Субрегулярные характеры унитреугольной группы над конечным полем*

М. В. ИГНАТЬЕВ
Самарский государственный университет
e-mail: mihail_ignatev@samaramail.ru

УДК 512.547.2

Ключевые слова: теория представлений, унитреугольная группа, орбита, характер.

Аннотация

Получена формула, описывающая субрегулярные характеры унитреугольной группы над конечным полем в терминах коэффициентов миноров характеристической матрицы.

Abstract

M. V. Ignatev, Subregular characters of the unitriangular group over a finite field, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 5, pp. 103—125.

We prove a formula for subregular characters of the unitriangular group over a finite field in terms of coefficients of minors of the characteristic matrix.

Введение

Пусть k — произвольное поле, n — натуральное число. Через $G_n(k) = \mathrm{UT}(n,k)$ обозначим группу всех строго нижнетреугольных $(n \times n)$-матриц с единицами на главной диагонали и элементами из поля k, она называется *унитреугольной* группой. Через $\mathfrak{g}_n(k) = \mathfrak{ut}(n,k)$ обозначим её алгебру Ли над k, она состоит из всех нильпотентных нижнетреугольных матриц с элементами из поля k.

Если $k = \mathbb{F}_q$ — конечное поле, то $G_n(q) = G_n(k)$ — конечная группа. Следовательно, она обладает конечным списком (классов эквивалентности комплексных) неприводимых представлений. Классическая задача теории представлений состоит в построении таблицы неприводимых характеров (или же какой-то их серии). Метод орбит А. А. Кириллова [2,3] позволяет свести аналогичную задачу классификации унитарных представлений нильпотентных групп Ли к классификации орбит коприсоединённого действия. То же верно и для $G_n(q)$ (см. [8]),

*Работа поддержана грантом № 23Е2.1Д Областного конкурса на предоставление грантов студентам, аспирантам и молодым учёным Самарской области в 2007 г.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 5, с. 103—125.

при этом описание коприсоединённых орбит для произвольного n не известно ни над каким полем.

Описание орбит основной серии (т. е. максимально возможной размерности) для групп Ли было получено в самой первой работе по методу орбит [3], оно остаётся верным и над конечным полем [4]. В работах К. Андре (см., например, [5, 6]) описан широкий класс так называемых *базисных характеров* (в частности, получена явная формула для характеров основной серии).

Естественным обобщением является рассмотрение орбит, представлений и характеров предмаксимальной размерности, мы будем называть их *субрегулярными*. Субрегулярный случай играет важную роль в алгебраической геометрии и K-теории (см., например, [11]). Субрегулярные орбиты описаны в [7]. Мы доказываем формулу для характеров представлений, связанных с такими орбитами. Полученная формула показывает, что субрегулярные характеры, как и характеры основной серии, могут быть описаны в терминах коэффициентов миноров характеристической матрицы.

Структура работы такова. В разделе 1 собраны предварительные сведения относительно группы G_n и приведена формула Андре для характеров основной серии (теорема 1.12). В разделе 2 мы формулируем основную теорему, содержащую формулу для субрегулярных характеров (теорема 2.9). Более подробно, для произвольного субрегулярного характера мы предъявляем набор элементов, на классах сопряжённости которых он отличен от нуля, и вычисляем его значение в этом случае. Раздел 3 содержит описание этих классов сопряжённости (теорема 3.5). В разделе 4 приводятся необходимые факты относительно полупрямого разложения группы G_n, используемые в доказательстве основной теоремы, которое проводится в разделе 5. Наконец, в разделе 6 собраны замечания, возникшие по ходу доказательства.

1. Характеры основной серии

Пусть везде далее $k = \mathbb{F}_q$ (если не оговорено иное) и $\operatorname{char} k = p$, т. е. $q = p^r$, где p — простое число. Везде далее мы будем предполагать, что $p \geqslant n$. Согласно [8], в этом случае работает метод орбит: неприводимые комплексные характеры нашей группы находятся во взаимно-однозначном соответствии с орбитами коприсоединённого действия, т. е. с $G_n(q)$-орбитами в сопряжённой алгебре $\mathfrak{g}_n^*(q)$, причём характер, соответствующий орбите $\Omega \subset \mathfrak{g}_n(q)$, имеет вид

$$\chi_\Omega(\exp a) = q^{-\frac{1}{2}\dim\Omega} \sum_{f \in \Omega} \theta\bigl(f(a)\bigr), \quad a \in \mathfrak{g}_n(q), \tag{1}$$

где $\theta\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ — любой фиксированный нетривиальный характер (аддитивной группы) поля $\mathbb{F}_q$. С другой стороны, явные формулы, позволяющие по орбите считать значение соответствующего характера на выбранном элементе, в общем случае неизвестны.

Замечание 1.1. Невырожденная на $\mathfrak{gl}_n(k)$ форма $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB)$ позволяет отождествить $\mathfrak{ut}^*(n,q)$ с множеством нильпотентных верхнетреугольных матриц: можно считать, что

$$f(x) = \langle f, x\rangle = \sum_{i,j} \xi_{ji} x_{ij},$$

где $x = (x_{ij}) \in \mathfrak{g}_n(q)$, $f = (\xi_{ij}) \in \mathfrak{g}_n^*(q)$. При этом коприсоединённое представление

$$K(g)\colon \mathfrak{g}_n^* \to \mathfrak{g}_n^*, \quad (K(g)f)(x) = f(\mathrm{Ad}_{g^{-1}} x), \quad g \in G_n, \quad f \in \mathfrak{g}_n^*, \quad x \in \mathfrak{g}_n,$$

принимает вид

$$K(g)\colon x \mapsto (gxg^{-1})_{\mathrm{high}}, \quad x \in \mathfrak{g}_n^*, \quad g \in \mathfrak{g}_n,$$

где матрица $(a)_{\mathrm{high}}$ получается из матрицы a заменой всех её элементов, стоящих на главной диагонали и ниже, нулями.

Особое значение имеют представления максимально возможной размерности. Мы будем говорить, что такие представления (а также соответствующие им орбиты и характеры) лежат в *основной серии*, орбиты максимальной размерности также называются *регулярными*.

Обозначение 1.2. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Положим $n_0 = [n/2]$, $n_1 = [(n-1)/2]$. Заметим, что $n = n_0 + n_1 + 1$.

Обозначение 1.3. Пусть $g = (y_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n,k)$. Через $\Delta_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}(g)$ обозначим минор матрицы g, натянутый на строки $i_1,\ldots,i_k$ и столбцы $j_1,\ldots,j_k$, для любых $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_k \leqslant n$ (строки и столбцы берутся в указанном порядке). В частности, для произвольного $1 \leqslant d \leqslant n_0$ положим

$$\Delta_d(g) = \Delta_{n-d+1,n-d+2,\ldots,n}^{1,2\ldots,d}(g).$$

Мы также будем использовать обозначение

$$\Delta^X(g) = \Delta_{\sigma(i_1,\ldots,i_k)}^{\tau(j_1,\ldots,j_k)}(g),$$

где X есть множество пар вида $X = \{(i_1,j_1),\ldots,(i_k,j_k)\}$, а σ, τ — перестановки, располагающие каждый из наборов индексов в неубывающем порядке.

Известно [4] описание орбит основной серии.

Теорема 1.4. *Пусть $k = \mathbb{F}_q$ — конечное поле. Тогда каждая орбита основной серии задаётся системой уравнений*

$$\Delta_d({}^{\mathrm{t}}a) = \beta_d, \quad a \in \mathfrak{g}_n^*(q), \quad 1 \leqslant d \leqslant n_0$$

(здесь ${}^{\mathrm{t}}a$ — транспонированная матрица, β_d — константы из $\mathbb{F}_q$, $\beta_1,\ldots,\beta_{n_0-1} \in \mathbb{F}_q^*$, причём $\beta_{n_0} \neq 0$ при нечётном n). □

Следствие 1.5. *На каждой орбите основной серии лежит ровно одна каноническая форма регулярной орбиты, т. е. матрица вида*

$$f = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \xi_{1,n} \\ 0 & \dots & \xi_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\xi_{1,n} = \beta_1$, $\xi_{d,n-d+1} = \frac{\beta_d}{\beta_{d-1}}$, $d = 2, \ldots, n_0$. □

Более того, можно вычислить размерность любого представления (орбиты) основной серии [10].

Теорема 1.6. *Пусть* $\mu(n) = (n-2)+(n-4)+\ldots$, *а* T_Ω *— представление основной серии, соответствующее орбите* Ω. *Тогда* $\dim \Omega = 2\mu(n)$, $\dim T_\Omega = q^{\mu(n)}$. □

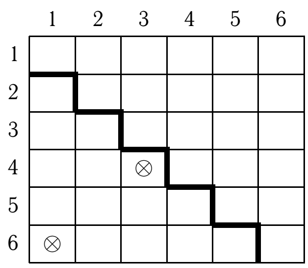
Отметим, что на орбите Ω размерности $2\mu(n)$ лежит ровно $q^{2\mu(n)}$ точек [9].

В этом разделе мы приводим формулу, описывающую характеры основной серии, т. е. характеры вида $\chi = \chi_f$, где $f \in \Omega_f \subset \mathfrak{g}_n^*$ — каноническая форма на регулярной орбите. Пусть χ — произвольный неприводимый характер группы G_n. Обозначим через $\operatorname{Supp}\chi$ его *носитель* (т. е. множество $\{g \in G_n \mid \chi(g) \neq 0\}$). Ясно, что носитель распадается в объединение классов сопряжённости, на каждом из которых значение характера постоянно. Таким образом, задача сводится к явному заданию носителя и выяснению значения на каждом классе сопряжённости, который в носитель попадает.

Введём несколько обозначений, следуя Андре [6].

Обозначение 1.7. Через $\Phi(n)$ обозначим множество всех пар вида $\{(i,j) \mid 1 \leqslant j < i \leqslant n\}$ (мы будем называть их *корнями*, имея в виду, что каждому $(i,j) \in \Phi(n)$ соответствует корневой вектор e_{ji} — матрица, у которой на (j,i)-м месте стоит единица, а на всех остальных — нули). Пусть $D \subset \Phi(n)$ — его подмножество, содержащее не более одного элемента из каждого столбца и каждой строки (назовём такие подмножества *базисными*). Базисное подмножество, состоящее из корней вида $(n-j+1, j)$, назовём *регулярным*.

