Коприсоединённые орбиты группы $\mathrm{UT}(7, K)$*

М. В. ИГНАТЬЕВ
Самарский государственный университет
e-mail: mihail_ignatev@samaramail.ru

А. Н. ПАНОВ
Самарский государственный университет
e-mail: apanov@list.ru

УДК 512.54

Ключевые слова: треугольная группа, представления групп, скобки Пуассона.

Аннотация

В работе даётся описание неприводимых представлений и орбит коприсоединённого представления для унитреугольной группы порядка, меньшего или равного семи. Для унитреугольной группы произвольного порядка получено описание субрегулярных орбит.

Abstract

M. V. Ignatev, A. N. Panov, Coadjoint orbits of the group $\mathrm{UT}(7, K)$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 5, pp. 127—159.

We classify the irreducible representations and the coadjoint orbits of a unitriangular group of size less than or equal to seven. We classify the subregular orbits of a unitriangular group of arbitrary size.

Введение

Орбиты коприсоединённого действия играют важную роль в гармоническом анализе, теории динамических систем, некоммутативной геометрии. Метод орбит А. А. Кириллова позволяет свести задачу классификации унитарных представлений нильпотентной группы Ли к классификации коприсоединённых орбит [3, 4] и решать задачи теории представлений в геометрических терминах пространства орбит. Однако в конкретных примерах обнаруживается, что классификация коприсоединённых орбит сама по себе является трудной задачей. В частности, далека от решения задача описания коприсоединённых орбит для унитреугольной группы $\mathrm{UT}(n, K)$ произвольного порядка n [4,10,11]. Классификация регулярных орбит (т. е. орбит максимальной размерности) была получена в самой первой работе по методу орбит [3]. Известна классификация коприсоединённых орбит для $n \leqslant 6$ [4, § 6.3.3].

*Работа поддержана грантами РФФИ 06-01-00037 и 05-01-00313.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 5, с. 127—159.

Над конечным полем $\mathbb{F}_q$ число орбит заданной размерности является многочленом от q. В работах [10, 11] предложена гипотеза о связи этих многочленов с q-многочленами Эйлера—Бернулли, которая прошла компьютерную проверку для $n \leqslant 11$. Компьютерная программа для нахождения корисоединённых орбит над конечным полем была также составлена авторами работы [9] в рамках исследования вполне интегрируемых цепочек Тоды.

Каждая корисоединённая орбита в пространстве $\mathfrak{ut}^*(n, K)$ содержится в некоторой орбите лево-правого действия $\mathrm{UT}(n, K) \times \mathrm{UT}(n, K)$. В работах [6—8] проведена классификация орбит лево-правого действия и исследованы ассоциированные с этими орбитами представления.

В настоящей работе рассматривается случай $n \leqslant 7$ и субрегулярные орбиты в произвольной размерности. Работа состоит из трёх разделов. В первом разделе проводится классификация корисоединённых орбит унитреугольной группы для $n \leqslant 7$ над произвольным полем K характеристики нуль (теорема 1.9). Описание получено в терминах допустимых подмножеств, которые удобно представлять в виде диаграмм. В теореме 1.10 для $n \leqslant 7$ решена задача описания корисоединённых орбит в терминах канонических форм. Для каждой канонической формы построена поляризация. Это даёт возможность классифицировать неприводимые унитарные представления вещественной унитреугольной группы и абсолютно максимальные примитивные идеалы в соответствующей универсальной обёртывающей алгебре (теорема 1.12 и её следствия). Отметим, что предложенный диаграммный метод не работает для унитреугольной группы произвольного порядка. Авторами построены контрпримеры к теоремам 1.9 и 1.10 для $n = 9$. В конце первого раздела показывается бесконечность числа орбит борелевской подгруппы $\mathrm{T}(n, K)$ в $\mathfrak{ut}^*(n, K)$ для $n > 5$ (теорема 1.15).

