёт корректно определённый эндоморфизм модуля M, поэтому M можно рассматривать как $A[\tau]$-модуль. Наша цель — показать, что $Mt^k = 0$ при некотором k. Мы можем считать, что $\operatorname{Ann} M = 0$ (иначе переходим к фактор-алгебре $A/\operatorname{Ann} M$).

Пусть I — максимальный однородный τ-инвариантный подмодуль с ненильпотентным фактором. Такой существует, поскольку для каждого конечного набора однородных компонент и возрастающей цепочки однородных подмодулей соответствующая цепочка однородных подпространств стабилизируется. Далее можно осуществить предельный переход, используя соображения компактности. Пусть $N = M/I$. Модуль N обладает следующим свойством «выглаживания».

Предложение 3.7.

1. *Для любого однородного элемента r, такого что $u^{\infty/2}r \neq 0$, существует однородный элемент s, удовлетворяющий условию $u^{\infty/2}rs = u^{\infty/2}u^k = \tau^k \cdot u^{\infty/2}$. Соответственно, $u^{\infty/2}u^l rs = u^{\infty/2}u^{k+l} = \tau^{k+l} \cdot u^{\infty/2}$.*
2. *В этом случае*
$$u^{\infty/2}u^p(u^l rsu^m)^h u^q = u^{\infty/2}u^{h(k+l+m)+p+q} = \tau^{h(k+l+m)+p+q} \cdot u^{\infty/2}.$$

Доказательство. Первое утверждение сразу следует из свойств модуля N и τ-инвариантности, второе есть непосредственное следствие первого. □

Из леммы 3.4 о порче периода и утверждения 2 предыдущего предложения легко получается следующее утверждение.

Предложение 3.8. *Пусть $u^{\infty/2}Ru^3 \neq 0$ и элемент R однороден. Тогда существуют слово $v \prec u^2$, $|v| = 2|u|$, однородные элементы r, s и число m, такие что $u^{\infty/2}rRvs = u^{\infty/2}u^m$.*

Доказательство. Пусть h и k таковы, что $u^{\infty/2}Ru^3H = u^{\infty/2}u^k$. Ясно, что для любого q справедливо равенство $u^{\infty/2}(Ru^3H)^q = u^{\infty/2}u^{kq}$. Применив лемму 3.4 о порче периода, получим такие v, r и s', что $v \prec u^2$, $|v| = 2|u|$, $u^{\infty/2}rRvs \neq 0$. Остаётся применить предыдущее предложение к элементу $r_1 = rRvs'$, взять такое s_1, что $u^{\infty/2}r_1s_1 = u^{\infty/2}u^{k_1}$, и положить $s = s's_1$. □

Суммируя результаты предыдущих предложений, получаем следующее утверждение.

Предложение 3.9.

1. *Пусть $u^{\infty/2}Ru^3 \neq 0$. Тогда для любого q существуют такие наборы $\{R_i\}_{i=1}^q$, $\{v_i\}_{i=1}^q$, $\{s_i\}_{i=1}^q$, $\{T_i\}_{i=1}^q$, что*
   а) $v_i \prec u^2$, $|v_i| = 2|u|$,

б) $T_i = R_i T_{i-1} v_i s_i$,

в) $u^{\infty/2} T_i = u^{\infty/2} u^{k_i}$,

при этом $u^{\infty/2} T_{i-1} v_i s_i = 0$.

2. *Кроме того,* $u^{\infty/2} u^l T_n T_{n-1} \dots T_1 = u^{\infty/2} u^{\sum k_i + l}$. □

Теперь рассмотрим произведение $W = T_1 \dots T_m$, где $m = \deg(A)$. Мы хотим представить W в виде $W = W_1 \dots W_m$ так, что для любого $\sigma \in S_m \setminus \mathrm{Id}$ элемент $W_\sigma = W_{\sigma(1)} \dots W_{\sigma(m)}$ имел бы вид $T_1 \dots T_q v S$, где $v \prec u$.

Воспользуемся идеей «перекачки» [4]. Для любого $\sigma \in S_m \setminus \mathrm{Id}$ имеем

$$u^{\infty/2} W_\sigma = u^{\infty/2} T_1 \dots T_q v S = u^{\infty/2} u^{\sum\limits_{i=1}^{q} k_i + l} v S = 0.$$

Поскольку в алгебре A имеется полилинейное тождество степени m, при некоторых $\lambda_\sigma \in \mathbb{F}$ справедливо равенство

$$W = \sum_{\sigma \in S_m \setminus \mathrm{Id}} \lambda_\sigma W_\sigma.$$

Поэтому $u^{\infty/2} W$ также равно нулю. С другой стороны, $u^{\infty/2} W = u^{\infty/2} u^{\sum k_i}$, и поэтому N — нулевой модуль. Получили противоречие, которое и требуется для доказательства теоремы 3.1.

Перейдём к построению W_i. Пусть

$$r_i = R_i R_{i-1} \dots R_1, \quad S_i = v_1 s_1 v_2 s_2 \dots v_i s_i.$$

Тогда $r_i s_i = T_i$ и при $j > i$ имеет место равенство

$$r_i s_j = r_i s_i v_{i+1} s_{i+1} \dots v_j s_j = T_i v_{i+1} q_{ij},$$

так что $u^{\infty/2} r_i s_j = 0$.

Теперь положим

$$W_1 = R_1,\ W_2 = S_1 R_2, \dots,\ W_k = S_{k_1} R_k, \dots,\ W_m = S_m.$$

Пусть i — минимальное целое, такое что $\sigma(i) \neq i$. Тогда $\sigma(i) > i$ и

$$W_\sigma = W_1 \dots W_{i-1} W_j Q = T_1 \dots T_{i-1} v_i q_{i-1,j} R_j Q = T_1 \dots T_{i-1} v_i P,$$

$v_i \prec u^2$. Отсюда

$$u^{\infty/2} W_\sigma = u^{\infty/2} u^{\sum\limits_{l=1}^{i-1} k_l} v_i P = 0,$$

что и требуется для доказательства основной теоремы.

Замечание. Если есть разреженное тождество g степени m'

$$g = \sum_{\sigma \in S_{m'}} \lambda_\sigma x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 \dots x_{\sigma(m')},$$

то можно брать произведение в другом порядке: $T_{m'} u^{s_1} T_{m'-1} u^{s_2} \dots T_1$. При работе с разреженным тождеством надо вместо x_i подставлять R_i, а вместо y_i — промежутки между ними.

3.1.3. Конструктивизация доказательства

Нам необходимо избавиться от неконструктивных рассуждений, связанных с максимальным градуированным подмодулем I с ненильпотентным фактором. Вместо этого надо явно указывать подмодули, факторизация по которым для нас достаточна, и множество элементов, подлежащих «разглаживаниям».

Определения. Прежде всего видоизменим понятие *выделенности*. Назовём набор однородных элементов $\{f_1, \ldots, f_s\}$ *выделенным*, если Mu^k при некотором k линейно представим (над $\mathbb{F}$) элементами вида $M\sum_i f_i \sum_j \tau^j R_{ij}$. Набор $\{f_i\}$ называется *k-выделенным*, если Mu^m линейно представим при некотором m элементами вида

$$M\sum_i f_i \sum_{j_1} \tau^{j_1} R_{1ij_1} \ldots f_i \sum_{j_k} \tau^{j_k} R_{kij_k}.$$

Пусть I — подмодуль в M. Тогда *выделенность по модулю I* и *k-выделенность по модулю I* определяются естественным образом: в линейные комбинации могут входить ещё элементы из I. Элемент R *разглаживается по модулю I*, если существует такой s, что $u^{\infty/2}Rs = u^{\infty/2}u^q + \xi$, где $\xi \in I$. Через $\langle f_1, \ldots, f_k\rangle$ обозначается подмодуль, порождённый множеством $\{Mf_i\}_{i=1}^k$.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 3.10.

1. *Если R разглаживается по модулю $\langle f_1, \ldots, f_k\rangle$, то набор $\{R\} \cup \{f_i\}_{i=1}^k$ является выделенным. Верно и обратное: любой элемент f_i из выделенного набора разглаживается по модулю идеала, порождённого остальными элементами.*
2. *При любом m выделенный набор является m-выделенным.* □

Обратимся теперь к конечномерному случаю (ситуации конечномерного фактора M). Пусть модуль I конечномерен и $I = \langle f_1, \ldots, f_s\rangle$. Пусть любой элемент разглаживается по модулю I. Тогда рассуждения предыдущего раздела показывают, что $Mu^k \in I$ при некотором k. Тогда f_1 разглаживается по модулю $I' = \langle f_2, \ldots, f_s\rangle$, а потому любой элемент разглаживается по модулю I', и дело завершает индукция по числу образующих модуля I. Можно свести PI-случай к конечномерному с помощью разреженных тождеств или тождеств Капелли, например методами работы [9]. Однако наша цель — провести рассуждения «на микроуровне» и получить эффективные конструкции и оценки.

Переведём рассуждения раздела 3.1.2 на более удобный язык.

Предложение 3.11 (о кратной выделенности). *Пусть $P_1, \ldots, P_\alpha$ — выделенные по модулю N наборы. Тогда при достаточно большом m элемент модуля $u^{\infty/2}u^m$ линейно представим по модулю N элементами вида*

$$u^{\infty/2}p_1q_1u^{k_1}p_2q_2u^{k_2} \ldots p_\alpha q_\alpha u^{k_\alpha},$$

где $p_i \in P_i$.

Доказательство. Индукция по α. При некотором m_i в силу выделенности набора P_i элемент $u^{\infty/2}u^{m_i}$ линейно представим элементами вида $p_{ij}q_{ij}u_{k_i}$, $p_{ij} \in P_i$. Положим $m = \sum_{i=1}^{\alpha} m_i$. В силу предположения индукции элемент

$$u^{\infty/2}u^m = u^{\infty/2}\prod_{i=1}^{\alpha-1} u^{m_i}u^{m_\alpha}$$

линейно представим элементами вида

$$u^{\infty/2}u^{m_1}\prod_{i=2}^{\alpha} u^{m_i}p_{ij}q_{ij}u^{k_i},$$

где $p_i \in P_i$. Для завершения доказательства остаётся отметить, что $u^{\infty/2}u^{m_1}$ также линейно представим элементами вида $p_{1j}q_{1j}u_{k_1}$, $p_{1j} \in P_1$. $\square$

Теперь займемся построением многоэтажных образований W_i и T_i из раздела 3.1.2. Из леммы 3.4 о порче периода непосредственно следует предложение 3.12.

Предложение 3.12 («наращивание этажей башни»). *Пусть элемент f выделен по модулю N. Тогда существуют такие $R_i, s_i, v_i \in \mathrm{Wd}(A)$, $i = 1, \ldots, h < p!$, что*

1) $v_i \prec u^2$, $|v_i| = 2|u|$;
2) *набор* $\{R_i f v_i s_i\}_{i=1}^{h}$ *является выделенным по модулю* N. $\square$

Предложение 3.13 («обрушение башни»). *Пусть последовательность элементов f_i такова, что*

$$f_{i+1} = R_{i+1}f_i v_{i+1}s_{i+1},$$

причём $v_i \prec u^2$, $|v_i| = 2|u|$. Допустим также, что все одноэлементные наборы $\{f_1\}, \ldots, \{f_m\}$ являются выделенными по модулю N, $m = \deg(A)$. Тогда для некоторого α верно, что $u^{\infty/2}u^\alpha \in \langle N\rangle$, и тем самым набор N выделенный.