Пример 1.8. Ниже схематично изображено одно из регулярных подмножеств $D = \{(6,1),(4,3)\} \subset \Phi(6)$. Символом $\otimes$ отмечены позиции $(i,j) \in D$.



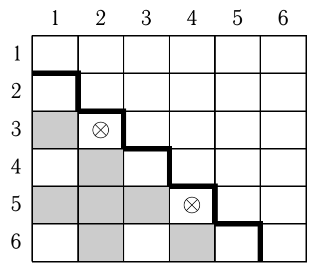
Обозначение 1.9. Для произвольного базисного подмножества $D \subset \Phi(n)$ и произвольного отображения $\varphi\colon D \to \mathbb{F}_q^*$ рассмотрим элемент $G_n(q)$ вида

$$x_D(\varphi) = 1_n + \sum_{(n-j+1,j)\in D} \varphi(n-j+1,j)e_{n-j+1,j},$$

где 1_n — единичная матрица размера $n \times n$ (если $D = \varnothing$, то $x_D(\varphi) = 1_n$). Через $\mathcal{K}_D(\varphi)$ обозначим класс сопряжённости этого элемента, а через $\mathcal{K}_{\mathrm{reg}}$ — (дизъюнктное) объединение $\mathcal{K}_D(\varphi)$ по всем парам (D,φ), где D — регулярное подмножество, а $\varphi\colon D \to \mathbb{F}_q^*$ — произвольное отображение.

Определение 1.10. Пусть D — произвольное подмножество $\Phi(n)$. Корень $(i,j) \in \Phi(n)$ называется *D-регулярным*, если $(i,k) \notin D$ и $(k,j) \notin D$ для любого $i > k > j$. Обозначим подмножество всех D-регулярных корней через $R(D)$.

Пример 1.11. Пусть $n = 6$, $D = \{(3,2),(6,4)\} \subset \Phi(6)$ — базисное подмножество. На рисунке заштрихованы корни $(i,j) \notin R(D)$.



Положим $\Phi_{\mathrm{reg}} = \{(i,j) \in \Phi(n) \mid i > n-j+1\}$, $m_D = |R(D) \cap \Phi_{\mathrm{reg}}|$ для произвольного регулярного подмножества $D \subset \Phi(n)$. Фиксируем произвольный нетривиальный характер (аддитивной группы) поля $\theta\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$.

Теорема 1.12. *Пусть $\Omega = \Omega_f \subset \mathfrak{g}_n^*(q)$ — произвольная регулярная орбита ($f = (\xi_{ij})$ — каноническая форма регулярной орбиты), $\chi = \chi_f$ — соответствующий ей характер. Тогда*

1) $\operatorname{Supp}\chi = \mathcal{K}_{\mathrm{reg}}$;
2) $\chi(g) = q^{m_D}\theta_f\big(e_D(\varphi)\big)$ *для любого* $g \in \mathcal{K}_D(\varphi) \subset \mathcal{K}_{\mathrm{reg}}$, *где* $e_D(\varphi) = x_D(\varphi) - 1_n \in \mathfrak{g}_n(q)$, *а* $\theta_f\colon \mathfrak{g}_n(q) \to \mathbb{C}$ *действует по правилу*

$$\theta_f(x) = \theta\big(f(x)\big) = \prod_{(i,j)\in\Phi(n)} \theta(\xi_{ji}x_{ij}), \quad x = (x_{ij}) \in \mathfrak{g}_n(q).$$

Доказательство. Это частный случай теоремы 5.1 из [6]. □

В [6] приводятся явные уравнения $\mathcal{K}_D(\varphi)$ для произвольного базисного подмножества $D \subset \Phi(n)$. А именно, $g \in \mathcal{K}_D(\varphi) \subset G_n$ тогда и только тогда, когда

$$\Delta^{R_D(i,j)}(g) = \Delta^{R_D(i,j)}\big(x_D(\varphi)\big) \tag{2}$$

для любых $(i,j) \in R(D)$. Здесь $R_D(i,j) = \{(i,j)\} \cup \{(k,l) \in D \mid l > j,\ k < i\}$.

В частности, если $m = \max\limits_{(i,j)\in D} j$, то

$$y_{ij} = 0 \quad \text{для любых} \quad j > m \quad \text{или} \quad i < n-m+1. \tag{3}$$

Легко заметить, что для описания характеров основной серии (как и для описания регулярных орбит) хватает миноров матриц из G_n. То же верно по построению и для произвольных базисных характеров Андре. В дальнейшем мы увидим, как меняется ситуация при переходе к субрегулярным характерам.

2. Субрегулярные характеры (формулировки)

Из теоремы 1.4 следует, в частности, что каждая коприсоединённая орбита общего положения имеет максимальную размерность $\mu(n)$. А именно, множество точек, орбиты которых регулярны, образует открытое по Зарискому плотное в $\mathfrak{g}_n^*(q)$ множество $\mathcal{O}_{\mathrm{reg}}$, задаваемое набором неравенств $\Delta_d \neq 0$, $1 \leqslant d \leqslant n_1$ (этим, собственно, и объясняется термин «регулярные орбиты»). Напомним, что $n = n_0 + n_1 + 1$, где $n_0 = [n/2]$, $n_1 = [(n-1)/2]$.

С другой стороны, для каждого $1 \leqslant d \leqslant n_1$ естественно рассмотреть гиперповерхность $\mathcal{O}_d \subset \mathfrak{g}_n^*$, высекаемую условием $\Delta_d = 0$. Каждая такая гиперповерхность распадается на орбиты.

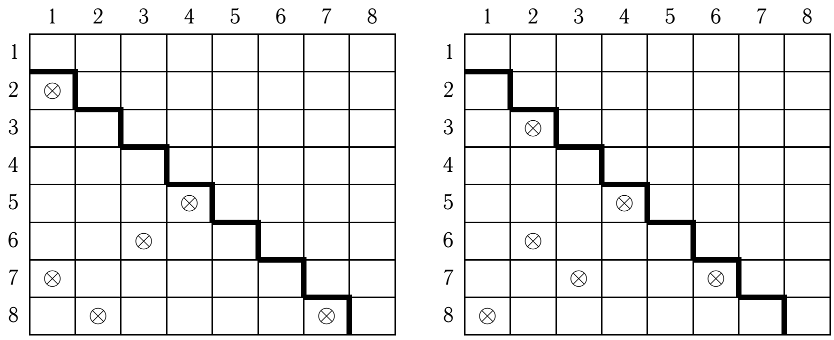
Определение 2.1. Будем называть орбиту $\Omega \in \mathfrak{g}_n^*$ (соответствующее представление T_Ω и характер χ_Ω) *субрегулярной*, если $\dim \Omega = 2\mu(n) - 2$ (соответственно $\dim T_\Omega = q^{\mu(n)-1}$), т. е. её размерность на два меньше, чем размерность регулярной орбиты. Поскольку орбиты всегда чётномерны [9], это следующее возможное значение размерности.

Каждая субрегулярная орбита принадлежит ровно одной гиперповерхности $\mathcal{O}_d$, причём размерность такой субрегулярной орбиты максимальна среди размерностей всех орбит, лежащих в $\mathcal{O}_d$. В связи с этим будем называть субрегулярную орбиту $\Omega \subset O_d$ *d-субрегулярной*. В [7] приводятся уравнения орбит; здесь они нам не понадобятся, поэтому мы ограничимся перечислением (без доказательства) элементов $\mathfrak{g}_n^*$, орбиты которых субрегулярны.

Определение 2.2. Элемент $f = (\xi_{ij}) \in \mathfrak{g}_n^*$ будем называть *канонической формой субрегулярной орбиты* первого, второго или третьего типа в следующих случаях соответственно:

1) существуют такое число $1 \leqslant d < n_1$ и такие константы $\beta_1, \ldots, \beta_{d-1}, \beta', \beta'', \beta_{d+1}, \ldots, \beta_{n_0-1} \in k^*$, $\beta_{n_0}, \beta \in k$, причём $\beta_{n_0} \neq 0$ при нечётных n, что $\xi_{j,n-j+1} = \beta_j$ при $1 \leqslant j \leqslant d-1$ и $d+2 \leqslant j \leqslant n_0$, $\xi_{d,n-d} = \beta'$, $\xi_{d+1,n-d+1} = \beta''$, $\xi_{n-d,n-d+1} = \beta$, а все остальные ξ_{ij} равны 0;
2) число n нечётно и существуют такие константы $\beta_1, \ldots, \beta_{n_1-1} \in k^*$, $\beta', \beta'' \in k$, что $\xi_{j,n-j+1} = \beta_j$ при $1 \leqslant j \leqslant n_1 - 1$, $\xi_{n_1,n_0+1} = \beta'$, $\xi_{n_1+1,n_0+2} = \beta''$, а все остальные ξ_{ij} равны 0;
3) число n чётно и существуют такие константы $\beta_1, \ldots, \beta_{n_1-1}, \beta \in k^*$, $\beta', \beta'' \in k$, что $\xi_{j,n-j+1} = \beta_j$ при $1 \leqslant j \leqslant n_1 - 1$ и либо $\xi_{n_1,n_0+1} = \beta$, $\xi_{n_1+1,n_0+2} = \beta'$, $\xi_{n_1+2,n_0+2} = \beta''$ (а все остальные ξ_{ij} равны 0), либо $\xi_{n_1,n_0} = \beta'$, $\xi_{n_1+1,n_0+2} = \beta$ (а все остальные ξ_{ij} равны 0).

Пример 2.3. На рисунке схематично изображены некоторые канонические формы субрегулярных орбит для $n = 8$ при $d = 1$ и $d = 2$. Символом $\otimes$ отмечены корни (i, j), для которых $\xi_{ji} \neq 0$.



Теорема 2.4. *Орбита каждой канонической формы субрегулярна. На каждой субрегулярной орбите лежит ровно одна каноническая форма.*

Доказательство. Подобное утверждение доказано в [7]. Хотя там рассматривается случай $\operatorname{char} k = 0$, все рассуждения проходят и в случае $k = \mathbb{F}_q$ при $\operatorname{char} k = p \geqslant n$. $\square$

Теперь мы можем говорить о d-субрегулярных формах и субрегулярных орбитах первого, второго или третьего типа. Ясно, что при $1 \leqslant d < n_1$ d-субрегулярная орбита принадлежит к первому типу, а n_1-субрегулярные орбиты имеют второй тип при нечётном n и третий тип при чётном n.