Как обычно, мы отождествляем симметрическую алгебру $S(\mathfrak{g})$ с алгеброй $K[\mathfrak{g}^*]$ регулярных функций на $\mathfrak{g}^*$. Орбиты корисоединённого действия группы $\mathrm{UT}(n, K)$ замкнуты, поскольку орбиты любого регулярного действия нильпотентной группы на произвольном аффинном алгебраическом многообразии замкнуты [2, 11.2.4]. Идеал $\mathcal{I}(\Omega)$ в $S(\mathfrak{g})$, состоящий из функций, равных нулю на орбите Ω, является абсолютно максимальным пуассоновым идеалом (AMP-идеалом) относительно естественной скобки Пуассона в $S(\mathfrak{g})$. Отображение $\Omega \mapsto \mathcal{I}(\Omega)$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством корисоединённых орбит и множеством AMP-идеалов. В разделе 2 настоящей работы для произвольного AMP-идеала ($n \leqslant 7$) выписана система образующих (теорема 2.2). Это позволяет представить орбиту как множество решений системы полиномиальных уравнений. При этом обнаруживается, что в качестве системы образующих можно взять некоторую систему полиномов вида $P - c$, где P — коэффициент минора характеристической матрицы и $c \in K$. Авторы полагают, что это последнее утверждение (см. следствие 2.4) справедливо для всех корисоединённых орбит унитреугольной группы произвольного порядка.

Описание регулярных орбит было получена в терминах миноров матрицы Φ ([3] и теорема 3.1). В разделе 3 (теорема 3.3) проводится классификация субрегулярных орбит (т. е. орбит размерности $\dim\Omega_{\mathrm{reg}}-2$) в терминах коэффициентов миноров характеристической матрицы.

1. Допустимые диаграммы и канонические формы орбит

Пусть K — поле характеристики нуль. Унитреугольной группой (обозначение $\mathrm{UT}(n,K)$) порядка n над полем K называют группу матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ a_{21} & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1\end{pmatrix},$$

где $a_{ij}\in K$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}:=\mathfrak{ut}(n,K)$ группы $G:=\mathrm{UT}(n,K)$ состоит из нижнетреугольных матриц с нулями по диагонали.

Как обычно, $\Delta^+:=\Delta_n^+$ — система положительных корней в $\mathfrak{gl}(n,K)$. Каждый положительный корень имеет вид $\alpha_{ji}(h)=x_j-x_i$, где $j<i$ и $h=\mathrm{diag}(x_1,\dots,x_n)$.

Для пары $i>j$ обозначим через y_{ij} матрицу из $\mathfrak{g}$, в которой на (i,j)-м месте стоит 1, а все остальные элементы матрицы равны нулю. Матрица y_{ij} — собственный вектор для ad_h с собственным значением $-\alpha_{ji}$. Будем говорить, что пара (i,j) соответствует положительному корню α_{ji}. Для положительного корня $\xi=\alpha_{ji}$ матрицу y_{ij} будем также обозначать через y_ξ.

Матрицы $\{y_{ij},\ i>j\}$ образуют базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Обозначим через Φ формальную матрицу

$$\Phi=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0\\ y_{21} & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & 0\end{pmatrix}.$$

В дальнейшем отношение $\alpha>\beta$ на Δ^+ означает отношение лексикографического порядка. Если корням α и β соответствуют пары (i,j) и (s,t), то $\alpha>\beta$ означает, что $j<t$ или $j=t$, $i>s$, т. е. $\alpha>\beta$, если место (i,j) находится в $(n\times n)$-матрице левее или в том же столбце ниже места (s,t).

На алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n,K)$ определена форма Киллинга $(x,y)=\mathrm{Tr}\,xy$. Форма Киллинга невырожденна над полем характеристики нуль. Это позволяет отождествить $\mathfrak{g}^*$ с подпространством верхнетреугольных матриц с нулями по главной диагонали. Отождествим также симметрическую алгебру $S(\mathfrak{g})$ с алгеброй $K[\mathfrak{g}^*]$ многочленов на $\mathfrak{g}^*$. На алгебре $S(\mathfrak{g})$ определена естественная скобка Пуассона, для которой $\{x,y\}=[x,y]$ для любых $x,y\in\mathfrak{g}$.

Определение 1.1.

1. Идеал I в $S(\mathfrak{g})$ называют пуассоновым идеалом, если $\{I,S(\mathfrak{g})\}\subset I$.

2. Будем говорить, что I — абсолютно максимальный пуассонов идеал (АМР-идеал), если для любого расширения основного поля K'/K идеал $I \otimes_K K'$ — максимальный пуассоновый идеал в $S(\mathfrak{g} \otimes_K K')$.