Доказательство. Отметим, что каждый элемент f_i выглаживается по модулю N, и потому для некоторого r_i верно, что $f_i r_i \in N$. Рассмотрим элемент $W = f_1r_1 \ldots f_m r_m$. Он представим в виде $W = W_1 \ldots W_m$ так, что для любого $\sigma \in S_m \setminus \mathrm{Id}$ элемент $W_\sigma = W_{\sigma(1)} \ldots W_{\sigma(m)}$ имеет вид $f_1r_1 \ldots f_q r_q vS$, где $v \prec u$. Ситуация полностью аналогична рассмотренной в конце предыдущего раздела, и доказательство предложения завершается теми же рассуждениями. $\square$

Предыдущие два предложения позволяют переходить от разглаживания элемента f по модулю $\langle N\rangle$ к выделенности набора N и таким образом осуществлять индукционный спуск. Пусть N — выделенный набор, $f \in N$, $N' = N \setminus \{f\}$. Из леммы 3.12 следует, что для некоторых $R_i, v_i, s_i \in \mathrm{Wd}(A)$, где $i = 1, \ldots, h < p!$ и $v_i \prec u^2$, $|v_i| = 2|u|$, набор $N' = N' \cup \{R_i f v_i s_i\}_{i=1}^{h}$ является выделенным. Положим $F_{N,i} = R_i f v_i s_i$.

Определим индуктивно систему наборов $\{N(i_1,\ldots,i_k)\}$. При этом дополнение $N(i_1,\ldots,i_k)\setminus N(i_1,\ldots,i_k-1)$ состоит из одного элемента $f_{i_1,\ldots,i_k}$, где k указывает на число «этажей». Начнём с наборов $N(i)$. Применим предложение 3.12 к выделенному набору, состоящему из одного слова u. Получается выделенный набор $N(l_1)=\{f_i\}_{i=1}^{l_1}$, где $f_i=R_ifv_is_i$, $i=1,\ldots l$, $l<p!$, $v_i\prec u^2$, $|v_i|=2|u|$.

Пусть наборы $N(i_1,\ldots,j)$ определены и набор $N(i_1,\ldots,i_k)$ выделенный. Тем самым элемент $f_{i_1,\ldots,i_k}\in N(i_1,\ldots,i_k)$ также определён. Тогда определён набор $N(i_1,\ldots,i_k,0)=N(i_1,\ldots,i_k)$, и равенство $f_{i_1,\ldots,i_k,j}=f_{N(i_1,\ldots,i_k),j}$ определяет систему элементов $\{f_{i_1,\ldots,i_k,j}\}_{j=1}^{p!}$. Положим

$$N(i_1,\ldots,i_k,j)=N(i_1,\ldots,i_k+1)\cup\{f_{i_1,\ldots,i_k,q}\}_{q=j}^{s}.$$

Теперь доказательство основной теоремы завершается m-кратной индукцией, устроенной следующим образом.

База индукции: набор $N(0)$ является выделенным.

Шаг индукции с номером $i_1,\ldots,i_m$ означает, что уже доказана выделенность наборов $N(i_1),N(i_1,i_2),\ldots,N(i_1,\ldots,i_k)$.

Индукционный переход:

1) строится выделенный набор $N(i_1,\ldots,i_k,0)$, система элементов $\{f_{i_1,\ldots,i_k,q}\}_{q=1}^{s}$ и наборов $N(i_1,\ldots,i_k,j)$ (выделенность которых пока не доказана);
2) если $i_\alpha>l_\alpha$, то добавочный набор $\{f_{i_1,\ldots,i_\alpha}\}$ исключается из рассмотрения. Это означает выделенность набора $N_{i_1,\ldots,i_{\alpha-1}+1}$;
3) в силу предложения 3.13 об обрушении башни при $m=\deg(A)$ элемент $f_{i_1,\ldots,i_m}$ можно исключить из набора и он при этом остаётся выделенным.

Иными словами, набор $N(i_1,\ldots,i_s)$ заменяется на набор с теми же s начальными индексами и ещё одним. Когда же число индексов становится равным m, элементы $f_{i_1,\ldots,i_m}$ с m индексами по одному вычёркиваются. Легко видеть, что индукционный процесс наращивания числа индексов при $\alpha<m=\deg(A)$ и вычёркивания элемента при $\alpha=m=\deg(A)$ корректно определён и завершает доказательство основной теоремы, приводя к выделенности пустого набора. □

Замечания.

1. Индуктивный процесс можно описать рекурсивно. Если элемент f_i выделен по модулю N_1, то для множества $F'=\{f_{11},\ldots,f_{1,l_1}\}$ можно провести процесс, только что описанный для F, но на один этаж меньше. Исходное число этажей равно n.
2. Рост длин выражений $f_{i_1,\ldots,i_k}$ в этом процессе таков. Каждый шаг увеличивает длины в p раз. При этом число шагов (равное числу элементов строящихся наборов $\{f_{i_1,\ldots,i_q}\}$) равно $p!^m$. Отсюда получаем нижнюю оценку на длины уменьшаемых слов порядка
$$p^{p!^m}\approx\exp\bigl((p/e)^{pm}\bigr).$$
Вероятно, с помощью перекачки (см. [4]) оценку можно улучшить и до чисто экспоненциальной.

3. С помощью техники, развитой в [9], ситуация сводится к конечномерному случаю и упрощается. Мы выбрали самый элементарный путь.

3.1.4. Комбинаторика слов конечной длины. Эффекты периодичности

В вопросах бернсайдовского типа важную роль играют комбинаторные эффекты, связанные с периодичностью. Почти периодичность и равномерная рекуррентность также существенны для наших рассмотрений. Последовательное применение этих понятий позволяет получить простые доказательства таких известных теорем теории колец, как теорема Ширшова об ограниченности высоты PI-алгебры, теорема Уфнаровского о независимости, теорема Размыслова—Кемера—Брауна о нильпотентности радикала конечно порождённой PI-алгебры и т. п.

Хочется обратить внимание на связь между периодичностью и лексикографической несравнимостью: если подстановка $u \to v$ приводит к результату, не сравнимому с исходным словом, то рассматриваемое вхождение слова v завершает периодический кусок. Многие трудности связаны с тем, что лексикографический порядок частичен. Однако имеет место своего рода альтернатива: квазипериодичность или лексикографическая сравнимость. Если $u \neq v$ и слова us и vs несравнимы, то слова us и vs имеют общий предпериод и квазипериод (см. [4] или определения после предложения 3.23).

Положительное решение проблем бернсайдовского типа означает возникновение периодичности. Рассмотрим её сперва в самом чистом виде, т. е. обратимся к периодическим последовательностям.

Свойства последовательности u^∞. Определим оператор δ, действующий на словах. Пусть слово u имеет вид $u = u'b$, где b — буква. Положим $\delta(u) = bu'$. Обозначим $m = |u|$.

Предложение 3.14. *Множество $\{\delta^k(u)\}$ есть множество слов, циклически сопряжённых к слову u. Пусть $u = v^q$, где слово v не является степенью. Тогда $\delta^k(u) = u$ тогда и только тогда, когда q делит k.* □

Следующее предложение связывает сдвиги слова u^∞ и оператор циклического сопряжения δ. Через u мы обозначаем слово, не являющееся степенью.

Предложение 3.15.

1. *Пусть $|v| = N|u| = |v'|$ и первая буква v' находится на расстоянии 1 справа от первой буквы v. Тогда $v' = \delta(v)$.*
2. *Если первая буква v' находится на расстоянии k справа от первой буквы v, то $v' = \delta^k(v)$.*
3. *Любые два подслова в u^∞ длины $N|u|$ являются циклически сопряжёнными.*
4. *Любые два подслова u^∞ длины $|u| - 1$ совпадают тогда и только тогда, когда расстояние между их начальными буквами кратно периоду.*

Из данного предложения вытекает следующее часто используемое утверждение.

Предложение 3.16.

1. *Начальное подслово длины* m *однозначно определяет слово из* A_{u^∞}. *Если начальные подслова длины* $|u|$ *у двух подслов* v *и* v' *сверхслова* u^∞ *совпадают, то одно из них является подсловом другого. Если* $|c| \geqslant |u|$, *а* d_1 *и* d_2 *лексикографически сравнимы, то по крайней мере одно из слов* cd_1 *и* cd_2 *не является подсловом в* u^∞.
2. *Начальные позиции расположений слова* v *длины больше* $|u|$ *в слове* u^∞ *отличаются на кратное периода.*
3. *Пусть* $|v| \geqslant |u|$, $v^2 \subset u^\infty$. *Тогда* v *является циклически сопряжённым степени слова* u. *Таким образом, в алгебре* A_{u^∞} *ненильпотентные слова — это в точности слова, циклически сопряжённые словам вида* u^k. □

Предложение 3.17. *Если все подслова длины* $|u|$ *в слове* W *являются подсловами в* u^∞, *т. е. циклически сопряжёнными* u, *то* $W \subset u^\infty$. *Иными словами, алгебра* A_u^F *задаётся набором определяющих соотношений длины не больше* $|u|$. □

Следующее утверждение является комбинаторным аналогом утверждения об унитарной замкнутости многообразия, порождённого матричной алгеброй.

Лемма 3.3 (о вычёркиваниях и приписках). *Пусть* $t = t_1vt_2 \subset u^\infty$, *где* v *является циклически сопряжённым к* u. *Тогда* $t_1v^kt_2 \subset u^\infty$ *для всех* $k \geqslant 0$. *В частности,* $t_1t_2 \subset u^\infty$ *и* $t_1v^2t_2 \subset u^\infty$.

Периодичность бесконечного слова означает инвариантность относительно сдвига. В случае односторонней бесконечности возникает предпериод, а в конечном случае — эффекты, связанные с обрезанием. Именно это является ядром очень многих комбинаторных рассуждений. В качестве примеров можно привести доказательства гипотезы Шестакова, теоремы о независимости, теоремы Ширшова о высоте, совпадения ниль-радикала и радикала Джекобсона для мономиальных алгебр. Ниже собраны соответствующие комбинаторные леммы. Далеко не случайно они часто используются.

Предложение 3.18. *Пусть* $uW = Ws$. *Тогда* uW *— подслово в* u^∞. *Слово* W *имеет вид* u^nr, *где* r *— начальный сегмент слова* u.

Доказательство. Если W — начало uW, то для любого k слово u^kW есть начало слова $u^{k+1}W$. Следовательно, uW — начало в $u^{\infty/2}$. □

Следствие 3.19. *Если слово* u *одновременно является и началом, и концом* W, *то слова* u, W *имеют вид* $u = t(st)^l$, $W = t(st)^k$, $k \geqslant l$, *для некоторых* s *и* t. □

Следующее предложение аналогично предыдущему.

Предложение 3.20. $uW \succ Ws$ *тогда и только тогда, когда* $Ws \prec u^{\infty/2}$; $uW \prec Ws$ *тогда и только тогда, когда* $Ws \succ u^{\infty/2}$. □

Следствие 3.21. *Цепочка слов* $\mathcal{U} = \{u^k t\}_{k=0}^{\infty}$ *либо строго монотонна относительно лексикографического порядка, либо квазипериодична с периодом* u (*т. е.* t *есть начало* $u^{\infty/2}$). $\square$

Следствие 3.22. *Пусть* u, v — *различные подслова в слове* W, $|u| \geqslant |v|$. *Фиксируем вхождение подслова* u. *Тогда выполняется одно из трёх утверждений*:

1) *подслова* u, v *сравнимы. Тогда замена меньшего слова на большее всегда ведёт к увеличению порядка*;
2) *одна из замен* $u \to v$, $v \to u$ *ведёт к увеличению порядка слова* W;
3) v *есть начало* u, *слово* W *оканчивается квазипериодическим куском с периодом* v *и наше вхождение слова* u *находится в этом куске.* $\square$

Предложение 3.23.