Итак, наша цель — получить формулы для всех характеров вида χ_f, где f — каноническая форма субрегулярной орбиты. Как и для характеров основной серии, мы предъявим носитель произвольного субрегулярного характера и вычислим значение характера на произвольном классе сопряжённости, лежащем в носителе (сначала мы рассмотрим случай $1 \leqslant d < n_1$, а в разделе 6 перенесём результаты и на случай n_1-субрегулярных орбит).

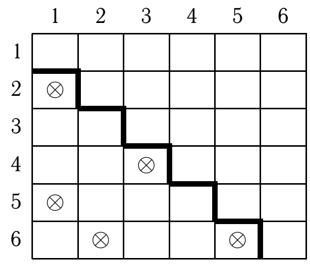
Обозначение 2.5. Для произвольного $1 \leqslant d < n_1$ через $D_0(d)$ и $D_1(d)$ будем обозначать любое из следующих множеств соответственно:

$$\begin{aligned} D_0(d)\colon \quad & \varnothing,\ \{(n-d+1, d)\},\ \{(n-d, d)\},\ \{(n-d+1, d+1)\}, \\ & \{(n-d, d), (n-d+1, d+1)\}, \\ D_1(d)\colon \quad & \{(d+1, d), (n-d+1, n-d)\}, \\ & \{(d+1, d), (n-d+1, n-d), (n-d, d), (n-d+1, d+1)\}. \end{aligned}$$

Определение 2.6. Назовём подмножество $D \subset \Phi(n)$ *d-субрегулярным* ($1 \leqslant d < n_1$), если оно имеет вид $D = D' \cup D_i(d)$, где $i = 0$ или $i = 1$, а D' — регулярное подмножество, не содержащее корней $(n-d+1, d)$ и $(n-d+1, d+1)$. Отметим, что субрегулярные подмножества, содержащие $D_1(d)$, могут не быть базисными.

Замечание 2.7. Если обозначить $\operatorname{Supp} f = \{(i,j) \in \Phi(n) \mid f(e_{ij}) \neq 0\}$, то в любом случае $D \subset \operatorname{Supp} f \cup (n-d+1, n-d) \cup (n-d+1, d)$.

Пример 2.8. Ниже схематично изображено одно из 1-субрегулярных подмножеств для $n=6$: $D = \{(2,1),(5,1),(6,2),(4,3),(6,5)\} \subset \Phi(6)$.



Введём $R(D)$, $x_D(\varphi)$, $e_D(\varphi)$, $\mathcal{K}_D(\varphi)$, θ и θ_f так же, как для регулярных орбит. Для произвольной субрегулярной орбиты $\Omega_f \subset \mathcal{O}_d$ положим

$$\mathcal{K}_f = \bigcup_{(D,\varphi)} \mathcal{K}_D(\varphi),$$

где объединение берётся по всем d-субрегулярным подмножествам D и тем отображениям $\varphi\colon D \to \mathbb{F}_q^*$, для которых

$$\xi_{d,n-d}\varphi(d+1,d) = \xi_{d+1,n-d+1}\varphi(n-d+1,n-d), \quad \text{где} \quad f = (\xi_{ij}). \tag{4}$$

Для произвольного d-субрегулярного подмножества D, содержащего $D_1(d)$, положим

$$\Phi_d = \big\{(i,j) \in \Phi(n) \mid i > n-j+1,\ j \notin \{d, n-d\},\ i \notin \{n-d+1, n-d\}\big\}.$$

Для произвольного d-субрегулярного подмножества D пусть

$$m_D = \begin{cases} |R(D) \cap \Phi_{\mathrm{reg}}| - 1, & \text{если } D \supset D_0(d), \\ |R(D) \cap \Phi_d| + n - 2d - 1, & \text{если } D \supset D_1(d). \end{cases}$$

Теорема 2.9. *Пусть $1 \leqslant d < n_1$, $\Omega_f \subset \mathcal{O}_d \subset \mathfrak{g}_n^*(q)$ — субрегулярная орбита, $\chi = \chi_f$ — соответствующий характер. Тогда*

1) $\operatorname{Supp} \chi = \mathcal{K}_f$;
2) $\chi(g) = q^{m_D}\theta_f\big(e_D(\varphi)\big)$ *для любого* $g \in \mathcal{K}_D(\varphi) \subset \mathcal{K}_f$.

Схема доказательства. В лемме 3.2 приведены уравнения, которым удовлетворяет элемент $x_D(\varphi)$, и показано, что идеал J в $k[G_n]$, определяемый этими уравнениями, инвариантен относительно присоединённого действия. В лемме 3.3 доказано, что J — простой идеал. В лемме 3.4 мы вычисляем стабилизатор $\mathcal{C} = \operatorname{Stab}_{G_n}\big(x_D(\varphi)\big)$ и показываем, что

$$\dim \mathcal{K}_D(\varphi) = \operatorname{codim} \mathcal{C} = \dim V(J)$$

(здесь, как обычно, $V(J) = \{g \in G_n \mid F(g) = 0$ для любого $F \in J\})$. Всё вместе даёт, что $\mathcal{K}_D(\varphi) = V(J)$, т. е. приведённые уравнения в точности задают класс сопряжённости элемента $x_D(\varphi)$ (теорема 3.5).

С другой стороны, в леммах 5.1—5.3 доказано, что если $\chi(g) \neq 0$, то g удовлетворяет тем же самым уравнениям (с дополнительным условием (4)), и вычислено значение $\chi(g)$ в этом случае. Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Замечание 2.10. Если $D \supset D_1(d)$ — d-субрегулярное подмножество, φ, $\tilde{\varphi}$ — два отображения из D в $\mathbb{F}_q^*$, причём

$$\begin{aligned}\varphi(d+1,d)\varphi(n-d+1,d+1) + \varphi(n-d,d)\varphi(n-d+1,n-d) = \\ = \tilde{\varphi}(d+1,d)\tilde{\varphi}(n-d+1,d+1) + \tilde{\varphi}(n-d,d)\tilde{\varphi}(n-d+1,n-d),\end{aligned}$$

то $\mathcal{K}_D(\varphi) = \mathcal{K}_D(\tilde{\varphi})$ (см. раздел 3). Однако из этого же раздела видно, что в таком случае $\theta_f\big(e_D(\varphi)\big) = \theta_f\big(e_D(\tilde{\varphi})\big)$, а m_D вообще не зависит от φ, поэтому значение характера в формулировке теоремы корректно определено.

Теорема легко переносится на случай n_1-субрегулярных орбит. Это требует некоторого уточнения определений и формулировок, которое мы отложили до раздела 6.

3. Классы сопряжённости $\mathcal{K}_D(\varphi)$

В этом разделе мы дадим явное описание класса сопряжённости $\mathcal{K}_D(\varphi)$ элемента $x_D(\varphi)$. Фиксируем произвольное число $1 \leqslant d < n_1$ и субрегулярное подмножество $D \supset D_1(d)$ (в этом и двух следующих разделах мы будем вести рассуждения для случая $D(d) = D_1(d)$; случай $D(d) = D_0(d)$ рассматривается аналогично, необходимые уточнения будут даны в разделе 6).

Обозначение 3.1. Нам будет удобно в дальнейшем использовать представление d-субрегулярного подмножества в виде

$$D = D^- \sqcup D_1(d) \sqcup D^+,$$

где

$$D^- = \{(i,j) \in D \mid j < d\}, \quad D^+ = \{(i,j) \in D \mid d < j < n-d\}.$$

Напомним, что $D' = D \setminus D_1(d) = D^- \sqcup D^+$ — регулярное подмножество (см. определение 2.6). Положим также $D'' = D\setminus\{(n-d,d),(n-d+1,d+1)\})$. Заметим, что D'' является базисным подмножествам $\Phi(n)$, причём $D' \subset D'' \subset D$.

Для описания $\mathcal{K}_D(\varphi)$ недостаточно миноров матриц $g = (y_{ij}) \in G_n$. Пусть $(i,j) \in D^+$ и $m = \max\limits_{(i,j)\in D^+} j$. Введём три многочлена:

$$\alpha_{ij} = \sum_{l=n-m+1}^{n-d} y_{n-d+1,l}y_{l,j}, \quad \beta_{ij} = \sum_{l=d+1}^{m} y_{i,l}y_{l,d}, \quad \gamma = \sum_{l=d+1}^{n-d} y_{n-d+1,l}y_{l,d}$$

(концептуальное описание этих многочленов приводится в разделе 6). Будем дальше для простоты писать Δ_{ij} вместо $\Delta^{R_{D''}(i,j)}(g)$ и y_β, y_α вместо $y_{d+1,d}$, $y_{n-d+1,n-d}$ соответственно ($R_{D''}(i,j)$ определены так же, как $R_D(i,j)$ в (2)).

Перейдём к реализации схемы доказательства теоремы 2.9. Пусть $c_0 \in k$, $c_\alpha, c_\beta, c_{ij} \in k^*$, где $(i,j) \in D'$, — произвольные константы. Рассмотрим в $k[G_n]$ идеал J, порождённый элементами

$$\begin{gathered} y_\alpha - c_\alpha, \quad y_\beta - c_\beta, \quad \gamma - c_0, \\ \alpha_{ij}, \quad \beta_{ij}, \quad (i,j) \in D^+, \\ \Delta_{ij} - c_{ij}, \quad (i,j) \in D', \\ \Delta_{ij}, \quad (i,j) \in R(D'') \setminus D'. \end{gathered} \tag{5}$$

Лемма 3.2. *Идеал J G_n-инвариантен, т. е. если $g \in V(J)$, то $xgx^{-1} \in V(J)$ для произвольного $x \in G_n$.*

Доказательство. Множество D'' базисное, поэтому инвариантность всех Δ_{ij} следует из [6, лемма 2.1].