Легко видеть, что идеал I пуассонов тогда и только только, когда он G-инвариантен. Отображение $I \mapsto \operatorname{Ann} I$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством АМР-идеалов в $S(\mathfrak{g})$ и множеством коприсоединённых орбит в $\mathfrak{g}^*$.

Определение 1.2.

1. Подмножество $A \subset \Delta^+$ назовём аддитивным, если из того, что $\alpha, \beta \in A$ и $\alpha + \beta \in \Delta^+$, вытекает, что $\alpha + \beta \in A$.
2. Подмножество M в A назовём нормальным подмножеством в A, если из того, что $\alpha \in A$, $\beta \in M$ и $\alpha + \beta \in \Delta^+$, вытекает, что $\alpha + \beta \in M$.

Если A — аддитивная подмножество и M — нормальное подмножество в A, то $\mathfrak{g}_A := \operatorname{span}\{y_\gamma \colon \gamma \in A\}$ — подалгебра и $\mathfrak{m} := \operatorname{span}\{y_\gamma \colon \gamma \in M\}$ — идеал в $\mathfrak{g}_A$.

Для произвольного ξ в аддитивном подмножестве $A \subset \Delta^+$ рассмотрим

$$C(\xi, A) = \{\gamma \in A \colon \xi - \gamma \in A\}.$$

Подмножество $C(\xi, A)$ распадается: $C(\xi, A) = C_+(\xi, A) \sqcup C_-(\xi, A)$, где $C_+(\xi, A)$ ($C_-(\xi, A)$) состоит из тех $\gamma \in C(\xi, A)$, для которых $\gamma > \xi - \gamma$ (соответственно $\gamma < \xi - \gamma$).

Обозначим через $A(\xi)$ подмножество $A \setminus C(\xi, A)$. Легко видеть, что $A(\xi)$ также аддитивное подмножество.

Определение 1.3. Назовём подмножество $S = \{\xi_1 > \ldots > \xi_k\} \subset \Delta^+$ допустимым, если его элементы выбираются в Δ^+ по следующему правилу. Первый элемент ξ_1 — произвольный элемент в $A_1 := \Delta^+$. Обозначим $A_2 := A_1(\xi_1)$. Второй элемент ξ_2 — произвольный элемент в A_2. Следующий элемент ξ_3 — произвольный элемент в $A_3 := A_2(\xi_2)$ и так далее.

Обозначим $A := A(S) := A_{k+1}$ и $M := M(S) := A \setminus S$. Заметим, что M — нормальное подмножество в A.

Представим допустимое подмножество S в виде объединения двух его подмножеств $S_\otimes \sqcup S_\square$. По определению $\xi_i \in S_\otimes$, если $A_i \neq A_{i+1}$ (т. е. $C(\xi_i, A_i) \neq \varnothing$), и $\xi_i \in S_\square$, если $A_i = A_{i+1}$ (т. е. $C(\xi_i, A_i) = \varnothing$).

Допустимому подмножеству $S = \{\xi_1 > \ldots > \xi_k\}$ поставим в соответствие диаграмму $D(S)$, которую назовём допустимой диаграммой. Диаграмма $D(S)$ представляет собой $(n \times n)$-матрицу, в которой места (i, j), $i \leqslant j$, не заполняются, а на местах $i > j$ стоит один из символов $\otimes$, $\square$, $\bullet$, $\pm$. Размещение символов производится по определённому правилу по мере построения допустимого подмножества S. В дальнейшем пустые клетки (i, j), $i \leqslant j$, в диаграмме могут опускаться. Построение диаграммы $D(S)$ начинаем с незаполненной $(n \times n)$-матрицы D. Пусть первому корню ξ_1 в S соответствует клетка (i_1, j_1), $i_1 > j_1$, в D. Если $i_1 - j_1 > 1$ ($i_1 - j_1 = 1$), то поместим в эту клетку знак $\otimes$ (соответственно знак $\square$). В местах (a, b), $b < j_1$, и (a, j_1), $a > i_1$, поставим символ $\bullet$. В клетки

(a, j_1), $1 < a < i_1$, лежащие в j_1-м столбце, поместим символ $+$, а в клетки (i_1, a), $j_1 < a < i_1$, из i_1-й строки — символ $-$.