1. *Пусть* W — *бесконечное вправо слово,* $W = vuW' = vW'$. *Тогда* W *периодично с периодом* u *и предпериодом* v. *В частности, если* W *совпадает со своим правым концом, то оно периодично.*
2. *Пусть* W — *конечное слово,* $W = vuW'$ *и* vW' — *начало* W. *Тогда слово* W *имеет вид* $vu^k r$, *где* r — *начальный сегмент слова* u. *Иначе говоря, если слова* ut, vt *несравнимы, то они оба псевдопериодичны порядка не выше* $\max(|u|, |v|)$.
3. *Пусть* e_i — *собственные начала нециклического слова* u, *а* f_i — *его собственные концы. Тогда если* $f_1 u^2$ *сравнимо с* $f_2 u^2$, *то* $f_1 = f_2$; *если* $u^2 e_1$ *есть конец* $u^2 e_2$, *то* $e_1 = e_2$. $\square$

Определения. Слово $W = u^k$, где $k > 1$, называется *циклическим* или *периодическим*. Если $W = u^k r$, где r — начало u, то W называется *квазипериодическим*. Если $W = vu^k r$ (r — начало u), то слово W называется *псевдопериодическим*; v — его *предпериод*, а u — *период*. *Порядок слова* W есть минимально возможное значение $|v| + |u|$. Если $W = vu^k rs$, где r — начало слова u, то слово W *слабопсевдопериодично* и его *порядок* есть минимально возможное значение $|u| + |v| + |s|$. Если $W = vu^k$, то W называется *предпериодическим* словом. Отметим, что слово псевдопериодично порядка m, если и только если существует автомат, имеющий m состояний, который может его напечатать.

Понятие квазипериодичности связано с эффектами обрезания слов в различных местах периода.

Следующее предложение полезно для осуществления индукционного спуска.

Предложение 3.24. *Если псевдопериодическое слово не является квазипериодическим, то при выбрасывании первой буквы его порядок уменьшается на единицу.* $\square$

О левой и правой квазипериодичности говорить не имеет смысла, поскольку квазипериодические слова порядка m — это в точности подслова периодических слов периода m, и если $W = u^k r$, где r — начало u, то $W = sv^k$, где v является циклически сопряжённым к u, а s есть конец v. При этом $v = \delta^{|s|}(u)$. С псевдопериодичностью дело обстоит иначе. Фактически мы определили (и будем преимущественно использовать) псевдопериодичность слева. Можно показать, что если $|W| \geqslant 2m$, то псевдопериодичность порядка не выше m справа и слева влечёт квазипериодичность.

Определение 3.25. Слово называется *m-собственным*, если любое его начало является псевдопериодическим порядка не выше m, а оно само таким не является. m-собственное слово называется *минимальным*, если любой его конец тоже является псевдопериодическим порядка не выше m.

Предложение 3.26. *Каждое m-собственное слово содержит единственное минимальное m-собственное слово, являющееся его концом. Если одно m-собственное слово содержит другое, то они содержат общее минимальное m-собственное слово, являющееся концом обоих.* □

Предложение 3.27. *Пусть l — количество букв в алфавите, $X(R)$ — количество m-собственных слов длины R, $X_k(m)$ — количество m-собственных слов, не содержащих k-й степени слова длины не больше m. Пусть $T(m, R)$ — количество m-собственных слов длины не больше m. Тогда*

1) $X(m) < l^{m+1}m$, $T(m, R) < Rml^{m+1}$;
2) $X_k(m) < l^m(l-1)m \cdot km = l^m(l-1)m^2k$.

Доказательство. Начальный участок длины m может быть выбран l^m способами. Имеется m способов его разбиения на предпериод и период. Последняя буква может быть выбрана $l-1$ способом. Наконец, m-собственное слово, не содержащее k-й степени, имеет длину не выше mk. □

Предложение 3.28.

1. *Минимальное m-собственное слово u имеет длину не меньше $m+1$ и не больше $2m$.*
2. *Количество $Y(m)$ таких слов не превосходит $l^m(l-1)m$.*

Доказательство. По предложению 3.24 и индукции можно считать, что начало или конец слова u длины $|u|-1$ квазипериодичен порядка ровно m. Остаётся воспользоваться леммой 3.29 о перекрытиях. Пункт 2) есть непосредственное следствие пункта 1). □

Замечание. Интересно было бы провести точное вычисление количества m-собственных и минимальных m-собственных слов.

Перекрытия слов. Изучим теперь расположение подслов внутри слова.

Лемма 3.29 (о перекрытиях). *Если два периодических слова периодов m и n имеют одинаковое подслово длины $m + n -$ НОД(m, n), то они составлены из одинаковых подслов.* □

Из этой леммы выводятся факты, представляющие самостоятельный интерес. Мы их суммируем в виде следующего предложения (подробнее см. [4]).

Предложение 3.30.

1. *Пусть даны две периодические последовательности периодов m и n соответственно, $m \geqslant n$. Тогда если эти две последовательности имеют общий кусок длины $2m$, то они совпадают.*
2. *Если два псевдопериодических слова порядка не выше n и порядка не выше m соответственно имеют общий участок длины $m+n-1$, то их объединение есть псевдопериодическое слово порядка не выше $\max(m,n)$.*
3. *Два m-собственных подслова не могут иметь общий участок длины $2m$.*
4. *Если два одинаковых квазипериодических (псевдопериодических) подслова порядка m имеют общий участок длины m, то их объединение квазипериодично (псевдопериодично) того же порядка.*
5. *Два одинаковых m-собственных подслова не могут иметь общего участка длины не меньше $m+1$.*
6. *Никакие три одинаковых m-собственных подслова не могут содержать общий символ.* □

Квазипериодические участки слов. Назовём m-собственное слово u *m-концом*, если любой его начальный участок квазипериодичен порядка не выше m. Если при этом u — минимальное m-собственное слово, то u называется *минимальным m-концом*.

Предложение 3.31.

1. *Два различных m-конца не могут иметь общего участка длины $m+1$. В частности, один m-конец не может содержать другой.*
2. *Количество минимальных m-концов не превосходит $l^m(l-1)$.*

Доказательство. Пункт 1 следует из предложения 3.30, пункт 2 — из того, что m-конец однозначно определяется последней буквой и последним периодом. □

3.1.5. Сверхслова в алгебрах

Большинство комбинаторных результатов данного пункта основывается на рассмотрении бесконечных слов или сверхслов. Здесь собраны основные технические факты и конструкции, относящиеся к сверхсловам в алгебрах.

Определение 3.32. *Сверхсловом* называется слово, бесконечное в обоих направлениях; слово, бесконечное только налево, называется *левым сверхсловом*, а бесконечное только направо — *правым сверхсловом*.

Определение 3.33. Через u^∞ обозначается сверхслово с периодом u, через $u^{\infty/2}$ — правое (левое) сверхслово с периодом u, начинающееся (заканчивающееся) словом u.

Из контекста всегда будет ясно, какое одностороннее сверхслово имеется в виду — правое или левое, поэтому мы не вводим специальных обозначений.

Например, запись $u^{\infty/2} \cdot s \cdot v^{\infty/2}$ подразумевает, что $u^{\infty/2}$ — левое сверхслово, а $v^{\infty/2}$ — правое.

Правые сверхслова (в отличие от конечных слов, среди которых есть несравнимые) образуют линейно упорядоченное множество относительно левого лексикографического порядка, а левые — относительно правого. Мы рассматриваем по преимуществу двусторонние и правые сверхслова.

Мы не можем говорить о значении сверхслова в алгебре, но можем говорить о его равенстве или неравенстве нулю, а в некоторых случаях — и о линейной зависимости.

Лемма 3.34 ([4]). *Пусть C — произвольное семейство слов неограниченной длины. Тогда существует сверхслово W, каждое подслово которого есть подслово слова из C.*

Определение 3.35.

1. Сверхслово W называется *нулевым*, если у него есть нулевое подслово конечной длины, и *ненулевым*, если все его подслова конечной длины ненулевые.
2. Конечный набор правых сверхслов $\{W_i\}$ называется *линейно зависимым*, если существуют такие $\{\lambda_i\}$, не все равные нулю, что для всех достаточно больших k выполняется соотношение $\sum \lambda_i (W_i)_k = 0$ (через $(W)_k$ обозначается начальный отрезок длины k в слове W).
3. Пусть W — правое сверхслово в алгебре A, M — правый A-модуль, $m \in M$. Мы говорим, что $mW \neq 0$, если $m(W)_k \neq 0$ для всех k. Иначе $Mw = 0$.
4. Пусть $\{W_i\}$ — конечный набор правых сверхслов в алгебре A, M — правый A-модуль, $\{m_i\} \subseteq M$. Мы говорим, что $\sum m_i W_i = 0$, если для всех достаточно больших k выполняется соотношение $\sum m_i (W_i)_k = 0$.

Аналогичные определения можно дать для левых сверхслов и левых модулей.

Если не оговорено противное, мы рассматриваем случай, когда алфавит $\mathcal{A}$ конечен. При этом множество сверхслов (левых, правых, двусторонних) над $\mathcal{A}$ образует компактное пространство $\mathcal{A}^\infty$ в топологии тихоновского произведения, индуцированной дискретной топологией в $\mathcal{A}$. Правые сверхслова относительно левого лексикографического порядка (а левые относительно правого) образуют линейно упорядоченное множество, при этом для каждого подмножества существует инфимум и супремум.

Из леммы 3.34 вытекает следующее предложение.

Предложение 3.36.

1. *В конечно порождённой ненильпотентной алгебре A существуют ненулевые сверхслова.*
2. *Пусть A — конечно порождённая алгебра, M — конечно порождённый правый A-модуль. Тогда если $MA^k \neq 0$ для всех k, то существуют $m \in M$ и правое сверхслово W, такие что $mW \neq 0$.* $\square$

Из определений нулевого сверхслова и тихоновской топологии следует, что множество нулевых сверхслов открыто, а множество ненулевых замкнуто. Из существования точной верхней и нижней грани у любого множества правых сверхслов вытекает следующее предложение.

Предложение 3.37.

1. *Пусть W — сверхслово. Тогда среди правых сверхслов, все подслова которых содержатся в W, есть как максимальное, так и минимальное.*
2. *Пусть $mA^k \neq 0$ для всех k. Тогда множество правых сверхслов W, таких что $mW \neq 0$, содержит как максимальное, так и минимальное сверхслово.*
3. *Если алгебра A не нильпотентна, то среди ненулевых правых сверхслов в A есть как максимальное, так и минимальное.* □

Определение 3.38.

1. Набор слов $\{w_i\}$ называется *выделенным*, если фактор-алгебра $A/\mathrm{Id}(\{w_i\})$ нильпотентна.
2. Набор сверхслов $\{W_i\}$ называется *выделенным*, если набор слов $\{w_i\}$, получающийся заменой каждого сверхслова W_i на его конечное подслово w_i, является выделенным.

Пусть u — слово в алгебре A, максимальное среди всех ненулевых слов в A длины не больше n. К сожалению, u может не продолжаться до слова большей длины. Поэтому, чтобы применять технику сверхслов, мы будем пользоваться следующей конструкцией.

Конструкция 1. Пусть A — алгебра с образующими $a_s \succ \ldots \succ a_1$. Положим $a_1 \succ x$ и рассмотрим свободное произведение $A' = A * F\langle x\rangle$.

Тогда каждое слово u в алгебре A есть начало некоторого сверхслова в алгебре A'. Если u — максимальное слово в алгебре A среди всех слов длины не выше $|u|$, то максимальное сверхслово в A', начинающееся с u, является сверхсловом в A. Если u — сверхслово в A, каждое начало которого обладает этим свойством, то максимальное сверхслово в A' есть u.

Для работы с модулями полезна следующая конструкция.

Конструкция 2. Пусть A — алгебра с образующими $a_s \succ \ldots \succ a_1$, M — конечно порождённый правый A-модуль с образующими $m_k \succ \ldots \succ m_1$. Положим $m_1 \succ a_s$, $a_1 \succ x$. Положим $\tilde{A} = A \oplus M$, $0 = m_i m_j = a_i m_j$ для всех i, j. Далее, $\mu\alpha$ ($\mu \in M$, $\alpha \in A$) есть результат действия элемента α на μ, а $\alpha\beta$ ($\alpha, \beta \in A$) определяется как произведение в A. Обозначим через A'' фактор свободного произведения $\tilde{A} * F\langle x\rangle/I$, где идеал I порождён элементами вида xm_i.