Пусть $g = (y_{ij}) \in V(J)$. Положим $x_{rs}(\lambda) = 1 + \lambda e_{rs}$. Поскольку каждый элемент $x \in G_n$ может быть представлен в виде $x = x_{r_1 s_1}(\lambda_1) \ldots x_{r_m s_m}(\lambda_m)$ для некоторого m и некоторых $(r_i, s_i) \in \Phi(n)$, $\lambda_i \in k$, то достаточно доказать, что $xgx^{-1} \in V(J)$ для $x = x_{rs}(\lambda)$. Но для такого x имеем

$$(xgx^{-1})_{ij} = \begin{cases} y_{ij}, & \text{если } i \neq r \text{ и } j \neq s, \\ y_{ij}, & \text{если } i = r \text{ и } j \geqslant s, \text{ или } j = s \text{ и } i \leqslant r, \\ y_{rj} + \lambda y_{sj}, & \text{если } i = r \text{ и } j < s, \\ y_{is} - \lambda y_{ir}, & \text{если } j = s \text{ и } i > r, \end{cases}$$

поэтому инвариантность y_α, y_β очевидна, а доказательство инвариантности остальных элементов сводится к перебору возможных расположений r и s.

Рассмотрим, например, многочлен α_{ij}. Если $s \leqslant j$ или $r > n-d+1$, то в нём вообще не происходит никаких изменений; то же верно и при $r = n-d+1$, $s \leqslant n-m+1$. Если $r = n-d+1$, $s > n-m+1$, то

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}(xgx^{-1}) = \sum_{l=n-m+1}^{s-1} (y_{n-d+1,l} + \lambda y_{s,l}) y_{l,j} + \sum_{l=s}^{n-d} y_{n-d+1,l} y_{l,j} = \\ = \alpha_{ij}(g) + \lambda \sum_{l=n-m+1}^{s-1} y_{s,l} y_{l,j} = \alpha_{ij}(g), \end{aligned}$$

так как все $y_{s,l}$ равны 0 при $l \geqslant n-m+1 \geqslant n-n_0+1 > m$ (это частный случай соотношений (3)).

Если $r < n-d+1$, $s = j$, то α_{ij} инвариантен по тем же соображениям. Наконец, если $r < n-d+1$, $s > j$, то

$$\alpha_{ij}(xgx^{-1}) =$$
$$= \sum_{l\neq r,s} y_{n-d+1,l}y_{l,j} + (y_{r,j} + \lambda y_{s,j})y_{n-d+1,r} + y_{s,j}(y_{n-d+1,s} - \lambda y_{n-d+1,r}) =$$
$$= \alpha_{ij}(g) + \lambda(y_{s,j}y_{n-d+1,r} - y_{s,j}y_{n-d+1,r}) = \alpha_{ij}(g).$$

Инвариантность β_{ij} и γ доказывается аналогичными рассуждениями. □

Эта лемма означает, что $V(J)$ обязательно распадается на классы сопряжённости. Очевидно, что $x_D(\varphi) \in V(J)$ при

$$\begin{gathered} c_{ij} = \Delta_{ij}\big(x_D(\varphi)\big), \quad c_0 = \gamma\big(x_D(\varphi)\big), \\ c_\alpha = \varphi(n-d+1, n-d), \quad c_\beta = \varphi(d+1, d), \end{gathered} \tag{6}$$

поэтому при таких значениях констант $\mathcal{K}_D(\varphi) \subset V(J)$.

Прежде чем формулировать следующую лемму, введём ещё несколько обозначений. Будем называть *уровнем* произвольного корня $\xi = (i,j) \in \Phi(n)$ число $u(\xi) = i - j$. На множестве корней правилом

$$\xi = (i_1, j_1) < \eta = (i_2, j_2) \iff u(\xi) < u(\eta) \text{ или } u(\xi) = u(\eta), \quad j_1 < j_2 \tag{7}$$

определяется полный порядок. Для произвольного корня $\xi = (i,j) \in \Phi(n)$ пусть I_ξ обозначает идеал в $k[G_n]$, порождённый всеми y_η, $\eta < \xi$, а $\xi_0 = (i_0, j_0)$ — максимальный корень из D'', меньший ξ (если такой существует).

Лемма 3.3. *Идеал J является простым идеалом в $\bar{k}[y_{ij}]$ (здесь $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание k).*

Доказательство. Сделаем замену

$$\begin{gathered} \tilde{y}_{n-d+1,n-d} = y_\alpha - c_\alpha, \quad \tilde{y}_{d+1,d} = \tilde{y}_\beta - c_\beta, \quad \tilde{y}_{n-d+1,d+1} = \gamma - c_0, \\ \tilde{y}_{n-d+1,i} = \alpha_{ij}, \quad \tilde{y}_{i,d+1} = \beta_{ij}, \quad (i,j) \in D^+, \\ \tilde{y}_{ij} = \Delta_{ij} - c_{ij}, \quad (i,j) \in D', \\ \tilde{y}_{ij} = \Delta_{ij}, \quad (i,j) \in R(D'') \setminus D'. \end{gathered} \tag{8}$$

Если обозначить через $B \subset \Phi(n)$ множество корней (i,j), присутствующих в левых частях равенств (8), то очевидно, что $J = \langle \tilde{y}_\xi \rangle_{\xi \in B}$. Заметим, что для любого $\xi \in B$ имеет место равенство

$$\tilde{y}_\xi \equiv y_\xi^0 y_\xi + a_\xi \pmod{I_\xi}, \tag{9}$$

где y_ξ^0 — обратимый в $\bar{k}[y_{ij}]/J$ элемент, а $a_\xi \in k$ — некоторая константа. В самом деле, для $\tilde{y}_{n-d+1,n-d}$ и $\tilde{y}_{d+1,d}$ это очевидно, а для остальных корней имеем

$$\begin{gathered} \tilde{y}_{n-d+1,d+1} = \gamma - c_0 = y_{n-d+1,d+1}y_{d+1,d} + \ldots, \\ \tilde{y}_{n-d+1,i} = \alpha_{ij} = y_{n-d+1,i}y_{i,j} + \ldots, \quad (i,j) \in D^+, \\ \tilde{y}_{i,d+1} = \beta_{ij} = y_{i,d+1}y_{d+1,d} + \ldots, \quad (i,j) \in D^+, \\ \tilde{y}_{ij} = \Delta_{ij} - c_{ij} = y_{ij}\Delta_{i_0,j_0} + \ldots, \quad (i,j) \in D', \\ \tilde{y}_{ij} = \Delta_{ij} = y_{ij}\Delta_{i_0,j_0} + \ldots, \quad (i,j) \in R(D'') \setminus D', \end{gathered}$$

где для каждого $\tilde{y}_\xi$, $\xi \in B$, в правой части многоточием обозначены члены, сравнимые с нулём по модулю I_ξ, и константы (если для какого-то $\xi \in \Phi(n)$ корня ξ_0 не существует, положим $\Delta_{i_0,j_0} = 1$). Но по модулю J верны сравнения

$$y_{d+1,d} \equiv c_\beta \neq 0, \quad y_{n-m+1,m} \equiv c_{n-m+1,m} \neq 0,$$
$$y_{i,j} \equiv \frac{c_{ij}}{c_{i_0,j_0}} \neq 0, \quad (i,j) \in D^+, \quad j < m,$$
$$\Delta_{i_0,j_0} \equiv c_{i_0,j_0} \neq 0, \quad (i_0,j_0) \in D''$$

(здесь, напомним, $m = \max\limits_{(i,j)\in D^+} j$), что доказывает равенство (9).

Значит, в $\bar{k}[y_{ij}]/J$ можно выразить y_ξ через $\tilde{y}_\xi$ для любого $\xi \in B$. Следовательно,

$$\bar{k}[y_{ij}]/J = \bar{k}[y_\xi]_{\xi\in\Phi(n)}\big/\langle\tilde{y}_\xi\rangle_{\xi\in B} \cong \bar{k}[\{y_\xi\}_{\xi\notin B} \cup \{\tilde{y}_\xi\}_{\xi\in B}]\big/\langle\tilde{y}_\xi\rangle_{\xi\in B} \cong \bar{k}[\tilde{y}_\xi]_{\xi\notin B}.$$

В частности, $\bar{k}[y_{ij}]/J$ — область целостности, поэтому J — простой идеал. □

Из этой леммы следует, что $V(J)$ — неприводимое подмногообразие в $G_n(\bar{k})$, так как $\bar{k}[G_n] \cong \bar{k}[y_{ij}]$.

Лемма 3.4. *Пусть* $\mathcal{C} = \mathrm{Stab}_{G_n}\big(x_D(\varphi)\big) = \{g \in G_n \mid gx_D(\varphi) = x_D(\varphi)g\}$ — *стабилизатор* (*централизатор*) *элемента* $x_D(\varphi)$. *Тогда* $\dim\mathcal{C} = \operatorname{codim} V(J)$, *где* J *порождается элементами* (5) *со значениями констант* (6).

Доказательство. Сначала мы предъявим явные уравнения, описывающие централизатор $\mathcal{C}$. Для произвольного $\xi = (i,j) \in \Phi(n)$ через Φ_ξ обозначим объединение корней, лежащих в i-м столбце или j-й строке. Положим

$$\Phi_\alpha = \{(n-d+1,i) \mid (i,j) \in D^+\}, \quad \tilde{\Phi}_\alpha = \{(n-d+1,j) \mid j < d\},$$
$$\Phi_\beta = \{(i,d+1) \mid (i,j) \in D^+\}, \quad \tilde{\Phi}_\beta = \{(i,d) \mid i > n-d+1\},$$
$$\Phi_\gamma = \{(n-d,d)\}, \quad \Phi_\delta = \Big(\bigcup_{\xi\in D} \Phi_\xi\Big) \cap (R(D) \setminus D),$$
$$A = \Phi_\alpha \sqcup \tilde{\Phi}_\alpha \sqcup \Phi_\beta \sqcup \tilde{\Phi}_\beta \sqcup \Phi_\gamma \sqcup \Phi_\delta \subset \Phi(n)$$

(эти множества действительно не пересекаются). Легко проверяется, что $\mathcal{C}$ задаётся уравнениями

$$\begin{aligned}
&(\alpha) && y_{n-d+1,i}a_{ij} = a_{n-d+1,n-d}y_{n-d,j}, \quad (i,j) \in D^+,\\
&(\beta) && y_{i,d+1}a_{d+1,d} = a_{ij}y_{jd}, \quad (i,j) \in D^+,\\
&(\tilde{\alpha}) && a_{n-d+1,n-d}y_{n-d,j} + a_{n-d+1,d+1}y_{d+1,j} = 0, \quad j < d,\\
&(\tilde{\beta}) && y_{i,d+1}a_{d+1,d} + y_{i,n-d}a_{n-d,d} = 0, \quad i > n-d+1,\\
&(\gamma) && y_{n-d+1,n-d}a_{n-d,d} + y_{n-d+1,d+1}a_{d+1,d} =\\
& && = a_{n-d+1,n-d}y_{n-d,d} + a_{n-d+1,d+1}y_{d+1,d},\\
&(\delta) && y_{ij} = 0, \quad (i,j) \in \Phi_\delta
\end{aligned} \tag{10}$$

(здесь для краткости мы обозначили $a_{ij} = \varphi(i,j) \in k^*$).