В диаграмме, построенной на первом шаге, следующему положительному корню ξ_2 соответствует некоторая пустая клетка, скажем (i_2, j_2), $i_2 > j_2$. В пустые клетки (a, b), $b < j_2$, и (a, j_2), $a > i_2$, поставим знак $\bullet$. Если в нижнетреугольной части (места с $i > j$) встречаются пустые пары клеток (i_2, a) и (a, j_2), где $j_2 < a < i_2$, то поместим в клетку (i_2, j_2) символ $\otimes$, во все клетки (i_2, a) символ $-$, во все клетки (a, j_2) символ $+$. Если указанные пары клеток отсутствуют, то заполним (i_2, j_2) символом $\square$. Отметим, что если одна из клеток (i_2, a) и (a, j_2) уже заполнена, то другая остаётся незаполненной. Продолжим процесс заполнения клеток дальше, рассматривая поочередно $\xi_3, \ldots, \xi_k$. Если после окончания процедуры клетка в нижнетреугольной части осталось незаполненной, то поместим в неё знак $\bullet$. В результате формируется допустимая диаграмма $D(S)$.

Заметим, что в диаграмме $D(S)$ клетки корней из $M(S)$, $S_\otimes$, $S_\square$ отмечены соответственно символами $\bullet$, $\otimes$, $\square$. Напомним, что $A(S) = M(S) \sqcup S_\otimes \sqcup S_\square$.

Пример. Допустимому подмножеству $S = \{\alpha_{13}, \alpha_{25}, \alpha_{35}, \alpha_{34}\}$ в системе положительных корней для $n = 5$ соответствует диаграмма

$+$				
$\otimes$	$-$			
$\bullet$	$+$	$\square$		
$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$-$	

.

Построение диаграммы производится в четыре шага:

$+$				
$\otimes$	$-$			
$\bullet$				
$\bullet$				

$\Longrightarrow$

$+$				
$\otimes$	$-$			
$\bullet$	$+$			
$\bullet$	$\otimes$		$-$	

$\Longrightarrow$

$+$				
$\otimes$	$-$			
$\bullet$	$+$			
$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$-$	

$\Longrightarrow$

$+$				
$\otimes$	$-$			
$\bullet$	$+$	$\square$		
$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$-$	

.

В этом примере $M(S) = \{\alpha_{15}, \alpha_{14}\}$ и $A(S) = \{\alpha_{15}, \alpha_{14}\} \sqcup S$. Заметим, что подмножества $\{\alpha_{13}, \alpha_{25}, \alpha_{35}\}$, $\{\alpha_{13}, \alpha_{25}, \alpha_{34}\}$, $\{\alpha_{13}, \alpha_{25}\}$ также допустимы. Им соответствуют диаграммы

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline
 & & & & \\\hline
+ & & & & \\\hline
\otimes & - & & & \\\hline
\bullet & + & \bullet & & \\\hline
\bullet & \otimes & \square & - & \\\hline
\end{array}\,,
\quad
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline
 & & & & \\\hline
+ & & & & \\\hline
\otimes & - & & & \\\hline
\bullet & + & \square & & \\\hline
\bullet & \otimes & \bullet & - & \\\hline
\end{array}\,,
\quad
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline
 & & & & \\\hline
+ & & & & \\\hline
\otimes & - & & & \\\hline
\bullet & + & \bullet & & \\\hline
\bullet & \otimes & \bullet & - & \\\hline
\end{array}\,.
$$

Эти допустимые подмножества имеют общую $S_\otimes$-часть и различные $S_\square$-части.

Легко видеть, что если подмножества

$$S = S_\otimes \sqcup S_\square, \quad S' = S_\otimes \sqcup S'_\square$$

допустимы, то подмножество

$$S_\otimes \sqcup (S_\square \cup S'_\square)$$

также допустимо.

Определение 1.4. Назовём допустимое подмножество S максимальным, если его часть $S_\square$ максимальна.