В алгебре A'' максимальное правое сверхслово начинается с m_k, любое слово из $\tilde{A}$ продолжается до сверхслова в A''. Если $MA^k \neq 0$ для всех k, то максимальное сверхслово в $\tilde{A}$ начинается с некоторого m_i. Если u — максимальное слово в алгебре A среди всех слов длины не выше $|u|$, действующих ненулевым образом на образующие модуля, то при подходящей перенумерации m_i максимальное сверхслово в A'' является сверхсловом в $\tilde{A}$. Если u — сверхслово в $\tilde{A}$, каждое начало которого обладает этим свойством, то максимальное сверхслово в A'' есть u.

Отметим, что если алгебра не имеет нильпотентного идеала, то любое слово продолжается до сверхслова.

При исследовании вопросов нильпотентности часто пользуются следующим соображением.

Предложение 3.39. *Если в алгебре (полугруппе) нет ненулевого периодического сверхслова, то все её слова нильпотентны.* □

3.2. Теорема Ширшова о высоте и базисы алгебр

Теорема Ширшова о высоте даёт в первом приближении описание базисов ассоциативных PI-алгебр. Данный раздел посвящён дальнейшим её уточнениям в свете исследования нормальных базисов.

Теорема о высоте означает возможность приведения к кусочно периодическому виду. Из неё непосредственно следует положительное решение проблем бернсайдовского типа, таких как локальная конечность алгебраических PI-алгебр (проблема Куроша) и, в частности, локальная нильпотентность ниль-алгебр ограниченного индекса. Кроме того, из теоремы Ширшова вытекает ограниченность размерности Гельфанда—Кириллова.

Определение 3.40. Пусть $Y = \{u_i\}$ — набор слов. *Высотой множества слов W относительно Y* называется наименьшее h, такое что любое слово $w \in W$ представимо в виде $u_{i_1}^{k_1} u_{i_2}^{k_2} \ldots u_{i_r}^{k_r}$, где $r \leqslant h$. *Алгебра A имеет высоту h над Y*, если A линейно представима множеством слов, имеющим высоту h над Y. При этом Y называется *базисом Ширшова алгебры A*.

Теорема Ширшова о высоте. *Пусть A — конечно порождённая PI-алгебра степени m, Y — множество слов степени не выше m. Тогда A имеет ограниченную высоту над Y.* □

В связи с теоремой Ширшова возникает вопрос, над какими множествами слов Y алгебра A имеет ограниченную высоту. Это частный случай вопроса об устройстве базиса в PI-алгебре. Ответ даёт следующая теорема.

Теорема 1.11 (А. Я. Белов). *Множество слов Y является базисом Ширшова алгебры A тогда и только тогда, когда для любого слова u длины не выше $m = \mathrm{PIdeg}(A)$ — сложности алгебры A — множество Y содержит слово, циклически сопряжённое некоторой степени слова u.*

Доказательство. Заметим, что $(uv)^n = u(vu)^{n-1}v$. Если Y содержит два циклически сопряжённых слова v_1 и v_2, то одно из них можно удалить из базиса. Таким образом, достаточность условия теоремы следует из теоремы 3.96, которая будет доказана ниже. Покажем необходимость. Пусть $|u| \leqslant n$ и u нециклично. Согласно теореме 3.2 $A_u \in \mathrm{Var}(A)$ и, следовательно, A_u является фактор-алгеброй алгебры A. Из-за ненильпотентности A_u проекция множества Y должна содержать ненильпотентный элемент. По предложению 3.16 множество ненильпотентных слов в алгебре A_u есть множество слов, циклически сопряжённых к степеням слова u. Поэтому Y содержит слово требуемого типа. □

Замечание. Ограниченность высоты PI-алгебры над множеством слов степени не выше сложности была анонсирована также Г. П. Чекану [28]. Оценка на длину слов из Y (с m до $m-1$) впервые была снижена И. В. Львовым [17].

Нас будут интересовать также оценки на высоту h. Идея состоит в том, что если высота большая, то слово линейно представимо меньшими словами.

Определение 3.41. Слово W называется *m-разбиваемым*, если его можно разбить на m лексикографически убывающих частей:

$$W = w_1 w_2 \ldots w_m, \quad \text{где} \quad w_1 \succ w_2 \succ \ldots \succ w_m.$$

3.2.1. Другое (равносильное) определение m-разбиваемости

Слово W m-разбиваемо, если оно имеет вид $s_0 v_1 s_1 v_2 \ldots s_{m-1} v_m s_m$, где $v_1 \succ v_2 \succ \ldots \succ v_m$.

Следующее предложение объясняет важность понятия m-разбиваемости.

Предложение 3.42 (А. И. Ширшов).

1. *Пусть слово W является m-разбиваемым. Тогда любое слово, получающееся из W нетождественной перестановкой w_i, лексикографически меньше W.*
2. *Если в алгебре A выполнено тождество*

$$x_1 \ldots x_m = \sum_{\sigma \neq \mathrm{id}} \lambda_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(m)}$$

степени m, то слово W представимо в виде линейной комбинации меньших слов.

Таким образом, в PI-алгебре степени m слова, не представимые в виде линейной комбинации меньших слов, m-разбиваемыми не являются, и достаточно проверить, что множество m-разбиваемых слов имеет ограниченную высоту.

3.2.2. Оценки в теореме о высоте

В данном разделе используется техника, развитая в разделе 3.1.4.

Предложение 3.43. *Если слово W имеет вид $W = s_0 v s_1 v \ldots s_{m-1} v s_m$, а слово v содержит m попарно лексикографически сравнимых подслов (возможно, перекрывающихся), то W является m-разбиваемым.*

Доказательство. Выберем из первого вхождения v самое старшее подслово, из второго — второе по величине и т. д. Таким образом, из слова W мы выбрали убывающую цепочку уже из неперекрывающихся подслов. □

Итак, слово, содержащее n лексикографически сравнимых подслов, n-встречаемо только в n-разбиваемом слове.

Определение 3.44. Назовём *m-типом слова W* его m-собственное начало, а в случае, когда W псевдопериодично порядка m, назовём m-типом слова W само W. *Минимальным m-типом* назовём минимальное m-собственное подслово собственного m-начала.

Следствие 3.45. *Слово, не являющееся m-разбиваемым, не содержит m неперекрывающихся подслов одинакового m-типа (а стало быть, и минимального m-типа).* □

Итак, нам нужно уметь находить m попарно лексикографически сравнимых подслов. Следующая лемма чрезвычайно важна. Она устанавливает альтернативу «псевдопериодичность — лексикографическая сравнимость». Эта альтернатива лежит в основе получения оценок для высоты, доказательства теоремы о независимости, теоремы о совпадении ниль-радикала и радикала Джекобсона мономиальной алгебры и т. д.

Лемма 3.46.

1. *Пусть $u_0 = W$, $W = v_1u_1 = v_2u_2 = \ldots = v_mu_m$, $|v_i| = i$. Тогда справедливо одно из следующих двух утверждений:*
   а) *слова u_i лексикографически сравнимы и образуют цепь;*
   б) *слово W псевдопериодично с предпериодом v_i для некоторого i и периодом s, причём $v_is = v_j$; порядок W не превосходит m.*
2. *Пусть u — нециклическое слово, $u^{(i)}$ — его собственные концы. Тогда $u^{(i)}uu$ образуют цепь.*

Доказательство. Пункт 1 непосредственно следует из предыдущего предложения. Пункт 2 следует из леммы о том, что если в квазипериодическом слове есть квадрат подслова длины, большей периода, то это подслово есть степень периода. □

Следствие 3.47.

1. *Пусть $|v_i| \leqslant m$ для всех i и если $i \neq j$, то $v_i \neq v_j$. Тогда либо множество слов $\{v_it\}$ линейно упорядочено относительно лексикографического порядка, либо t квазипериодично порядка не выше m.*
2. *Определим $(zv)^{(i)}$ с помощью равенства $(zv)_i(zv)^{(i)} = zv$. Пусть $|zv| > R > m$. Тогда либо $(zv)_R$ псевдопериодично порядка не выше m, либо $\left((zv)^{(i)}\right)_R$ образуют линейно упорядоченное множество.* □

Отметим, что W может быть правым сверхсловом. Если оно не предпериодично, то все его концы попарно различны. Этот случай нам понадобится при доказательстве теоремы о независимости.

Псевдо- и квазипериодичность естественно возникают в проблемах бернсайдовского типа. Следующая лемма является непосредственным следствием из предыдущих предложений.

Лемма 3.48.

1. *Пусть $|z| = R$, z псевдопериодично порядка не выше m. Тогда z содержит $[R/m]$-ю степень слова длины не больше m.*
2. *В условиях леммы* 3.46 *пусть W бесконечно, $\mathcal{K}$ — множество таких индексов i, что $(u)^{(i)} = V$, где V — некоторый конец сверхслова W, k_0 — минимальное число из $\mathcal{K}$, $v = v_{k_0}$. Тогда существует такое слово s, что для любого $k \in \mathcal{K}$ выполнено равенство $v_k = vs^{n_k}$, где $n_k = (k - k_0)/|s|$.* □

Следствие 3.49. *Если $|t| \geqslant mk$, то t содержит либо k-ю степень слова длины не выше m, либо m подслов, образующих цепь.* □

Эти подслова перекрываются, но если само t имеет m неперекрывающихся вхождений в слово W, то W является m-разбиваемым.

Из предложения 3.27 вытекает следующее предложение.

Предложение 3.50.

1. *Количество m-типов слов, не содержащих k-й степени слова длины не больше m, не превосходит $l^{m+1}m^2k$.*
2. *Каждое слово длины не меньше mk либо является псевдопериодичным порядка m и содержит k-ю степень слова длины не больше m, либо не совпадает со своим m-типом.*
3. *Если слово W имеет длину, большую чем $l^{m+1}m^4k^2$, то в слове W можно указать $l^{m+1}m^3k$ кусков длины mk, из них m будут иметь одинаковый m-тип.* □

Следствие 3.51. *Если слово W имеет длину, большую чем $l^{m+1}m^4k^2$, то либо W является m-разбиваемым, либо какая-то комбинация из $n < m$ букв повторяется k раз подряд.* □

Отметим, что без использования m-типов оценка получается порядка l^{mk}: в слове длины m^2kl^{mk} найдутся m непересекающихся одинаковых подслов длины mk каждое.

Следствие 3.52. *Пусть A — l-порождённая PI-алгебра степени m. Пусть все слова от образующих длины не выше m нильпотентны и индекс нильпотентности равен k. Тогда A нильпотентна и индекс нильпотентности равен $l^{m+1}m^4k^2$.* □

Замечание. Вопрос о локальной конечности алгебраических PI-алгебр был поставлен А. Г. Курошем и решён положительно И. Капланским. Его доказательство было неконструктивным. Первое комбинаторное доказательство было получено А. И. Ширшовым как следствие из теоремы о высоте. Однако оригинальное доказательство теоремы о высоте давало только рекурсивную оценку. Впоследствии эта оценка была улучшена А. Т. Колотовым (до повторной экспоненты) и А. Я. Беловым (до экспоненты [39]). Для случая характеристики нуль Нагатой и Хигманом была показана нильпотентность ниль-алгебр (не обязательно конечно порожденных) индекса n. Ими была получена экспоненциальная оценка на индекс нильпотентности. Ю. П. Размыслов улучшил эту оценку до n^2. (В случае положительной характеристики глобальная нильпотентность не имеет места.) Локальная конечность алгебраических PI-алгебр Ли в случае характеристики нуль была доказана А. И. Кострикиным. Е. И. Зельманов доказал это в общем случае и показал глобальную нильпотентность энгелевой алгебры Ли в случае характеристики нуль.