Итак, $\mathcal{C}$ описывается уравнениями (10), которые нумеруются корнями из A, а $V(J)$ — уравнениями (5), которые нумеруются корнями из B. Рассмотрим отображения $\sigma_A\colon A \to \Phi(n)$ и $\sigma_B\colon B \to \Phi(n)$, задаваемые формулами

$$\sigma_A(\xi) = \begin{cases} (n-i+1,j), & \xi=(i,j),\ (n-i+1,i)\in D'',\ j\neq d+1,\ i<n-j+1,\\ (i,n-j+1), & \xi=(i,j),\ (n-j+1,j)\in D'',\ i\neq n-d,\ i>n-j+1,\\ (i,d), & \xi=(i,d+1)\in\Phi_\delta,\ i\neq n-d,\\ (n-d+1,j), & \xi=(n-d,j)\in\Phi_\delta,\ j\neq d+1,\\ (n-d+1,d), & \xi=(n-d,d+1)\in\Phi_\delta,\\ \xi & \text{иначе,}\end{cases}$$

$$\sigma_B(\xi) = \begin{cases} (n-d,j), & \xi=(n-d+1,i),\ (i,j)\in D^+,\\ \xi & \text{иначе.}\end{cases}$$

Они вместе определяют отображение $\sigma\colon A\sqcup B\to\Phi(n)$ (здесь $A\sqcup B$ — несвязное объединение множеств A и B), которое имеет вид $\sigma|_A=\sigma_A$, $\sigma|_B=\sigma_B$ и, как несложно проверить, является биекцией. Это завершает доказательство, поскольку $\dim\mathcal{K}_D(\varphi)=\operatorname{codim}\mathcal{C}=|A|$, $\operatorname{codim}V(J)=|B|$. □

Теорема 3.5. *Определяющий идеал J класса сопряжённости $\mathcal{K}_D(\varphi)\subset G_n(k)$ элемента $x_D(\varphi)$ порождается элементами* (5) *со значениями констант* (6).

Доказательство. Поскольку классы сопряжённости $G_n(\bar{k})$ замкнуты в топологии Зариского [12, предложение 2.5], из только что доказанных лемм следует, что $\mathcal{K}_D(\varphi)=V(J)$ над $\bar{k}$. Следовательно, совпадают и множества их k-точек. □

4. Полупрямое разложение G_n

Наша следующая цель — описать явно носитель произвольного субрегулярного характера $\chi=\chi_f$ (он совпадёт с $\mathcal{K}_f$) и вычислить значение характера на каждом классе сопряжённости, лежащем в носителе. Мы используем индукцию по размерности группы и метод полупрямого разложения Макки (см., например, [10]). В этом разделе собраны необходимые предварительные сведения.

Пусть $G=A\rtimes B$ — произвольная конечная группа, представленная в виде полупрямого произведения своих подгрупп A и B (т. е. $G=AB$ и $A\lhd G$).

Определение 4.1. Пусть $G=A\rtimes B$ — конечная группа, причём A — абелева группа. Для произвольного неприводимого характера ψ группы A назовём *централизатором* этого характера в группе B множество вида

$$B^\psi=\{b\in B\mid \psi\circ\tau_b=\psi\},\quad \text{где}\quad \tau_b\colon A\to A,\quad a\mapsto bab^{-1}.$$

Теорема 4.2 [10]. *Пусть $G=A\rtimes B$ — конечная группа, причём A — абелева группа. Тогда каждое неприводимое представление τ группы G имеет вид $\tau=\operatorname{Ind}^G_{A\rtimes B^\chi}\psi\otimes\tilde{\tau}$, где ψ — некоторый неприводимый характер группы A,*

$\tilde\tau$ — некоторое неприводимое представление централизатора B^ψ. Следовательно, каждый неприводимый характер χ группы G имеет вид $\chi = \mathrm{Ind}_{A\rtimes B^\psi}^G \psi\tilde\chi$, где $\tilde\chi$ и ψ — некоторые неприводимые характеры групп A и B_ψ соответственно. Обратно, каждый характер вида $\mathrm{Ind}_{A\rtimes B^\psi}^G \psi\tilde\chi$ будет неприводимым характером G. $\square$

Положим

$$P_n = \{g = (y_{ij}) \in G_n \mid y_{ij} = 0 \text{ при } j \neq 1\},$$
$$G_{n-1} \cong \{g = (y_{ij}) \in G_n \mid y_{ij} = 0 \text{ при } j = 1\} \hookrightarrow G_n.$$

В этих обозначениях $G_n = P_n \rtimes G_{n-1}$, причём группа $P_n \cong \mathbb{F}_q^{n-1}$ абелева, так что мы находимся в условиях теоремы 4.2.

Пусть $\theta\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ — произвольный нетривиальный характер (везде далее он предполагается фиксированным). Любой неприводимый характер группы P_n имеет вид

$$p = (p_{ij}) \in P_n \mapsto \theta(s_2 p_{21}) \ldots \theta(s_n p_{n1}),$$

где $s_i \in \mathbb{F}_q$, $2 \leqslant i \leqslant n$, — произвольные константы. Нас будут интересовать случаи $\theta_n(p) = \theta(s_n p_{n1})$ и $\theta_{n-1}(p) = \theta(s_{n-1} p_{n-1,1})$. Легко проверяется, что их централизаторы в подгруппе G_{n-1} имеют вид

$$G_{n-1}^{\theta_n} = \{g = (y_{ij}) \in G_{n-1} \subset G_n \mid y_{nj} = 0 \text{ при любых } 1 \leqslant j \leqslant n-1\},$$
$$G_{n-1}^{\theta_{n-1}} = \{g = (y_{ij}) \in G_{n-1} \subset G_n \mid y_{n-1,j} = 0 \text{ при любых } 1 \leqslant j \leqslant n-2\}.$$

Отметим, что

$$G_{n-1}^{\theta_n} \cong G_{n-2}, \quad G_{n-1}^{\theta_{n-1}} \cong \tilde G_{n-2} = G_{n-2} \times \mathbb{F}_q$$

(везде далее будем считать, что эти группы именно так вложены в G_n).

Для произвольной линейной формы $f \in \mathfrak{g}_n^*$ через $\pi(f) \in \mathfrak{g}_{n-2}^*$ и $\tilde\pi(f)$ обозначим её ограничения на $\mathfrak{g}_{n-2}$ и $\tilde{\mathfrak{g}}_{n-2}$ соответственно (здесь $\tilde{\mathfrak{g}}_{n-2} = \mathrm{Lie}\,\tilde G_{n-2}$ и вложения подалгебр в $\mathfrak{g}_n$ соответствуют вложениям подгрупп в G_n). Тогда, в соответствии с методом Макки, если $1 \leqslant d < n_1$, $f = (\xi_{ij}) \in \mathcal{O}_d$ — каноническая форма d-субрегулярной орбиты, то

$$\begin{gathered} T_f = \mathrm{Ind}_{P_n \rtimes G_{n-2}}^{G_n} \theta_n \otimes T_{\pi(f)}, \quad \text{где} \quad s_n = \xi_{1n}, \quad \text{если} \quad d > 1, \\ T_f = \mathrm{Ind}_{P_n \rtimes \tilde G_{n-2}}^{G_n} \theta_{n-1} \otimes T_{\tilde\pi(f)}, \quad \text{где} \quad s_{n-1} = \xi_{1,n-1}, \quad \text{если} \quad d = 1, \end{gathered} \tag{11}$$

где через T_f (соответственно $T_{\pi(f)}$ и $T_{\tilde\pi(f)}$) обозначено представление группы G_n (соответственно G_{n-2} и $\tilde G_{n-2}$), связанное с орбитой $\Omega_f \subset \mathfrak{g}_n^*$ (соответственно $\Omega_{\pi(f)} \subset \mathfrak{g}_{n-2}^*$ и $\Omega_{\tilde\pi(f)} \subset \tilde{\mathfrak{g}}_{n-2}^*$). Второе равенство имеет смысл, поскольку к группе $\tilde G_{n-2}$ также применим метод орбит. Таким образом, задача сводится к изучению представления меньшей размерности, что даёт возможность запустить индукцию.

Наконец, для построения индуцированных представлений нам понадобятся разложения G_n на левые смежные классы по соответствующим подгруппам. В качестве полной системы представителей $G_n/(P_n \rtimes G_{n-2})$ и $G_n/(P_n \rtimes \tilde G_{n-2})$

выберем соответственно множества

$$H_n = \{h = (t_{ij}) \in G_{n-1} \mid t_{ij} = 0 \text{ при } i \neq n\},$$
$$\tilde{H}_n = \{h = (t_{ij}) \in G_{n-1} \mid t_{ij} = 0 \text{ при } i \neq n-1\}.$$

Замечание 4.3. Поскольку $\tilde{G}_{n-2} \cong G_{n-2} \times \mathbb{F}_q$, мы знаем, как выглядит представление $T_{\tilde{\pi}(f)}$. А именно, вложим G_{n-2} в $\tilde{G}_{n-2}$ как $G_{n-2} \times 0$ (это индуцирует вложения алгебр Ли $\mathfrak{g}_{n-2} \hookrightarrow \tilde{\mathfrak{g}}_{n-2}$). Пусть ψ — проекция $\tilde{G}_{n-2} \to G_{n-2} = G_{n-2} \times 0$ и $g = (y_{ij}) \in \tilde{G}_{n-2}$. Тогда характер представления $T_{\tilde{\pi}(f)}$ имеет вид $g \mapsto \chi\big(\psi(g)\big)\theta(\xi_{n-1,n}y_{n,n-1})$, где χ — характер основной серии G_{n-2}, соответствующий орбите $\big(\tilde{\pi}(f)\big)\big|_{\mathfrak{g}_{n-2}}$.