Построение максимальных допустимых подмножеств для унитреугольной алгебры Ли данного порядка n можно проводить по цепочке. Первым максимальным допустимым подмножеством будет подмножество S_{reg} (назовём его регулярным), в котором ξ_1 — наибольший корень в $A_1 := \Delta^+$, следующий корень ξ_2 — наибольший корень в $A_2 := A_1(\xi_1)$, и так далее (см. ниже диаграммы $(n, 0, 1)$ для $n = 3, 4, 5, 6, 7$). Предположим, что уже построено максимальное допустимое подмножество $S = \{\xi_1 > \ldots > \xi_p > \ldots > \xi_k\}$, где ξ_p — наименьший корень в $S_\otimes$. В следующем максимальном допустимом подмножестве $S' = \{\xi'_1 > \ldots > \xi'_p > \ldots > \xi'_m\}$ корни ξ'_i совпадают с ξ_i для $1 \leqslant i \leqslant p-1$, корень ξ'_p есть наибольший корень в $\{\eta \in A_p \colon \xi_p > \eta\}$ и каждый последующий корень ξ'_i, $i > p$, есть наибольший корень в соответствующем подмножестве A_i.

Указанная выше процедура позволяет перебрать все максимальные допустимые диаграммы. Ниже мы приводим полный список всех максимальных допустимых диаграмм для $n = 3, 4, 5$. Диаграммы для $n = 6, 7$ приведены в конце работы (в этих диаграммах мы опускаем пустые клетки). Номер диаграммы состоит из набора (n, k, m), где n — размер матрицы, k — число символов $\bullet$ в первом столбце и m — порядковый номер диаграммы в серии (n, k). Каждая серия (n, k) заканчивается символической диаграммой $(n, k, \star)$, которая отвечает за серию диаграмм. В ней вместо $((n-1) \times (n-1))$-блока, который получается из $(n, k, \star)$ удалением первой строки и первого столбца, можно подставить любую диаграмму размера $(n-1) \times (n-1)$.

$+$		
$\otimes$	$-$	

(3, 0, 1)

$\square$		
$\bullet$	$\square$	

(3, 1, 1)

$+$			
$+$	$\square$		
$\otimes$	$-$	$-$	

(4, 0, 1)

$+$			
$\otimes$	$-$		
$\bullet$	$\square$	$\square$	

(4, 1, 1)

$\square$			
$\bullet$	$*$		
$\bullet$	$*$	$*$	

(4, 2, $\star$)

$+$				
$+$	$+$			
$+$	$\otimes$	$-$		
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	

(5, 0, 1)

$+$				
$+$	$\square$			
$+$	$\bullet$	$\square$		
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	

(5, 0, 2)

$+$				
$+$	$+$			
$\otimes$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\otimes$	$-$	$\square$	

(5, 1, 1)

$+$				
$+$	$\square$			
$\otimes$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\square$	

(5, 1, 2)

$+$				
$\otimes$	$-$			
$\bullet$	$+$	$\square$		
$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$-$	

(5, 2, 1)

$+$				
$\otimes$	$-$			
$\bullet$	$\square$	$+$		
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	

(5, 2, 2)

$+$				
$\otimes$	$-$			
$\bullet$	$\square$	$\square$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	

(5, 2, 3)

$\square$				
$\bullet$	$*$			
$\bullet$	$*$	$*$		
$\bullet$	$*$	$*$	$*$	

(5, 3, $\star$)

Определение 1.5. Рассмотрим множество $\mathcal{S}_n$, состоящее из пар (S, c), где S — максимальное допустимое подмножество в $\Delta^+ := \Delta_n^+$ и c — отображение $S \to K$, удовлетворяющее условию $c(\xi) \neq 0$ для $\xi \in S_\otimes$. Назовём (S, c) максимальной допустимой парой и $\mathcal{S}_n$ множеством максимальных допустимых пар.

Продолжим c до отображения $c\colon A(S) \to K$, полагая $c(\gamma) = 0$ для $\gamma \in M(S)$.

Определение 1.6. Канонической линейной формой, соответствующей максимальной допустимой паре (S, c), назовём линейную форму $f_{S,c} \in \mathfrak{g}^*$, для которой

$$f_{S,c}(y_\gamma) = \begin{cases} c(\gamma), & \text{если } \gamma \in A(S), \\ 0, & \text{если } \gamma \in \Delta^+ \setminus A(S). \end{cases}$$

Заметим, что ограничение $f_{S,c}$ на $\mathfrak{g}_{A(S)}$ является характером $\mathfrak{g}_{A(S)}$.