Приведённые оценки можно улучшить, если воспользоваться следующими соображениями. Во-первых, для обеспечения m-разбиваемости достаточно установить повторяемость минимального m-типа. Кроме того, у одинаковых m-типов нет тройных перекрытий, поэтому нет нужды резать слово на куски длины mk и устанавливать повторение m-типов кусков. Перекрытия одинакового типа могут быть двойные, а кусков в mk раз меньше, чем длина исходного слова. Приведём улучшенные оценки.

Предложение 3.53.

1. *Если слово W имеет длину, большую чем $2l^{m+1}m^2k$, то либо W является m-разбиваемым, либо какая-то комбинация из $n < m$ букв повторяется k раз подряд. В только что приведённом следствии оценку $l^{m+1}m^4k^2$ можно заменить на оценку $2l^{m+1}m^2k$.*
2. *Слово, не являющееся m-разбиваемым, содержит менее чем $2ml^{m+1}$ подслов, являющихся m-концами.*
3. *Слово, не являющееся m-разбиваемым, разбивается на ml^{m+1} псевдопериодических порядка не выше m частей.* □

Таким образом, слово c, не являющееся m-разбиваемым, имеет вид

$$c = c_0\omega_0c_1\omega_1\ldots\omega_{r-1}c_r,$$

где ω_i — слова длины не меньше $2m$ каждое, квазипериодические порядка не выше m, c_i не содержат таких подслов, произведение ω_i и первой буквы слова c_i не является псевдопериодическим порядка m. Следовательно, $r < ml^{m+1}$ и $\sum|c_i| < ml^{m+1}$.

Представим ω_i в виде $\omega_i = u_i^{k_i}S_i$, где S_i — начало ω_i, $|u_i| \leqslant m$. Мы имеем следующий результат, уточняющий теорему А. И. Ширшова о высоте.

Теорема 3.54. *Пусть A — l-порождённая PI-алгебра степени m. Тогда A имеет ограниченную функцией $H(m,l)$ высоту над множеством слов степени не выше m. При этом $H(m,l) < 3ml^{m+1}$.*

Замечание. Рассмотрев концы слов ω_i, можно показать, что $H(m,l) < 2ml^{m+1}$.

Нас будет интересовать возникновение q-й степени слова, содержащего данную букву. Из предыдущей теоремы вытекает следующее предложение.

Предложение 3.55. *Пусть A — l-порождённая PI-алгебра степени m. Пусть буква z имеет $(q+3)ml^{m+1}$ вхождений в слово W. Тогда W линейно представимо словами, каждое из которых содержит подслово вида $(zv)^q$.* □

Данное предложение нам понадобится для получения оценок на высоту относительно множества слов степени не выше сложности.

В заключение отметим, что указанная техника работает и для полуколец, в том числе с некоммутативным сложением. Имеют место следующие результаты.

Теорема 3.56.

1. *Пусть A — l-порождённое полукольцо с коммутативным сложением, в котором выполняется тождество $x^m = 0$. Тогда A нильпотентно индекса не выше $2l^{m+1}m^3$.*
2. *Пусть A — произвольное l-порождённое полукольцо, в котором выполняется тождество $x^m = 0$. Тогда A нильпотентно индекса не выше $m^m \cdot 2l^{m+1}m^3 + m$.*

Подробнее эти результаты обсуждаются в [3, 4].

Замечание. В дальнейшем оценки были улучшены И. И. Богдановым. При этом он использовал (со ссылками) результаты и технику работ [3, 4].

3.2.3. Базисы Ширшова и структурно-комбинаторный параллелизм

Предложение 3.57. *Пусть $\{u_i\}$ — множество попарно несравнимых подслов экстремального слова. Тогда они линейно независимы.* □

Из леммы 3.46 вытекает следующая теорема.

Теорема 3.58 (о независимости для сверхслов). *Пусть W — минимальное ненулевое сверхслово. Тогда выполняется одно из следующих условий*:

1) *слова $(W)_1, \ldots, (W)_n$ линейно независимы*;
2) *W псевдопериодично порядка не выше n. Его предпериод есть некоторое $(W)_i$, а период — один из концов $(W)_n$.*

Доказательство. Определим бесконечные слова $(W)^i$ с помощью равенства $W = (W)_i(W)^i$. Если условие 2) не выполняется, то множество $\{(W)^i\}$ является цепью. Пусть $\sum \alpha_i(W)_i = 0$, и пусть $(W)^j$ — минимальное $(W)^i$ для всех таких i, что $\alpha_i \neq 0$. Тогда $W = (W)_i(W)^i \succ (W)_i(W)^j$ при $i \neq j$ и $\alpha_i \neq 0$. Так как $(W)_j$ представимо линейной комбинацией $(W)_i$, слово $W = (W)_j(W)^j$ тоже представимо линейной комбинацией меньших слов. Но это противоречит тому, что W — минимальное ненулевое слово. □

Замечания.

1. В формулировке теоремы минимальность можно заменить на максимальность.
2. Если все подслова длины не выше n в слове W нильпотентны, то слова $(W)_1, \ldots, (W)_n$ линейно независимы.

Следствие 3.59.

1. *Пусть A — подалгебра алгебры $(n \times n)$-матриц, W — минимальное ненулевое (сверх)слово. Тогда W псевдопериодично порядка не выше n.*

2. *Пусть M — конечно порождённый A-модуль и $MA^k \neq 0$ при всех k. Тогда минимальное сверхслово в алгебре A'', получающейся с помощью конструкции 2 из раздела 3.1.5, псевдопериодично порядка не выше $n+1$ (единичка добавилась за счёт образующей модуля, стоящей перед словом из A).* □

Из теоремы о независимости для сверхслов и конструкции 1 раздела 3.1.5 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.60 (теорема о независимости, В. А. Уфнаровский). *Пусть*

1) *слово $W = a_{i_1} \ldots a_{i_n}$ является минимальным в левом лексикографическом порядке среди всех ненулевых произведений длины, не превосходящей n;*
2) *концы слова W нильпотентны.*

Тогда начальные подслова слова W линейно независимы. □

Эта теорема была доказана ранее В. А. Уфнаровским [24] и Г. П. Чекану [29].

Следствие 3.61 (гипотеза Шестакова).

1. *Пусть A — подалгебра алгебры матриц M_n, имеющая фиксированный набор образующих. Тогда если все слова степени не выше n нильпотентны, то алгебра A нильпотентна.*
2. *Пусть A — алгебра сложности n с фиксированным набором образующих. Тогда если все слова степени не выше n нильпотентны, то алгебра A локально нильпотентна.*

Доказательство. Алгебра A имеет точное представление операторами в n-мерном пространстве. Пусть $m_1, \ldots, m_n$ — базис этого пространства. Осталось применить конструкцию 2 и теорему о независимости для сверхслов. Для доказательства пункта 2 достаточно взять фактор по радикалу и воспользоваться представимостью. □

Пункт 1 данного следствия был впервые сформулирован И. В. Львовым. Им же [17] была замечена возможность редукции пункта 2 к пункту 1. Г. П. Чекану [30] сделал следующие наблюдения:

1) условие нильпотентности можно заменить квазирегулярностью значений некоторых многочленов,
2) линейно независимыми оказываются не только начала слова W, но и все его различные подслова.

Техника периодичности в бесконечных словах позволяет получить несколько более сильный результат.

Пусть W — максимальное ненулевое слово, и пусть его начальные подслова линейно зависимы, т. е. имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (W)_k = 0.$$

Пусть $\tilde{W} = \max\limits_{\alpha_k \neq 0}(W)^k$ (напомним, что $(W)^k$ — конец W, соответствующий $(W)_k$ — началу длины k, $W = (W)_k(W)^k$). Пусть $\mathcal{K}$ — множество таких k, что $\alpha_k \neq 0$, $\mathcal{K} \neq \varnothing$. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 3.62.

1. *$\tilde{W}$ периодично. Существует такое слово s минимальной длины, что $\tilde{W} = s^\infty$.*
2. *Пусть k_0 — минимальное число из $\mathcal{K}$, $v = (W)_{k_0}$. Тогда для любого $k \in \mathcal{K}$ выполнено равенство $(W)_k = vs^{n_k}$, где $n_k = (k - k_0)/|s|$.*
3. *При достаточно большом m имеет место соотношение*
$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \alpha_k v s^{m+n_k} = 0.$$
4. *Элемент*
$$x = \alpha_{k_0}^{-1} \sum_{k \in \mathcal{K},\ k > k_0} \alpha_k s^{n_k}$$
не является квазиобратимым. (*Элемент $x \in A$ называется* квазиобратимым, *если $1 + x$ обратим в алгебре $A \oplus 1$ с присоединённой единицей.*)

Доказательство. Пункты 1 и 2 следуют из леммы 3.48. Если $k \notin \mathcal{K}$, то $(W)_k \tilde{W} = 0$. Отсюда по определению нулевого бесконечного слова следует равенство нулю произведения слова $(W)_k$ и некоторого начального отрезка $\tilde{W}$, а следовательно, и некоторой степени s^p, поскольку $\tilde{W} = s^\infty$. Взяв в качестве m максимум из таких p, мы получаем пункт 3. Равенство $\sum\limits_{k \in \mathcal{K}} \alpha_k v s^{m+n_k} = 0$ можно переписать в виде $vs \sum\limits_{k \in \mathcal{K}} \alpha_k s^{n_k} = 0$. Отсюда непосредственно следует, что x не квазиобратим. $\square$

Следствие 3.63 (локальная теорема о независимости, Г. П. Чекану). *Пусть*

1) *слово $W = a_{i_1} \ldots a_{i_n}$ является минимальным при левом лексикографическом порядке среди всех ненулевых произведений длины, не превосходящей n;*
2) *если v_i — концы слова W, то для любых многочленов $f_i(x) \in xF[x]$, $\deg f_i(x) \leqslant n$, элементы $f_i(v_i)$ квазирегулярны.*

Тогда начальные подслова слова W линейно независимы.

В условиях данного следствия легко получить также, что множество попарно несравнимых концов экстремального слова линейно независимо.

Рассмотрим правый идеал, порождённый как модуль элементом u. Воспользуемся конструкцией 2 из раздела 3.1.5. Применив к алгебре A'' локальную теорему о независимости, получаем следующий результат.

Следствие 3.64 (Г. П. Чекану). *Если слово W удовлетворяет условиям 1), 2) и $uW \neq 0$, то элементы $u(W)_i$, $i = 1, \ldots n$, линейно независимы ($(W)_i$ обозначает начало слова W длины i).* $\square$

Назовём слово W *максимальным*, если оно удовлетворяет условию 1) теоремы о независимости.

Из следствия 3.22 вытекает такое утверждение.

Предложение 3.65. *Пусть W — максимальное слово.*

1. *Пусть u, v — различные подслова W, причём $|u| \geqslant |v|$. Пусть они изображают один и тот же элемент алгебры. Тогда они лексикографически несравнимы (т. е. $u = vs$). Если $v \rhd u$, то расположению слова u отвечает псевдопериодический конец слова W.*
2. *Пусть $(W)_k$ является k-началом слова W. Тогда если $(W)_p(W)_q \neq 0$, $p + q \leqslant |W|$, то $(W)_p(W)_q = (W)_{p+q}$.* □

Из утверждения 3.63 выводится также следующая теорема (см. [30]).

Теорема 3.66 («глобальная теорема о независимости», Г. П. Чекану). *Если слово W удовлетворяет условиям локальной теоремы о независимости, то все различные подслова в W линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $\sum \lambda_i U_i = 0$ — линейное соотношение между подсловами W. Выберем из множества $\{U_i\}$ подмножество $\mathcal{U}$ слов, лексикографически минимальных в множестве $\{U_i\}$, а в множестве $\mathcal{U}$ — слово U_j максимальной длины. Пусть $W = SU_jT$. Тогда $0 = \sum \lambda_i SU_i$, и SU_i либо равно нулю, либо есть начало слова W в силу условия 1) максимальности W среди ненулевых слов. Это противоречит локальной теореме о независимости. □

Пусть W — экстремальное сверхслово от матриц порядка n. Оно предпериодично порядка l, причём $l \leqslant n$. Пусть A — матрица, соответствующая букве a. Каждому её вхождению в сверхслово W отвечает его начало, заканчивающееся этим вхождением. Перед каждым вхождением буквы, меньшей чем a, стоит начало сверхслова W, зануляемое оператором A (в силу экстремальности W). Теперь отметим, что ранг оператора равен размерности образа, а коранг — размерности ядра.