Замечание 4.4. Можно было бы воспользоваться «симметричными» разложениями $G_n = P'_n \rtimes G'_{n-1}$, где

$$P'_n = \{g = (y_{ij}) \in G_n \mid y_{ij} = 0 \text{ при } j \neq 1\},$$
$$G'_{n-1} = \{g = (y_{ij}) \in G_n \mid y_{ij} = 0 \text{ при } j = 1\}.$$

Отражая относительно побочной диагонали остальные рассматриваемые подгруппы и подмножества, получим $\tilde{G}'_{n-2}$, H'_n и $\tilde{H}'_n$ (с группой G_{n-2}, вложенной в G_n указанным выше способом, при таком отражении ничего не происходит, т. е. $G'_{n-2} = G_{n-2}$). В качестве неприводимого характера $\theta'_{n-1}\colon P'_n \to \mathbb{C}$ тогда нужно выбрать $P'_n \ni p = (p_{ij}) \mapsto \theta(\xi_{2,n}p_{n,2} + \xi_{n-1,n}p_{n,n-1})$.

Теперь всё готово для того, чтобы завершить доказательство теоремы 2.9.

5. Доказательство основной теоремы

Пусть, как и ранее, $1 \leqslant d < n_1$, $f \in \mathcal{O}_d$ — каноническая форма d-субрегулярной орбиты, $\chi = \chi_f$ — соответствующий неприводимый характер. Мы докажем в этом разделе, что его носитель — это в точности $\mathcal{K}_f$, и вычислим значение на произвольном классе сопряжённости $\mathcal{K}_D(\varphi) \subset \mathcal{K}_f$. В разделе 3 мы доказали, что алгебраическое подмногообразие $\mathcal{K}_D(\varphi)$ высекается в G_n уравнениями (5) со значениями констант (6); другими словами, $V(J)$ — определяющий идеал $\mathcal{K}_D(\varphi)$ в $k[G_n]$.

Доказательство использует индукцию по n. При малых n формула проверяется непосредственно (например, с помощью равенства (1)). Мы везде будем предполагать, что если $g = (y_{ij}) \in G_n$, то $y_{n-d+1,n-d} \neq 0$ (это соответствует тому, что $D \supset D_1(d)$). Сначала нам придётся рассмотреть случай $d = 1$. Будем для удобства обозначать

$$\Phi_{i_0} = \{(i,j) \in \Phi(n) \mid i = i_0\}, \quad \tilde{\Phi}_{i_0} = \bigcup_{i \geqslant i_0} \Phi_i,$$
$$\Phi^{j_0} = \{(i,j) \in \Phi(n) \mid j = j_0\}, \quad \tilde{\Phi}^{j_0} = \bigcup_{j \leqslant j_0} \Phi^j.$$

Лемма 5.1. *Пусть $f \in \mathcal{O}_1$ — каноническая форма 1-субрегулярной орбиты, $g \in G_n$. Тогда если $\chi(g) \neq 0$, то $g \in \mathcal{K}_D(\varphi)$ для некоторого $x_D(\varphi)$, удовлетворяющего условию* (4).

Доказательство. Напомним, что согласно соотношениям (11)

$$T_f = \mathrm{Ind}_{P_n \rtimes \tilde{G}_{n-2}}^{G_n} \theta_{n-1} \otimes T_{\tilde{\pi}(f)}.$$

Поскольку $G_n = P_n \rtimes G_{n-1}$, каждый элемент $g \in G_n$ однозначно представляется в виде $g = pg'$, $p \in P_n$, $g' \in G_{n-1}$ (на самом деле p и g' получаются заменой соответствующих элементов g нулями). Следовательно, определён элемент $p(g) \in P_n$. Через $\tilde{\pi}(g)$ обозначим элемент $\tilde{G}_{n-2}$, получающийся из g заменой нужных элементов нулями. В таких обозначениях

$$\chi(g) = \chi_f(g) = \mathrm{Ind}_{P_n \rtimes \tilde{G}_{n-2}}^{G_n} \theta_{n-1}\big(p(g)\big)\chi_{\tilde{\pi}(f)}\big(\tilde{\pi}(g)\big) = \\ = \sum_{h \in \tilde{H}_n} \theta_{n-1}\big(p(h^{-1}gh)\big)\chi_{\tilde{\pi}(f)}\big(\tilde{\pi}(h^{-1}gh)\big) \quad (12)$$

(здесь суммирование ведётся по тем $h \in \tilde{H}_n$, для которых $h^{-1}gh \in P_n \rtimes \tilde{G}_{n-2}$).

Заметим, что для любого $h = (t_{ij}) \in \tilde{H}_n$

$$\begin{aligned} (h^{-1}gh)_{n,j} &= y_{n,j} + y_{n,n-1}t_{n-1,j}, \quad \text{если } 2 \leqslant j \leqslant n-2, \\ (h^{-1}gh)_{n-1,j} &= y_{n-1,j} - \sum_{i=j+1}^{n-2} t_{n-1,i}y_{i,1}, \quad \text{если } 1 \leqslant j \leqslant n-3, \\ (h^{-1}gh)_{ij} &= y_{ij} \quad \text{для любых других } 1 \leqslant j < i \leqslant n. \end{aligned} \quad (13)$$

Если $\chi_{\tilde{\pi}(f)}\big(\tilde{\pi}(g)\big) \neq 0$, то из уравнений регулярных орбит (теорема 1.4), формулы для характеров основной серии (теорема 1.12) и замечания 4.3 мы получаем, что

$$\chi_{\tilde{\pi}(f)}\big(\tilde{\pi}(g)\big) = q^s\, \chi_{\pi^2(f)}\big(\pi^2(g)\big)\theta\left(\xi_{2,n} \cdot (-1)^{|X_1|-1}\frac{\Delta^{X_1}(g)}{\Delta^{X_2}(g)}\right)\theta(\xi_{n-1,n}y_{n,n-1}). \quad (14)$$

Здесь $X_1 = D \setminus (\Phi^1 \cup \Phi^{n-1})$, $X_2 = X_1 \setminus \Phi_n$, $s = |(R(D^+) \cap \Phi_n) \setminus (\tilde{\Phi}^2 \cup \Phi^{n-1})|$ и через π^2 обозначены отображения $G_n \to G_{n-4}$ и $\mathfrak{g}_n^* \to \mathfrak{g}_{n-4}^*$ (предполагается, что G_{n-4} вложена в G_n как $G_{n-4} \subset G_{n-2} \subset G_n$). В частности, $\chi_{\pi^2(f)}$ — характер основной серии группы G_{n-4}.

В то же время из соотношений (13) следует, что

$$\chi_{\pi^2(f)}\big(\pi^2(g)\big) = \chi_{\pi^2(f)}\big(\pi^2(h^{-1}gh)\big)$$

для любого $h \in \tilde{H}_n$. Используя это соотношение в (12) и учитывая равенство (14), получаем

$$\chi(g) = q^s\, \chi_{\pi^2(f)}\big(\pi^2(g)\big) \times \\ \times \sum_{h \in \tilde{H}_n} \theta_{n-1}\big(p(h^{-1}gh)\big)\theta\left(\xi_{2,n} \cdot (-1)^{|X_1|-1}\frac{\Delta^{X_1}(h^{-1}gh)}{\Delta^{X_2}(h^{-1}gh)} + \xi_{n-1,n}y_{n,n-1}\right). \quad (15)$$

При этом

$$\begin{gathered}\theta_{n-1}\bigl(p(h^{-1}gh)\bigr)=\theta\biggl(\xi_{1,n-1}\biggl(y_{n-1,1}-\sum_{i=2}^{n-2}t_{n-1,i}y_{i,1}\biggr)\biggr),\\ \frac{\Delta^{X_1}(h^{-1}gh)}{\Delta^{X_2}(h^{-1}gh)}=\frac{\Delta^{X_1}(g)+y_{n,n-1}\Delta^{X_1}(g_t)}{\Delta^{X_2}(g)},\end{gathered}\tag{16}$$

где через g_t обозначена матрица, получающаяся из g заменой y_{nj} на t_{nj} при $2\leqslant j\leqslant n-2$ (второе равенство проверяется простым вычислением).

Итак, предположим, что $\chi(g)\neq 0$. Поскольку тогда в силу равенства (15) $\chi_{\pi^2(f)}\bigl(\pi^2(g)\bigr)\neq 0$, то часть из условий (5), описывающих $\mathcal{K}_D(\varphi)$, выполнена автоматически. Остаётся проверить лишь следующие равенства:

$$\begin{aligned}&\xi_{1,n-1}y_{2,1}=\xi_{2,n}y_{n,n-1}\quad\text{(это условие (4))},\\ &\alpha_{ij}=\beta_{ij}=0,\quad (i,j)\in D^+,\\ &\Delta_{ij}=0,\quad (i,j)\in (R(D'')\setminus D')\cap(\tilde\Phi^2\cup\tilde\Phi_{n-1}).\end{aligned}$$

Но $(n,n-1),(2,1)\in D''$, поэтому $R(D'')\cap(\Phi^1\cup\Phi_n)=\varnothing$, а значит, последний набор равенств на самом деле имеет вид $\Delta_{n-1,j}=0$ и $\Delta_{i,2}=0$.

Рассмотрим сначала равенства $\Delta_{n-1,j}=0$. Если $j>m=\max\limits_{(i,j)\in D}j$, то они принимают вид $\Delta_{n-1,j}=y_{n-1,j}=0$, а остальные равенства (с $j\leqslant m$) — это в точности условия Кронекера—Капелли совместности системы линейных относительно $t_{n-1,j}$ уравнений

$$y_{n-1,j}-\sum_{i=j+1}^{n-2}t_{n-1,i}y_{i,1}=0,\quad 2\leqslant j\leqslant m.\tag{17}$$

В обоих случаях равенства действительно имеют место, так как они выражают условие $h^{-1}gh\in P_n\rtimes\tilde G_{n-2}$ (см. соотношения (13)).