Унитреугольные алгебры Ли образуют цепочку

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{ut}(n, K) \supset \mathfrak{ut}(n-1, K) \supset \ldots \supset \mathfrak{ut}(2, K),$$

в которой $\mathfrak{ut}(t, K)$ состоит из матриц в $\mathfrak{ut}(n, K)$ с нулевыми первыми $n - t$ столбцами. Системы положительных корней алгебр Ли $\{\mathfrak{gl}(t, K)\}_{2 \leqslant t \leqslant n}$ также образуют вложенную цепочку

$$\Delta_n^+ \supset \Delta_{n-1}^+ \supset \ldots \supset \Delta_2^+.$$

Положим

$$\Delta^{(n)} = \varnothing.$$

Обозначим

$$\Delta^{(t)} = \Delta_{n-t+1}^+ \setminus \Delta_{n-t}^+.$$

Легко видеть, что $\gamma \in \Delta^{(t)}$, если y_γ лежит в t-м столбце матрицы Φ. Система положительных корней разлагается:

$$\Delta^+ = \Delta^{(1)} \sqcup \Delta^{(2)} \sqcup \ldots \sqcup \Delta^{(n-1)}.$$

Введём также следующие обозначения:

$$A^{(t)} := \Delta^{(t)} \cap A, \quad M^{(t)} := \Delta^{(t)} \cap M,$$
$$S^{(t)} := \Delta^{(t)} \cap S, \quad S_\otimes^{(t)} := \Delta^{(t)} \cap S_\otimes, \quad S_\square^{(t)} := \Delta^{(t)} \cap S_\square.$$

Положим $m(1) = 1$. Обозначим

$$m(t) = \max\{j \mid \xi_j \in S^{(1)} \sqcup \ldots \sqcup S^{(t-1)}\} + 1,$$
$$B_t = \Delta_{n-t+1}^+ \cap A_{m(t)}.$$

Заметим, что $A^{(t)} = B_t \cap \Delta^{(t)}$. Подмножества $\{B_t\}$ аддитивны и образуют вложенную систему подмножеств

$$\Delta^+ = B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_{n-1} \supset B_n = \varnothing.$$

Каждому допустимому подмножеству S в Δ^+ поставим в соответствие цепочку диаграмм $\{D_t(S)\}_{1 \leqslant t \leqslant n}$, построенных следующим образом. Диаграмма $D_1(S)$ размера $n \times n$ совпадает с $D(S)$. Диаграмма $D_t(S)$ размера $(n-t+1) \times (n-t+1)$ получается из $D_1(S)$, если

1) удалить первые $t-1$ строк и $t-1$ столбцов;
2) опустить символы (точнее, символ $\{-\}$), отвечающие весам, не входящим в B_t.

Пример. $D(S)=(5,2,1)$. Имеем

$$D_1=\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline & & & & \\ \hline + & & & & \\ \hline \otimes & - & & & \\ \hline \bullet & + & \square & & \\ \hline \bullet & \otimes & \square & - & \\ \hline \end{array}\,, \quad D_2=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline + & \square & & \\ \hline \otimes & \square & - & \\ \hline \end{array}\,,$$

$$D_3=\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}\,, \quad D_4=\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}\,.$$

Подмножества B_1, B_2, B_3, B_4 состоят из корней, отвечающим непустым клеткам диаграмм D_1, D_2, D_3, D_4.

Пусть $\mathfrak{g}_t$ — подалгебра $\mathfrak{ut}(n-t+1, K)$, натянутая на $\{y_\gamma\colon \gamma\in B_t\}$. Эти подалгебры образуют цепочку:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\supset\ldots\supset\mathfrak{g}_t\supset\mathfrak{g}_{t+1}\supset\ldots\supset\mathfrak{g}_n=\{0\}.$$

Обозначим через I_t идеал в $S(\mathfrak{g}_t)$, порождённый элементами $y_\gamma-c(\gamma)$, $\gamma\in A^{(t)}$. Легко видеть, что I_t — пуассонов идеал в $S(\mathfrak{g}_t)$.

Через $\mathcal{A}_m$ обозначим пуассонову алгебру $K[p_1,\ldots,p_m;q_1,\ldots,q_m]$, в которой $\{p_i,q_i\}=1$ и $\{p_i,q_j\}=0$ для $i\neq j$. Положим $\mathcal{A}_0=K$.

Говорят, что пуассонова алгебра $\mathcal{C}$ является тензорным произведением двух пуассоновых алгебр $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$, если $\mathcal{C}=\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$ и $\{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\}=0$.