Применив конструкцию 2 из раздела 3.1.5 и воспользовавшись теоремой о независимости для сверхслов, имеем следующее утверждение.

Предложение 3.67.

1. *Общее число вхождений буквы a в период и предпериод экстремального слова не превосходит ранга оператора A.*
2. *Общее число вхождений букв, меньших чем a, в период и предпериод экстремального слова не превосходит размерности ядра оператора A.* □

Следующее утверждение несколько усиливает результаты Г. П. Чекану.

Следствие 3.68.

1. *Пусть $A_1, \ldots, A_s$ — $(n \times n)$-матрицы, $k_i = \mathrm{rk}(A_i)$. Тогда если все слова, содержащие для каждого i не более k_i вхождений буквы a_i, нильпотентны, то матрицы $A_1, \ldots, A_s$ порождают нильпотентную алгебру.*

2. *Аналогичное утверждение будет верно, если зафиксировать s и потребовать нильпотентности слов, имеющих не более $n - k_s$ вхождений букв, отличных от a_s, и ровно k_s вхождений a_s.*

Доказательство. Первое утверждение непосредственно следует из пункта 1 предложения 3.67. Для доказательства второго утверждения достаточно рассмотреть порядок на образующих a_i, при котором образующая a_s является старшей. □

Замечание. Можно рассмотреть вхождения произвольного слова u в сверхслово W, начальная буква которых находится на расстоянии не больше l от левого края W. Число таких вхождений слова u не меньше ранга соответствующего оператора, а число вхождений слов, лексикографически меньших u, — не меньше коранга. (Чтобы не считать вхождение слова и его начала дважды, рассматриваются подслова одинаковой длины $|u|$.) Формулировку утверждения, аналогичного следствию 3.68, мы предоставляем читателю.

Отметим, что доказательства теоремы о независимости, предложенные ранее (см. [24, 29]), достаточно трудны. Краткость и ясность появилась из-за прояснения связи периодичности и сдвигов. Кроме того, с помощью сверхслов можно получить также более простое доказательство теоремы о высоте. Экстремальные слова изучались также многими авторами (Де Лука и др.). Приведём замечательный результат Г. П. Чекану [32].

Теорема 3.69 (Г. П. Чекану). *Пусть слово W экстремально и нециклично, $n = |W|$. Тогда если $W^n \neq 0$, то алгебра A содержит нильпотент порядка, строго равного n.*

3.2.4. Другое доказательство гипотез Шестакова и Амицура

Конструкции данного раздела, связанные с приведением слов к нужному виду, в некотором роде параллельны конструкциям структурной теории. Свойствам матриц отвечают свойства периодических последовательностей.

Приведение слова к удобному виду обычно состоит в его выражении через линейную комбинацию лексикографически меньших слов и изучении неуменьшаемых слов. Например, если слово $t = t_1 \dots t_n$ является n-разбиваемым, $t_1 \succ \dots \succ t_p$, то для любой нетождественной перестановки $\sigma \in \mathrm{S}_p$ слово $t_\sigma = t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(n)}$ лексикографически меньше t. Таким образом, если в алгебре выполняется полилинейное тождество степени p, то слово t оказывается линейно представимо меньшими словами. Поэтому неуменьшаемое слово не является n-разбиваемым. Но мы видели, что множество всех не n-разбиваемых слов имеет ограниченную высоту. В частности, все не n-разбиваемые слова достаточной длины содержат степень подслова. Это обстоятельство служит основой для решения проблем бернсайдовского типа.

Часто бывает достаточно найти интересное подслово не обязательно в начале, а где угодно. Меньшее подслово обычно проще создать где-то внутри, проведя «сгущение» (хотя возможное увеличение порядка всего слова может вызывать психологические трудности). Основная идея, лежащая в основе соответствующей техники, состоит в том, что если где-то что-то увеличилось, то в другом месте что-то уменьшилось, поэтому достаточно устанавливать только наличие изменений.

Предложение 3.70. *Пусть T — линейно упорядоченное множество, $\vec{\tau} = \{\tau_i\}_{i=1}^{p}$ — вектор из T^p. Тогда для любой перестановки $\sigma \in \mathrm{S}_p$ верно одно из следующих утверждений:*

1) *для всех i τ_i и $\tau_{\sigma(i)}$ совпадают как элементы множества T;*
2) *найдутся i, для которого $t_i > t_{\sigma(i)}$, и j, для которого $t_j < t_{\sigma(j)}$.* □

Отметим, что если множество T является только частично упорядоченным, то предложение перестаёт быть верным, даже если в пункте 1) условие совпадения заменить условием несравнимости в смысле порядка в T. Поэтому нам понадобятся леммы, устанавливающие линейную упорядоченность некоторых подмножеств слов относительно $\succ$. Всё основывается на альтернативе: псевдопериодичность либо линейная упорядоченность. Приведём список соответствующих утверждений, вытекающих из доказанных ранее свойств псевдопериодических слов и слова u^∞ (см. предложение 3.16).

Предложение 3.71. *Пусть e_i — собственные начала нециклического слова u, а f_i — его собственные концы. Тогда если f_1u^2 сравнимо с f_2u^2, то $f_1 = f_2$, и если u^2e_1 есть конец u^2e_2, то $e_1 = e_2$.* □

Предложение 3.72.

1. *Пусть для всех i $|v_i| \leqslant n$ и $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$. Тогда верно одно из следующих утверждений:*
   а) *множество слов $\{v_it\}$ является линейно упорядоченным относительно лексикографического порядка;*
   б) *t квазипериодично порядка не выше n.*
2. *Определим $(zv)^i$ с помощью равенства $(zv)_i(zv)^i = zv$. Пусть $|zv| > R > n$. Тогда верно одно из следующих утверждений:*
   а) *$(zv)_R$ псевдопериодично порядка не выше n;*
   б) *$\big((zv)^i\big)_R$ образуют линейно упорядоченное множество.* □

Предложение 3.73. *Если все подслова длины $|u|$ в слове W являются подсловами в u^∞, т. е. циклически сопряжёнными к u, то $W \subset u^\infty$. Иными словами, алгебра A_u^F задаётся набором определяющих соотношений длины не больше $|u|$.* □

По леммам 3.3 и 3.4 тождество сложности n позволяет разрушать период длины больше n.

Предложение 3.74. *Если z_1 и z_2 не являются псевдопериодическими порядка не выше n, $z_1 \succ z_2$ и n-типы слов z_1 и z_2 различны, то z_1 имеет больший n-тип, чем z_2.* □

Теперь займёмся перестановками. Следующее предложение получается, если объединить предложения 3.70 и 3.72 о перестановках и о линейной упорядоченности.

Предложение 3.75. *Пусть* $u = (z)_n$, $e_i f_i = u$, $i = 1, \dots, p$, $z = uy$, z *не является псевдопериодическим порядка не выше* n. *Пусть* $\sigma \in \mathrm{S}_p$. *Тогда верно одно из следующих утверждений*:

1) $e_i f_{\sigma(i)} y = uy$ *для всех* i;
2) *найдутся* i, j, *при которых* $e_i f_{\sigma(i)} y \succ uy \succ e_j f_{\sigma(j)} y$. □

Нам будет удобнее пользоваться не соответствием $i \to \sigma(i)$, а соответствием $\sigma(i) + 1 \to \sigma(i+1)$. Это соответствие возникает при рассмотрении слова $t_\sigma = t_0 t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(p)} t_{p+1}$. Концу подслова $t_{\sigma(i)}$ соответствует начало подслова $t_{\sigma(i+1)}$. Переформулируем предыдущее предложение.

Предложение 3.76. *В условиях предыдущего предложения пусть* $\{e_i\}_{i=0}^{p}$ *нумеруются числами от* 0 *до* p, *а* $\{f_i\}_{i=1}^{p+1}$ — *числами от* 1 *до* $p+1$. *При этом* $e_i f_{i+1} = u$. *Пусть* $\sigma \in \mathrm{S}_p$. *Положим* $\sigma(0) = 0$, $\sigma(p+1) = p+1$. *Тогда верно одно из следующих утверждений*:

1) $e_{\sigma(i)} f_{\sigma(i+1)} y = uy$ *для всех* i;
2) *найдутся* i, j, *при которых* $e_{\sigma(i)} f_{\sigma(i+1)} y \succ uy \succ e_{\sigma(j)} f_{\sigma(j+1)} y$.

Если $x \succ z \succ y$, *то* $(x)_{|z|} \succ z \succ (y)_{|z|}$. □

Предложение 3.77. *Пусть для всех* i, $0 \leqslant i \leqslant p+1$, *выполняется* $|t_i| \geqslant n = |u|$, $t = t_0 \dots t_{p+1} \subset u^\infty$. *Тогда если* $t_\sigma = t_0 t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(p)} t_{p+1} \not\subset u^\infty$, *то слово* t_σ *содержит такие подслова* α *и* β, *что* $|\alpha| = |\beta| = |u| = n$ *и* $\alpha \succ u \succ \beta$.

Доказательство. По лемме о вычёркиваниях и приписках 3.3 все t_i можно считать достаточно длинными (например, $|t_i| > 10n$). Представим t_i в виде $t_i = f_i u^{k_i} e_i$, где $k > 2$, $e_i f_{i+1} = u$, $|e_i| < n$. Если $e_{\sigma(i)} f_{\sigma(i+1)} = u$ для всех i, то $t_\sigma = t_0 t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(p)} t_{p+1} \subset u^\infty$. Остаётся воспользоваться предыдущими предложениями. □

Приведём следствие, полезное в дальнейшее.

Предложение 3.78. *Пусть слово* z *не является псевдопериодическим порядка не выше* n, $u = (z)_n$, $|z| = K$. *Пусть* $zv \subset t_i$, $i = 1, \dots, p+1$,

$$t = t_0 \dots t_{p+1} \subset (zv)^\infty, \quad t_\sigma = t_0 t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(p)} t_{p+1} \not\subset (zv)^\infty, \quad \sigma \in \mathrm{S}_p.$$

Тогда слово t_σ *содержит такие подслова* α *и* β, *что* $|\alpha| = |\beta| = |z|$ *и* $\alpha \succ z \succ \beta$. *При этом если* α', β', z' *обозначают* n-*типы слов* α, β *и* z *соответственно, то* $\alpha \succ z \succ \beta$. □

Из предложений 3.78 и 3.4 вытекает предложение 3.5, позволяющее создавать подслова, лексикографически меньшие периода.

Замечания.

1. Путь к доказательству ограниченности высоты над множеством слов длины не выше сложности был таков. Вначале рассматривалась ситуация ма-

ленькой сложности. Легко заметить, что при нарушении периода в слове $(ab)^\infty$ возникают степени букв a и b. Эти степени можно собирать вместе с помощью процедуры «перекачки». В случае сложности 2 (разрушения периода длины 3) можно осуществлять «сгущение» старших букв. Затем возникла идея о понижении лексикографического порядка внутри периода. Таков путь к предложению 3.5.

2. В комбинаторике слов часто встречается такое рассуждение. Пусть $e_if_i = w$. Порядку на концах f_i соответствует порядок на началах e_i. Тогда если e_i умножается на конец f_j, больший, чем ему полагается (т. е. $f_j \succ f_i$), то $e_if_j \succ w$. Такая ситуация возникает при перестановке концов f_i.
3. Действие тождества полезно представлять себе как «недетерминированное T-преобразование», которое осуществляет переход от произведения $v_0v_1\dots v_mv_{m+1}$ к «худшему члену» линейной комбинации $\sum\limits_{\sigma\neq\mathrm{id}}\alpha_\sigma x_0x_{\sigma(1)}\dots x_{\sigma(m)}x_{m+1}$.