С другой стороны, из этого условия и соотношений (13) следует, что

$$t_{n-1,j}=-\frac{y_{n,j}}{y_{n,n-1}}$$

для любых $m<j\leqslant n-2$. Подставляя эти выражения в систему (17), получаем, что $\alpha_{ij}=0$ для любого $(i,j)\in D^+$ (остальные равенства будут иметь место в силу совместности системы (17)). Равенства $\beta_{ij}=0$, $(i,j)\in D^+$, можно получить аналогично, воспользовавшись симметричным полупрямым разложением G_n (см. замечание 4.4). Так же доказываются и оставшиеся равенства $\Delta_{i,2}=0$.

Наконец, докажем, что имеет место соотношение (4). Для этого заметим, что $\sum\limits_{c\in\mathbb{F}_q}\theta(ct)=0$ для любого $t\in\mathbb{F}_q^*$, поэтому при тех $t_{n-1,j}$, которые входят в формулу для характера и изменяются независимо от остальных, обязательно должны стоять нулевые коэффициенты. К таким, например, относится $t_{n-1,2}$. Поскольку

$$\Delta^{X_1}(g^t)=(-1)^{|X_1|-2}t_{n-1,2}\Delta^{X_2}(g)+\ldots$$

(многоточие заменяет члены, не содержащие $t_{n-1,2}$), то при $t_{n-1,2}$ в формуле характера стоит коэффициент

$$-\xi_{1,n-1}y_{21}+\xi_{2,n}\cdot(-1)^{|X_1|}y_{n,n-1}\frac{(-1)^{|X_1|-2}\Delta^{X_2}(g)}{\Delta^{X_2}(g)}=-\xi_{1,n-1}y_{21}+\xi_{2,n}y_{n,n-1},$$

откуда получаем $-\xi_{1,n-1}y_{21}+\xi_{2,n}y_{n,n-1}=0$. □

Лемма 5.2. *Пусть $f\in\mathcal{O}_1$ — каноническая форма 1-субрегулярной орбиты, $g\in\mathcal{K}_D(\varphi)\subset\mathcal{K}_f$. Тогда $\chi(g)=q^{m_D}\,\theta_f\big(e_D(\varphi)\big)$.*

Доказательство. Мы вычислим значение характера в предположении, что оно не равно нулю. Подставляя выражения (16) в формулу (15), получаем

$$\chi(g)=q^s\,\chi_{\pi^2(f)}\big(\pi^2(g)\big)\sum_{h\in\tilde{H}_n}\theta\Bigg(\xi_{1,n-1}\Bigg(y_{n-1,1}-\sum_{i=2}^{n-2}t_{n-1,i}y_{i,1}\Bigg)+$$

$$+\xi_{2,n}\cdot(-1)^{|X_1|}\frac{\Delta^{X_1}(g)+y_{n,n-1}\Delta^{X_1}(g_t)}{\Delta^{X_2}(g)}+\xi_{n-1,n}y_{n,n-1}\Bigg),$$

если только $\chi_{\tilde{\pi}(f)}\big(\tilde{\pi}(g)\big)$ отлично от 0. Чтобы $\chi(g)$ было отлично от 0, должны выполняться четыре условия, которые мы рассмотрим по отдельности.

1. Нужно, чтобы $\chi_{\pi^2(f)}\big(\pi^2(g)\big)\neq 0$. Но это условие выполнено автоматически, так как $g\in\mathcal{K}_D(\varphi)$. В самом деле, очевидно, что $\pi^2(D)\in\Phi(n-4)$ — регулярное подмножество, причём $\pi^2(g)\in\mathcal{K}_{\pi^2(D)}\big(\varphi|_{\pi^2(D)}\big)$. Но $\chi_{\pi^2(f)}\big(\pi^2(g)\big)$ — характер основной серии G_{n-4}, поэтому согласно теореме 1.12

$$\chi_{\pi^2(f)}\big(\pi^2(g)\big)=q^{m_{\pi^2(D)}}\theta_{\pi^2(f)}\Big(\pi^2\big(e_D(\phi)\big)\Big)$$

(отображение $\pi^2\colon\mathfrak{g}_n\to\mathfrak{g}_{n-4}$ определено очевидным образом).

2. Необходимо, чтобы выполнялись дополнительные условия, обеспечивающие неравенство $\chi_{\tilde{\pi}(f)}\big(\tilde{\pi}(g)\big)\neq 0$. Поскольку $\chi_{\pi^2(f)}\big(\pi^2(g)\big)\neq 0$, то остаётся проверить, что $\Delta_{ij}(h^{-1}gh)=0$ для $(i,j)\in(R(D'')\setminus D)\cap(\Phi^2\cup\Phi_n)$. Соответствующие условия имеют вид

$$\Delta_{i,2}(g)=0,\quad (i,2)\in R(D)''\setminus D,$$
$$\Delta_{nj}(h^{-1}gh)=\Delta_{nj}(g)+y_{n,n-1}\Delta_{nj}(g_t)=0,\quad (n,j)\in R(D)''\setminus D.$$

Равенства из первого набора выполняются (они входят в условия Кронекера—Капелли совместности системы (17)). Поскольку $t_{n-1,j}$ при $3\leqslant j\leqslant m$ не входят больше ни в какие условия, кроме второго набора равенств, то $t_{n-1,j}$, $3\leqslant j\leqslant m$, $(n-1,j)\notin R(D'')$, могут быть выбраны произвольно, а остальные $t_{n-1,j}$ выражаются через них по формулам

$$t_{n-1,j}=(-1)^{|X_1|-3}\frac{-\Delta_{n,j}(g)-\sum\limits_{\substack{r>j\\(n-1,r)\notin R(D'')}}\pm t_{n-1,r}\Delta^{Y_r(j)}(g)}{y_{n,n-1}\Delta^{Y(j)}},\qquad(18)$$

где

$$Y(j) = D^+ \setminus \tilde{\Phi}^j, \quad Y_r(j) = \bigl(D^+ \setminus (\Phi^r \cup \tilde{\Phi}^{j-1})\bigr) \cup \{(n-r+1, j)\},$$

а знаки при $t_{n-1,r}$ чередуются.

3. Имеет смысл рассматривать только те $h \in \tilde{H}_n$, для которых $h^{-1}gh \in \in P_n \rtimes \tilde{G}_{n-2}$. Но это условие всегда выполнено, если только $g \in \mathcal{K}_D(\varphi)$ (см. доказательство леммы 5.1).

4. Наконец, надо потребовать, чтобы при тех $t_{n-1,j}$, которые входят в формулу для характера и изменяются независимо от остальных, стояли нулевые коэффициенты. К таким относятся $t_{n-1,2}$ и $t_{n-1,j}$, $3 \leqslant j \leqslant m$, $(n-1,j) \notin R(D'')$. В лемме 5.1 показано, что условие (4) необходимо и достаточно для того, чтобы коэффициент при $t_{n-1,2}$ равнялся нулю, поэтому осталось добиться, чтобы при каждом $t_{n-1,j}$, $3 \leqslant j \leqslant m$, $(n-1,j) \notin R(D'')$, в формуле для характера стоял нулевой коэффициент. Упрощая формулу (18) с учётом всех имеющихся предположений, получаем набор равенств $\beta_{ij} = 0$, $(i,j) \in D^+$, которые выполнены, так как $g \in \mathcal{K}_D(\varphi)$.

С учётом всего вышесказанного в формуле характера остаётся выражение

$$\begin{aligned}\xi_{n-1,n}y_{n,n-1} &+ \xi_{1,n-1}\Biggl(y_{n-1,1} - \sum_{i=m+1}^{n-2} y_{i,1}\left(-\frac{y_{n-1,i}}{y_{n,n-1}}\right)\Biggr) + \xi_{2,n}\cdot\ldots = \\ &= \xi_{n-1,n}y_{n,n-1} + \xi_{1,n-1}\frac{\sum\limits_{i=n-m+1}^{n-1} y_{n,i}y_{i,1}}{y_{n,n-1}} + \xi_{1,n-1}\frac{\sum\limits_{i=m+1}^{n-m} y_{n,i}y_{i,1}}{y_{n,n-1}} + \xi_{2,n}\cdot\ldots,\end{aligned} \tag{19}$$

где каждое слагаемое в группе, обозначенной многоточием, содержит в качестве сомножителя в числителе ровно один из элементов $y_{i,1}$, $2 \leqslant i \leqslant n-m$, и никакие другие слагаемые этих элементов не содержат. В то же время если бы мы использовали симметричное полупрямое разложение группы G_n (см. замечание 4.4), то пришли бы к выражению

$$\begin{aligned}\xi_{n-1,n}y_{n,n-1} &+ \xi_{2,n}\frac{\sum\limits_{j=2}^{n-m} y_{n,j}y_{j,1}}{y_{21}} + \xi_{1,n-1}\cdot\ldots = \\ &= \xi_{n-1,n}y_{n,n-1} + \xi_{2,n}\frac{\sum\limits_{j=2}^{m} y_{n,j}y_{j,1}}{y_{21}} + \xi_{2,n}\frac{\sum\limits_{j=m+1}^{n-m} y_{n,j}y_{j,1}}{y_{21}} + \xi_{1,n-1}\cdot\ldots,\end{aligned} \tag{20}$$

которое должно совпасть с (19) (здесь каждое слагаемое в группе, обозначенной многоточием, содержит в качестве сомножителя в числителе ровно один из элементов $y_{n,j}$, $n-m+1 \leqslant j \leqslant n-1$, и никакие другие слагаемые этих элементов не содержат). Поскольку $\xi_{1,n-1}y_{21} = \xi_{2,n}y_{n,n-1}$, то, сравнивая (19) с (20), заключаем, что на самом деле они имеют одинаковый вид

$$\xi_{1,n-1}\frac{\sum\limits_{i=n-m+1}^{n-1} y_{n,i}y_{i,1}}{y_{n,n-1}}+\xi_{2,n}\frac{\sum\limits_{j=2}^{n-m} y_{n,j}y_{j,1}}{y_{21}}+\xi_{n-1,n}y_{n,n-1}=$$
$$=\xi_{1,n-1}\frac{\gamma(g)}{y_{n,n-1}}+\xi_{n-1,n}y_{n,n-1}.$$

При этом

$$\sum_{h\in\tilde{H}_n}\theta\left(\xi_{1,n-1}\frac{\gamma(g)}{y_{n,n-1}}+\xi_{n-1,n}y_{n,n-1}\right)=q^{s_1}\,\theta\left(\xi_{1,n-1}\frac{\gamma(g)}{y_{n,n-1}}+\xi_{n-1,n}y_{n,n-1}\right),\tag{21}$$

где $s_1=|R(D)\cap\Phi_{n-1}\cap\tilde{\Phi}^m|$. Действительно, $t_{n-1,j}$, $2\leqslant j\leqslant m$, $(n-1,j)\in R(D)$, изменяются независимо и при каждом фиксированном наборе их значений остальные $t_{n-1,j}$ определены однозначно.