Лемма 1.7. *Пусть $n\leqslant 7$. Для любого t существует пуассоново вложение*

$$\theta_t\colon S(\mathfrak{g}_{t+1})\to S(\mathfrak{g}_t)/I_t, \tag{1.1}$$

такое что пуассонова алгебра $S(\mathfrak{g}_t)/I_t$ разлагается в тензорное произведение двух пуассоновых подалгебр:

$$S(\mathfrak{g}_t)/I_t=\mathcal{A}\otimes\theta_t S(\mathfrak{g}_{t+1}), \tag{1.2}$$

где пуассонова алгебра $\mathcal{A}$ изоморфна $\mathcal{A}_{k_t}$ для некоторого k_t.

Доказательство. Просматривая наш список всех максимальных допустимых диаграмм для $n\leqslant 7$, видим, что в произвольном t-м столбце символы могут быть расположены одним из следующих способов:

1) есть ровно один символ $\otimes$ и символы $\square$ или отсутствуют, или располагаются ниже символа $\otimes$;

2) есть ровно один символ $\otimes$ и один из символов $\square$ выше $\otimes$;

3) нет символа $\otimes$.

Случай 1. В t-м столбце есть ровно один символ $\otimes$ и символы $\square$ или отсутствуют, или располагаются ниже символа $\otimes$. Тогда $S_{\otimes}^{(t)}$ состоит из одного корня, который обозначим через ξ.

Рассмотрим подмножества

$$C_+ := C_+(\xi, B_t) = \{\gamma_1 > \ldots > \gamma_k\}, \quad C_- := C_-(\xi, B_t) = \{\gamma_1' < \ldots < \gamma_k'\},$$

где $\xi = \gamma_i + \gamma_i'$ для любого $1 \leqslant i \leqslant m$. Подмножество $A^{(t)}$ представляется как объединение:

$$A^{(t)} = \{\xi\} \sqcup M^{(t)} \sqcup S_{\square}^{(t)} \sqcup C_+.$$

Подмножество B_{t+1} имеет вид $B_{t+1} = B_t \setminus (A^{(t)} \sqcup C_-)$.

Рассмотрим наибольший элемент $\gamma_1 \in C_+$ и наименьший элемент γ_1' в C_-. Напомним, что $\gamma_1 + \gamma_1' = \xi$.

Обозначим $B_t' := B_t \setminus \{\gamma_1'\}$. Подмножество B_t' является аддитивным. Действительно, если $\gamma_1' = \eta + \eta'$, где $\eta, \eta' \in A$ и $\eta > \eta'$, то $\gamma_1 + \eta \in C_+$. Это противоречит тому, что γ_1 — наибольший элемент C_+.

Обозначим через $\mathfrak{g}_t'$ подалгебру, натянутую на y_η, $\eta \in B_t'$. Элементы $p = y_{\gamma_1'}$, $q = y_{\gamma_1} y_\xi^{-1}$ удовлетворяют соотношению $\{p, q\} = 1$ и порождают подалгебру, изоморфную $\mathcal{A}_1$.

Покажем, что $\{q, a\} \equiv 0 \bmod I_t$ для любого $a \in S(\mathfrak{g}_t')$. Действительно, для любого $\eta \in B_t'$ корень $\gamma_1 + \eta$ принадлежит $A^{(t)}$. Случай $\gamma_1 + \eta = \xi$ отпадает, поскольку $\eta \neq \gamma_1'$. Так как γ_1 — наибольший элемент в C_+, то $\gamma_1 + \eta \notin C_+$. Случай $\gamma_1 + \eta \in S_\square$ также невозможен, поскольку корень ξ_i из $S_\square$ не может быть суммой двух корней из соответствующего A_i. Остаётся случай $\gamma_1 + \eta \in M^{(t)}$. Тогда $[y_{\gamma_1}, y_\eta] = 0 \bmod I_t$ для любого $\eta \in B_t'$. Заключаем, что $\{q, a\} = 0 \bmod I_t$ для любого $a \in S(\mathfrak{g}_t')$.

Введём обозначение

$$\tilde{a} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \mathrm{ad}_p^s(a) q^s = a - \mathrm{ad}_p(a) q + \frac{1}{2} \mathrm{ad}_p^2(a) q^2 - \ldots, \tag{1.3}$$

где $a \in S(\mathfrak{g}_t')$ и $\mathrm{ad}_p(a) = \{p, a\}$.