Выделенные наборы слов и операции над ними. Наша цель — добиваться появления внутри слова нужного подслова, поэтапно создавая промежуточные объекты.

Определение 3.79. Набор слов $\mathcal{W}$ мы называем *выделенным*, если алгебра $A/\mathrm{id}(\mathcal{W})$ нильпотентна, $l(\mathcal{W})$ обозначает индекс нильпотентности. (Комбинаторный смысл состоит в том, что любое слово длины не меньше $l(\mathcal{W})$ линейно представимо словами, содержащими подслово из $\mathcal{W}$.) Если любое слово длины не меньше $l_k(\mathcal{W})$ линейно представимо словами, имеющими k вхождений одного из слов $\mathcal{W}$, то набор $\mathcal{W}$ назовём *k-выделенным*. Через $|\mathcal{W}|$ мы обозначаем количество слов в $\mathcal{W}$.

Отметим, что факторизация алгебры по радикалу не даёт новых выделенных наборов. Поэтому техника поиска таких наборов, по сути дела, означает работу в полупростой части и иногда способна заменить обращение к структурной теории. Добиваться появления нужного подслова мы будем поэтапно, создавая вначале вспомогательные подслова. Набор слов будет постепенно улучшаться, пока не превратится в набор степеней базисных слов. Оказывается, что если слово не является квазипериодическим порядка n, то его можно заменить на набор слов меньших типов. Поэтому следует изучить операции над выделенными наборами. Начнём с технических утверждений.

Предложение 3.80.

1. *Если набор $\{u_i\}$ выделенный и $v_i \subset u_i$ для всех i, то набор $\{v_i\}$ выделенный и $l(\{v_i\}) \leqslant l(\{u_i\})$.*
2. *Если набор $\mathcal{A}$ выделенный, $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$, то набор $\mathcal{B}$ выделенный и $l(\mathcal{B}) \leqslant l(\mathcal{A})$.*
3. *Слово выделенного набора можно заменить на семейство слов, которыми оно линейно представимо. При этом степень выделенности не возрастает.*

$\square$

Теперь отметим, что если мы можем создать одно из слов набора, то мы можем создать и много слов.

Предложение 3.81. *Если набор α выделенный, то он k-выделенный и $l_k(\alpha) \leqslant k|\alpha| \cdot l(\alpha)$.* □

Определение 3.82. Пусть z — слово. Обозначим через z' следующий набор слов. Если z псевдопериодично порядка не выше n, то $z' = \{z\}$. Иначе $z' = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$, где $\mathcal{N}_1$ — множество лексикографически меньших непсевдопериодических слов, совпадающих со своими n-типами (т. е. любое собственное начало слова из $\mathcal{N}_1$ псевдопериодично порядка не выше n), $\mathcal{N}_2$ — множество псевдопериодических слов порядка не выше n длины R, которые лексикографически меньше z. (R фиксировано. Мы положим $R = 2nk$, k есть требуемый показатель степени.)

Предложение 3.83. *Если к слову z и ко всем словам, получаемым из него, последовательно применять операцию $'$ (и всякий раз переходить к объединению образовавшихся множеств), то получится слово z или множество $\mathcal{N}_2$. При этом можно обойтись не более чем $T(n,R)$ операциями, где $T(n,R)$ — количество n-типов, не являющихся псевдопериодическими порядка n и имеющих длину не выше R. Набор всех n-типов длины не больше R также можно превратить в набор псевдопериодических слов за $T(n,R)$ операций.* □

Мы уже установили, что $T(n,R) < Rnl^{n+1}$. Отметим, что вместо оператора $'$ с тем же успехом можно использовать операцию взятия множества меньших слов той же длины. Оператор $'$ нужен для осуществления более быстрого спуска к псевдопериодическим словам. Это даёт снижение оценок с порядка l^{m^2} до порядка l^m (l — число образующих, m — степень алгебры). Кстати, понятие n-типа в доказательстве теоремы о высоте тоже использовалось с этой целью.

Итак, мы уже установили, что нарушить период можно так, чтобы создать и большее, и меньшее подслово. Лемма о тиражировании позволяет создавать период. Суммируем результаты предложения 3.5 и леммы 3.6.

Предложение 3.84. *Пусть α — конечный выделенный набор, $z \in \alpha$, z не является псевдопериодическим словом порядка не выше n. Пусть в алгебре A выполняется полилинейное тождество f степени p сложности n. Тогда*

1) *если заменить z множеством всех лексикографически меньших слов той же длины, то получившийся набор α' останется выделенным*;
2) *слово z можно заменить набором z'.* □

Из предложений 3.83 и 3.84 вытекает следствие.

Следствие 3.85 (гипотеза Шестакова). *Пусть A — конечно порождённая PI-алгебра сложности n. Тогда для любого k множество k-х степеней слов длины не больше n является выделенным. Если все эти слова являются алгебраическими элементами, то A конечномерна.* □

Замечание. Тот же самый результат получен как следствие теоремы о независимости (следствие 3.61). Однако здесь мы не используем структурную теорию (не факторизуем по радикалу) и можем дать конструктивные оценки. Эти оценки мы не выписываем, поскольку ниже будет изложена техника, позволяющая сделать их экспоненциальными.

Введём на множестве наборов слов следующее отношение порядка: вначале сравниваются старшие слова, потом вторые по величине и т. д. Если первые k старших слов в двух наборах совпадают, а старшие слова из оставшихся лексикографически несравнимы, то два набора несравнимы. Если при этом в одном наборе слов не осталось, то набор с бо́льшим количеством слов считается бо́льшим.

Поскольку операция замены слова z на набор z' понижает его порядок (мы рассматриваем множества без повторения элементов), справедлива следующая теорема.

Теорема 3.86. *Если A — конечно порождённая PI-алгебра сложности n, то минимальный выделенный набор слов длины R состоит из псевдопериодических слов порядка не выше n.* □

Эта теорема параллельна результатам о строении первичных алгебр и имеет интересное следствие. У любого нециклического слова есть циклически сопряжённое правильное слово. Оно отвечает старшему члену некоторого лиева (йорданова) монома.

Следствие 3.87. *Пусть A — лиева или йорданова алгебра, вложенная в ассоциативную алгебру сложности n. Если все мономы в A от её образующих длины не выше n алгебраичны, то A локально конечна.* □

3.3. Метод перекачки

Метод перекачки использует комбинаторную конструкцию, параллельную классическому понятию алгебраичности. Он позволяет единообразно решать ряд вопросов, относящихся к PI-теории. Основная комбинаторная идея этого метода такова.

Предложение 3.88. *Рассмотрим следующую игру. Дано n куч камней. Первый игрок может выбрать любые m куч и каждую из них разложить на правую и левую части. Второй игрок правые части нетождественно переставляет и каждую из них объединяет с одной из левых. В этой игре первый игрок может добиться того, чтобы все кучи, кроме $m-1$, содержали не более чем по $m-1$ камней.*

Замечание. Данное предложение предлагалось в качестве задачи на московской городской олимпиаде (задача 6, 9 класс, 1995 год).

Доказательство. Упорядочим кучи. Составим вектор, i-я координата которого есть количество камней в i-й куче. Упорядочим возможные векторы лексикографически. Покажем, что если первый игрок не может увеличить вектор, соответствующий кучам, то расположение камней в кучах искомое.

В самом деле, пусть имеется m куч, $k_1, \ldots, k_m$ — соответствующие количества камней. Пусть $k_i \geqslant m$ для всех i. Положим $k_i = k_i' + q_i$, $q_i = i$, $k_i' = k_i - i$. Так как $k_i \geqslant m$, то $k_i' \geqslant 0$. Остаётся применить предложение 3.89. $\square$

Предложение 3.89. *Пусть $k_i \geqslant m$, положим $k_i = k_i' + q_i$. Пусть $k_i' \geqslant 0$ и $q_j > q_i$ при $j > i$. Тогда для любой нетождественной перестановки $\sigma \in \mathrm{S}_m$ вектор $\vec{k_\sigma} = \bigl(k_1' + q_{\sigma(1)}, \ldots, k_m' + q_{\sigma(m)}\bigr)$ лексикографически меньше вектора $\vec{k} = (k_1' + q_1, \ldots, k_m' + q_m)$.*

Доказательство. Если $\sigma(1) \neq 1$, то $\sigma(1) > 1$ и $k_1' + q_{\sigma(1)} > k_1' + q_1$. В этом случае $\vec{k_\sigma} \succ \vec{k}$. Если $\sigma(1) = 1$, мы имеем индукционный спуск от m к $m-1$. $\square$

Из предложения 3.88 вытекает следующая лемма.

Лемма 3.90 (о перекачке). *Пусть A — PI-алгебра, в которой выполняется полилинейное тождество f степени m. Пусть слово W имеет вид*

$$W = c_0 v_1 c_1 \ldots v_m c_{m+1},$$

где c_i — буквы, не входящие в слова v_j. Тогда W по модулю $T(f)$ можно представить в виде линейной комбинации слов вида

$$W' = c_{i_0} v_1' c_{i_1} \ldots v_m' c_{i_{m+1}},$$

где c_i не входят в слова v_j' и не более чем $m-1$ слово v_i' имеет длину, большую чем $m-1$. $\square$

Смысл этой леммы заключается в том, что с помощью тождества почти все символы из «куч» v_i можно собрать в $m-1$ кучу v_i'.

Мы играем за первого игрока, когда представляем слово W в виде произведения $W_0 \ldots W_{m+1}$, «разрезая» при этом слова v_i. Далее тождество перерабатывает $W_0 \ldots W_{m+1}$ в сумму слов, где W_i нетождественно переставлены. Второй игрок выбирает некоторое слагаемое, и т. д.

Близкие рассуждения встречаются при доказательстве ограниченности высоты для алгебры Ли с разреженным тождеством.

Замечание. Фактически доказательство леммы о перекачке основано на линейном представлении словами с максимальным вектором степеней.

3.3.1. Оценки в гипотезах Шестакова и Амицура

Общий план состоит в том, чтобы, стартуя от набора всех слов длины $2n$, поэтапно улучшать выделенный набор α. Улучшение осуществляется так. Пусть в любом слове w длины $l(\alpha)$ можно «создать» подслово из α (т. е. линейно представить w словами, содержащими подслово из α). Тогда в любом слове длины $kl(\alpha)$ можно создать k неперекрывающихся подслов из α. При больших k среди этих подслов будет много одинаковых. Собирая с помощью перекачки эти подслова вместе, применив лемму 3.6 о тиражировании, а затем соображения, связанные с появлением меньшего подслова при «порче» периода (см. предложение 3.5), мы создадим подслово из α'.

Однако при каждом таком переходе длины слов, с которыми мы оперируем, возрастают в $2m^3l^m$ раз, а общее число переходов имеет порядок l^m (l — число образующих). В результате получается оценка на высоту порядка l^{m^2}.

Чтобы получить более реальные оценки, следует использовать те участки слова w, которые остаются после создания подслов из α. С помощью перекачки легко добиться того, что почти все такие участки (т. е. все, кроме $\deg(A) - 1$) имели длину строго меньше $m = \deg(A)$. Тогда каждая замена приводит не к увеличению требуемых длин по порядку в m^3l^m раз, а только к добавлению слагаемого порядка m^3l^m.

Итак, мы работаем в ситуации, когда слово разбито на участки, которые можно переставлять, но не залезать внутрь, и на свободные участки, с которыми можно делать что угодно. Вместо длины слова мы оперируем с *шириной* — общей длиной $m - 1$ свободного участка максимальной длины.

Рассмотрим относительно свободную алгебру A с образующими a_i и c_j, где $j = 1, \ldots, m+1$. Через u_α и v_β обозначаются слова, в которые c_j не входят. Мы считаем, что в A выполняется полилинейное тождество f степени m.