Осталось заметить, что

$$\xi_{1,n-1}\frac{\gamma(g)}{y_{n,n-1}}=\xi_{1,n-1}\frac{\gamma(x_D(\varphi))}{y_{n,n-1}}=\xi_{1,n-1}\frac{a_{n-d+1,n-d}a_{n-d,1}+a_{n-d+1,2}a_{2,1}}{a_{n,n-1}}=$$
$$=\xi_{1,n-1}a_{n-1,1}+\frac{\xi_{1,n-1}}{a_{n,n-1}}a_{n-d+1,2}a_{2,1}=\xi_{1,n-1}a_{n-1,1}+\frac{\xi_{2,n-d+1}}{a_{2,1}}a_{n-d+1,2}a_{2,1}=$$
$$=\xi_{1,n-1}a_{n-1,1}+\xi_{2,n-d+1}a_{n-d+1,2}\tag{22}$$

(здесь, как и ранее, $a_{ij}=\varphi(i,j)$).

Подставим выражения (21) и (22) в формулу (15):

$$\chi_{n,f}(g)=q^s\,\chi_{\pi^2(f)}\big(\pi^2(g)\big)\sum_{h\in\tilde{H}_n}\theta\left(\xi_{1,n-1}\frac{\gamma(g)}{y_{n,n-1}}+\xi_{n-1,n}y_{n,n-1}\right)=$$
$$=q^{s+s_1}\,\chi_{\pi^2(f)}\big(\pi^2(g)\big)\theta(\xi_{n-1,1}a_{n,n-1}+\xi_{1,n-1}a_{n-1,1}+\xi_{2,n-d+1}a_{n-d+1,2})=$$
$$=q^{m_D}\,\theta_f\big(e_D(\varphi)\big),$$

так как $m_{\pi^2(D)}+s+s_1=m_D$. Лемма доказана. □

Лемма 5.3. *Пусть $1<d<n_1$, $f\in\mathcal{O}_d$ — каноническая форма d-субрегулярной орбиты, $\chi=\chi_f$ — соответствующий характер, $g\in G_n$. Тогда $\chi(g)\neq 0$ тогда и только тогда, когда $g\in\mathcal{K}_D(\varphi)\subset\mathcal{K}_f$, причём в этом случае $\chi(g)=$ $=q^{m_D}\,\theta_f\big(e_D(\varphi)\big)$.*

Доказательство. Согласно формулам (11), в условиях леммы

$$T_f=\mathrm{Ind}_{P_n\rtimes G_{n-2}}^{G_n}\theta_n\otimes T_{\pi(f)},$$

поэтому

$$\chi(g)=\sum_{h\in H_n}\theta_n\big(p(h^{-1}gh)\big)\chi_{\pi(f)}\big(\pi(h^{-1}gh)\big)$$

(здесь суммирование ведётся по тем $h\in H_n$, для которых $h^{-1}gh\in P_n\rtimes G_{n-2}$). Поскольку $\pi(f)$ — каноническая формы субрегулярной орбиты для G_{n-2}, можно считать, что для $\chi_{\pi(f)}$ теорема 2.9 уже доказана (предположение индукции).

Используя те же рассуждения, что и в двух предыдущих леммах (критерий Кронекера—Капелли совместности системы линейных уравнений, выражающих условие $h^{-1}gh \in P_n \rtimes G_{n-2}$, и отсутствие в формуле характера независимо изменяющихся переменных), получим искомый результат. □

6. Уточнения и обобщения

До сих пор мы рассматривали только d-субрегулярные подмножества D с $D(d) = D_1(d)$, причём формулировали все утверждения для случая $d < n_1$. В этом разделе мы рассмотрим оставшиеся случаи.

Во-первых, в случае $D \supset D_0(d)$ подмножество D является базисным, поэтому класс сопряжённости $\mathcal{K}_D(\varphi)$ описывается уравнениями (2) (см. [6]).

Во-вторых, нужно рассмотреть субрегулярные орбиты второго и третьего типа (это n_1-субрегулярные орбиты при чётном и нечётном n соответственно). Заметим, что если $f = (\xi_{ij}) \in \mathcal{O}_{n_1}$ — каноническая форма субрегулярной орбиты второго типа, то множество $D = \{(i,j) \in \Phi(n) \mid \xi_{ji} \neq 0)\}$ само является базисным, поэтому в данном случае субрегулярный характер является базисным характером Андре (полное описание таких характеров имеется в [6]). То же верно и для субрегулярной орбиты третьего типа, если $\xi_{n_1,n_0+1} = 0$ (см. определение 2.2).

В случае когда $\mathcal{O}_f$ — субрегулярная орбита третьего типа и $\xi_{n_1,n_0+1} \neq 0$, все формулировки дословно переносятся со случая орбит первого типа (за исключением того, что в идеал J не нужно включать многочлен $\gamma - c_0$). В каждом из случаев для доказательства можно использовать точно такие же рассуждения, как в предыдущем разделе, поэтому мы не будем их приводить.

Наконец, нужно объяснить происхождение многочленов α_{ij}, β_{ij} и γ, которые участвуют в описании субрегулярных характеров первого типа с $D \supset D_1(d)$ (они уже не являются минорами). Для этого рассмотрим так называемую *характеристическую матрицу*

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ ty_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ty_{n-1,1} & ty_{n-1,2} & \dots & 1 & 0 \\ ty_{n,1} & ty_{n,2} & \dots & ty_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Каждый минор матрицы $M(t)$ — многочлен от переменной t, коэффициенты которого, в свою очередь, являются многочленами от переменных y_{ij}, поэтому их можно считать функциями на G_n (или элементами $\mathbb{F}_q[\mathfrak{g}_n]$).

Обозначение 6.1. Будем под $M^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_k}(t^d, g)$ понимать значение коэффициента при t^d минора матрицы $M(t)$, натянутого на строки $1 \leqslant i_1, \dots,\ i_k \leqslant n$ и столбцы $1 \leqslant j_1, \dots,\ j_k \leqslant n$, на элементе $g = (y_{ij}) \in G_n$. Также будем использовать более короткое обозначение $M^X(d,g) = M^{\sigma(i_1,\dots,i_k)}_{\tau(j_1,\dots,j_k)}(t^d, g)$, где X есть множество пар вида $X = \{(i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k)\}$, а σ, τ — перестановки, располагающие каждый из наборов индексов в неубывающем порядке.

Например, для любого $1 \leqslant d \leqslant n_0$ имеем $M^X(d, g) = \Delta_d(g)$, где $X = \{(n, 1), (n-1, 2), \ldots, (n_1+2, n_0)\}$, т. е. рассматривавшиеся ранее миноры являются одновременно коэффициентами миноров характеристической матрицы. С другой стороны, если $(i, j) \in D^+$ ($D \supset D_1(d)$ — d-субрегулярное подмножество и $1 \leqslant d < n_1$), $m = \max\limits_{(i,j)\in D} j$, то

$$\alpha_{ij}(g) = \pm M^{X^\alpha_{ij}}(2, g), \quad X^\alpha_{ij} = \{n-d+1, j\} \cup \bigcup_{d<i\leqslant m} \{(i, i)\},$$

$$\beta_{ij}(g) = \pm M^{X^\beta_{ij}}(2, g), \quad X^\beta_{ij} = \{i, d\} \cup \bigcup_{d<j\leqslant m} \{(j, j)\},$$

$$\gamma(g) = \pm M^{X^\gamma}(2, g), \qquad X^\gamma = \{n-d+1, d\} \cup \bigcup_{d<i<n-d+1} \{(i, i)\}$$

(выбор знака зависит от количества элементов в D^+).

Таким образом, субрегулярные характеры описываются в терминах коэффициентов миноров характеристической матрицы. На самом деле в этих терминах описываются сами субрегулярные орбиты и вообще все орбиты при $n \leqslant 7$ [7], а также все неприводимые характеры при $n \leqslant 5$ [1]. Можно предположить, что коэффициентов миноров характеристической матрицы достаточно для описания вообще всех орбит и характеров в произвольной размерности.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора А. Н. Панова за постоянное внимание и поддержку.

Литература

[1] Игнатьев М. В. Характеры унитреугольной группы над конечным полем // Материалы XIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов». Т. IV. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006. — С. 65—66.

[2] Кириллов А. А. Лекции по методу орбит. — Новосибирск: Научная книга ИДМИ, 2002.

[3] Кириллов А. А. Унитарные представления нильпотентных групп Ли // Успехи мат. наук. — 1962. — Т. 17. — С. 57—110.

[4] Кириллов А. А. Метод орбит и конечные группы. — М.: МЦНМО, МК НМУ, 1998.

[5] Andre C. A. M. Basic characters of the unitriangular group // J. Algebra. — 1995. — Vol. 175. — P. 287—319.

[6] Andre C. A. M. The basic character table of the unitriangular group // J. Algebra. — 2001. — Vol. 241. — P. 437—471.

[7] Ignatev M. V., Panov A. N. Coadjoint orbits of the group $\mathrm{UT}(7, K)$. — 2006. — `arXiv: math.RT/0603649`.

[8] Kazhdan D. Proof of Springer's hypothesis // Israel J. Math. — 1977. — Vol. 28. — P. 272—286.

[9] Kirillov A. A. Variations on the triangular theme // Amer. Math. Soc. Transl. — 1995. — Vol. 169. — P. 43—73.

[10] Lehrer G. I. Discrete series and the unipotent subgroup // Composito Math. — 1974. — Vol. 28, fasc. 1. — P. 9—19.

[11] Lusztig G. Subregular nilpotent elements and bases in K-theory // Can. J. Math. — 1999. — Vol. 51, no. 6. — P. 1194—1225.

[12] Steinberg R. Conjugacy Classes in Algebraic Groups. — Berlin: Springer, 1974. — (Lect. Notes Math.; Vol. 366).