Определение 3.91. Назовём слово вида $c_1v_1 \ldots c_kv_k$, такое что $\sum |v_i| \geqslant h$, *словом ширины* h. Назовём набор слов $\{u_\alpha\}$ m*-выделенным ширины* h, если любое слово ширины h линейно представимо словами, содержащими подслово из $\{u_\alpha\}$.

c_i — это уже созданные объекты (их можно только переставлять как единые куски), а v_i — «материал» для создания нового. «Ширина» измеряет количество пригодного «материала». Из леммы о перекачке 3.90 вытекает следующее предложение.

Предложение 3.92.

1. *Пусть α — набор слов ширины h, l — максимальная длина слова из α. Тогда любое слово ширины не меньше $h + m + l$ линейно представимо словами, каждое из которых содержит два вхождения слов из α.*
2. *Любое слово ширины не меньше $h + (k - 1)(m + l)$ линейно представимо словами, каждое из которых содержит k вхождений слов из α.*

Доказательство. Выразим слово указанной ширины через слова, в которые входит элемент из α. В каждом из таких слов отметим указанное вхождение, обозначим его через c' и произведём перекачку. Затем два c_i, оказавшиеся на расстоянии меньше m, объединим в одно. Потеря ширины будет не более $m+l$. Второе утверждение получается очевидной индукцией. □

Таким образом, оценки на ширину растут при переходе $\alpha \to \alpha'$ не мультипликативно, а аддитивно.

Следствие 3.93. *Пусть p — число слов в наборе α, который является m-выделенным ширины h. Тогда при $h' > h+(kp-1)(m+l)$ слово ширины h' линейно представимо словами, каждое из которых содержит k вхождений какого-нибудь слова из α.* □

Пусть n — сложность алгебры, m — её степень, l — число образующих, p — минимальная степень полилинейного тождества сложности n. Положим $R = 2mn$, и пусть все квазипериодические слова набора α имеют длину R. Из предложения 3.83 и следствия 3.93 вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.94. *Замена слова z из набора α на набор z' повышает m-ширину не более чем на $\big((p+3)ml^{m+1}-1\big)\cdot(m+R)$.* □

Из предложений 3.55, 3.94 выводится следующая теорема.

Теорема 3.95. *Набор, состоящий из псевдопериодических слов порядка не выше n длины R, является выделенным ширины*

$$h = \big((p+3)ml^{m+1}-1\big)\cdot Rnl^{n+1}(m+R).$$ □

Из этой теоремы и предложения 3.83 получается следующая теорема.

Теорема 3.96. *Пусть A — l-порождённая PI-алгебра сложности n. Пусть m — степень минимального тождества в A (т. е. $m = \deg(A)$), p — минимальная степень тождества сложности n. Тогда A имеет над множеством слов степени не выше n высоту*

$$H(l,m,p) = \big((p+3)ml^{m+1}-1\big)\cdot 2mnl^{n+1}m(2n+1)+ml^n.$$

Доказательство. Пусть M — множество всех слов длины не выше n. Любое слово линейно представимо элементами указанного в определении 3.91 вида той же степени однородности. Если $\sum|v_i| \geqslant h$, то можно создать новую m-ю степень элемента из M и, применив перекачку, увеличить $\sum k_i - s$. Высота оценивается как $s + \big(\sum|v_i|\big)/n$. □

Отметим, что $H(l,m,p)$ асимптотически эквивалентно pm^2nl^{m+n+2}.

Следствие 3.97. *Если l-порождённая PI-алгебра A имеет степень $m = \deg(A)$, то A имеет над множеством слов степени не выше $[m/2]$ высоту*

$$H(l,m) = \big((m+3)ml^{m+1}-1\big)\cdot m^4l^{m/2+1}+ml^{m/2}.$$

Доказательство. В силу теоремы Амицура—Левицкого

$$\mathrm{PIdeg}(A) \leqslant \frac{\deg(A)}{2}.$$ □

Литература

[1] Бейдар К. И., Латышев В. Н., Марков В. Т., Михалёв А. В., Скорняков Л. А., Туганбаев А. А. Ассоциативные кольца. — М.: ВИНИТИ, 1984. — (Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия; Т. 22).

[2] Белов А. Я. О базисе Ширшова относительно свободных алгебр сложности n // Мат. сб. — 1988. — Т. 135, № 31. — С. 373—384.

[3] Белов А. Я. Теорема Нагаты—Хигмана для полуколец // Фундамент. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 2. — С. 523—527.

[4] Белов А. Я., Борисенко В. В., Латышев В. Н. Мономиальные алгебры // Итоги науки и техн. Сер. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. Т. 26. — М.: ВИНИТИ, 2002. — С. 35—214.

[5] Гришин А. В. Показатель роста многообразия алгебр и его приложения // Алгебра и логика. — 1987. — Т. 28, № 5. — С. 536—557.

[6] Днестровская тетрадь. — 4-е изд. — Новосибирск: Изд. Ин-та матем. СО АН СССР, 1993.

[7] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[8] Зельманов Е. И. Абсолютные делители нуля и алгебраические йордановы алгебры // Сиб. мат. журн. — 1982. — Т. 23, № 6. — С. 100—116.

[9] Зубрилин К. А. Алгебры, удовлетворяющие тождествам Капелли // Мат. сб. — 1995. — Т. 186, № 3. — С. 53—64.

[10] Зубрилин К. А. О классе нильпотентности препятствия для представимости алгебр, удовлетворяющих тождествам Капелли // Фундамент. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 2. — С. 409—430.

[11] Кемер А. Р. Нематричные многообразия, многообразия со степенным ростом и конечно порождённые PI-алгебры: Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1981.

[12] Кемер А. Р. Многообразия и $\mathbb{Z}_2$-градуированные алгебры // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1984. — Т. 48, № 5. — С. 1042—1059.

[13] Колотов А. Т. О верхней оценке высоты в конечно порождённых алгебрах с тождествами // Сиб. мат. журн. — 1982. — Т. 23, № 1. — С. 187—189.

[14] Кострикин А. И. Вокруг Бернсайда. — М.: Наука, 1986.

[15] Коуровская тетрадь: Нерешённые вопросы теории групп. — 13-е изд. — Новосибирск: Изд-во ин-та матем. СО АН СССР, 1995.

[16] Курош А. Г. Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1941. — Т. 5. — С. 233—240.

[17] Львов И. В. К теореме Ширшова о высоте // Всесоюзн. симп. по теории колец, алгебр и модулей. — Новосибирск: НГУ, 1982.

[18] Медведев Ю. А. Ниль-радикалы конечно порождённых йордановых PI-алгебр. — Препринт № 24. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1985.

[19] Мищенко С. П. Вариант теоремы о высоте для алгебр Ли // Мат. заметки. — 1990. — Т. 47, № 4. — С. 83—89.

[20] Пчелинцев С. В. Теорема о высоте для альтернативных алгебр // Мат. сб. — 1984. — Т. 124, № 4. — С. 557—567.

[21] Размыслов Ю. П. Алгебры, удовлетворяющие тождественным соотношениям типа Капелли // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1981. — Т. 45, № 1. — С. 143—166.

[22] Размыслов Ю. П. Тождества алгебр и их представлений. — М.: Наука, 1989.

[23] Скосырский В. Г. Йордановы алгебры с условием минимальности для двусторонних идеалов. — Препринт № 21. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1985.

[24] Уфнаровский В. А. Теорема о независимости и её следствия // Мат. сб. — 1985. — Т. 128, № 1. — С. 124—132.

[25] Уфнаровский В. А. Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре. — М.: ВИНИТИ, 1990. — (Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. математики. Фундаментальные направления; Т. 57).

[26] Херстейн И. Некоммутативные кольца.— М.: Мир, 1972.

[27] Чекану Г. П. Локально конечные алгебры. — Дис.... канд. физ.-мат. наук. — Кишинёв, 1982.

[28] Чекану Г. П. К теореме Ширшова о высоте // XIX Всесоюзн. алгебр. конф.: Тезисы сообщ. I. — Львов, 1987. — С. 306.

[29] Чекану Г. П. О локальной конечности алгебр // Мат. исследования. — 1988. — № 105. — С. 153—171.

[30] Чекану Г. П. Независимость и квазирегулярность в алгебрах // 3 Междунар. конф. по алгебре памяти М. И. Каргаполова. — Красноярск, 1993.

[31] Чекану Г. П. Независимость и квазирегулярность в алгебрах // Докл. РАН. — 1994. — Т. 337, № 3. — С. 316—319.

[32] Чекану Г. П. Независимость и локальная конечность. — Дис.... хабилитат физ.-мат. наук. — Кишинёв, 1995.

[33] Шестаков И. П. Конечно порождённые специальные йордановы и альтернативные PI-алгебры // Мат. сб. — 1983. — Т. 122, № 1. — С. 31—40.

[34] Ширшов А. И. О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах // Мат. сб. — 1957. — Т. 41, № 3. — С. 381—394.

[35] Ширшов А. И. О кольцах с тождественными соотношениями // Мат. сб. — 1957. — Т. 43, № 2. — С. 277—283.

[36] Amitsur S. A generalization of Hilbert's Nullstellensatz // Proc. Amer. Math. Soc. — 1957. — Vol. 8, no. 4. — P. 649—656.

[37] Amitsur S. Rational identities and applications to algebra and geometry // J. Algebra. — 1966. — Vol. 3, no. 3. — P. 304—359.

[38] Amitsur S. The sequence of codimensions of PI-algebras // Israel J. Math. — 1984. — Vol. 47, no. 1. — P. 1—22.

[39] Belov A. Some estimations for nilpotence of nil-algebras over field of an arbitrary characteristics and height theorem // Comm. Algebra. — 1992. — Vol. 20, no. 10. — P. 2919—2922.

[40] Belov A. About height theorem // Comm. Algebra. — 1995. — Vol. 23, no. 9. — P. 3551—3553.

[41] Berele A. Homogeneous polynomial identities // Israel J. Math. — 1982. — Vol. 42, no. 3. — P. 258—272.

[42] Bokut' L. A., Shestakov I. P. Some results by A. I. Shirshov and his school // Proc. Second Int. Conf. on Algebra Dedicated to the Memory of A. I. Shirshov, August 20—25, 1991, Barnaul, Russia / L. A. Bokut', ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 1995. — (Contemp. Math., Vol. 184). — P. 1—12.

[43] Braun A. The radical in a finitely generated PI-algebra // Bull. Amer. Math. Soc. — 1982. — Vol. 7, no. 2. — P. 385—386.

[44] Drensky V. On the Hilbert series of relatively free algebras // Comm. Algebra. — 1984. — Vol. 12, no. 19. — P. 2335—2347.

[45] Drensky V. Codimensions of T-ideals and Hilbert series of relatively free algebras // J. Algebra. — 1984. — Vol. 91, no. 1. — P. 1—17.

[46] Drensky V. Free Algebras and PI-Algebras. — Berlin: Springer, 2000.

[47] Formanek E., Halpin P. W., Li C. W. The Poincare series of the ring of 2×2 generic matrices // J. Algebra. — 1981. — Vol. 69. — P. 105—112.

[48] Giambruno A., Zaicev M. Exponential codimension growth of P. I. algebras: An exact estimate // Adv. Math. — 1999. — Vol. 142. — P. 221—243.

[49] Giambruno A., Zaicev M. Minimal varieties of algebras of exponential growth // Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. — 2000. — Vol. 6. — P. 40—44.

[50] Procesi C. Rings with Polynomial Identities. — New York: Marcel Dekker, 1973.

[51] Rowen L. H. Polynomial Identities in Ring Theory. — New York: Academic Press, 1980.

[52] Small L. W. Localization in PI-rings // J. Algebra. — 1971. — Vol. 19, no. 2. — P. 181—183.

[53] Specht W. Gesetze in Ringen // Math. Z. — 1950. — Vol. 52. — P. 557—589.