Непосредственными вычислениями показывается, что

$$\{p, \tilde{a}\} = \{q, \tilde{a}\} = 0 \bmod I_t, \quad \{\tilde{a}, \tilde{b}\} = \widetilde{\{a, b\}} \bmod I_t$$

(см. [2, 4.7.5]). Соответствие $a \mapsto \tilde{a}$ продолжается до гомоморфизма пуассоновых алгебр

$$\theta' \colon S(\mathfrak{g}_t') \to S(\mathfrak{g}_t)/I_t.$$

Обозначим через I_t' идеал $S(\mathfrak{g}_t)$, порождённый I_t и y_{γ_1}. Идеал I_t' совпадает с ядром θ'. Продолжим θ' до вложения

$$\theta' \colon S(\mathfrak{g}_t')/I_t' \to S(\mathfrak{g}_t)/I_t.$$

Пуассонова алгебра $S(\mathfrak{g}_t)/I_t$ разлагается в тензорное произведение $\mathcal{A}_1 \otimes \mathrm{Im}\,\theta'$.

Для любого $1 < m \leqslant k$ рассмотрим аддитивное подмножество $B_t^{(m)} = B_t \setminus \{\gamma'_1, \ldots \gamma'_m\}$. Обозначим через $\mathfrak{g}_t^{(m)}$ подалгебру, натянутую на элементы y_η, $\eta \in B_t^{(m)}$. Обозначим через $I_t^{(m)}$ идеал, порождённый $I_t^{(m-1)}$ и y_{γ_m}. Аналогично случаю $m = 1$ строится вложение

$$\theta^{(m)}\colon S(\mathfrak{g}_t^{(m)})/I_t^{(m)} \to S(\mathfrak{g}_t)/I_t.$$

Пуассонова алгебра $S(\mathfrak{g}_t)/I_t$ разлагается в тензорное произведение $\mathcal{A}_m \otimes \mathrm{Im}\,\theta^{(m)}$. Для $m = k$ получаем

$$S(\mathfrak{g}_t^{(k)})/I_t^{(k)} = S(\mathfrak{g}_{t+1}), \quad S(\mathfrak{g}_t)/I_t = \mathcal{A}_k \otimes \mathrm{Im}\,\theta^{(k)}.$$

Случай 2. В t-м столбце есть ровно один символ $\otimes$ и один из символов $\square$ расположен выше $\otimes$. Этот случай имеет место только для двух диаграмм $D_t(S)$:

$\square$			
$+$			
$\otimes$		$-$	

$D_4(7,3,4)$

$+$			
$\square$	$\square$		
$\otimes$	$-$		

$D_4(7,3,8)$

Ниже в пунктах 1 и 2 нужное разложение проверяется непосредственно. Здесь $\mathfrak{g}$ — подалгебра Ли, натянутая на те элементы y_η, которым отвечают непустые клетки приведённых выше диаграмм.

1. $D_4(7,3,4)$. Идеал I порождается элементами $y_{41} - c_1, y_{21} - c_2$, где $c_1 \neq 0$. Фактор-алгебра $S(\mathfrak{g})/I$ совпадает с алгеброй $\mathcal{A}_1$, порождённой $p = y_{43}y_{41}^{-1}$ и $q = y_{31}$.

2. $D_4(7,3,8)$. Идеал I порождается элементами $y_{41} - c_1$, $y_{31} - c_2$, где $c_1 \neq 0$. Фактор-алгебра $S(\mathfrak{g})/I$ равна $\mathcal{A}_1 \otimes K[\tilde{y}_{32}]$, где $\tilde{y}_{32} = y_{32} - c_1^{-1}y_{42}y_{31}$ и $\mathcal{A}_1$ порождается $p = y_{42}y_{41}^{-1}$ и $q = y_{21}$.

Случай 3. В t-м столбце нет символов $\otimes$. Тогда $A^{(t)} = M^{(t)} \sqcup S_\square^{(t)}$. Естественное вложение $\mathfrak{g}_{t+1} \to \mathfrak{g}_t$ продолжается до изоморфизма $S(\mathfrak{g}_{t+1}) \to S(\mathfrak{g}_t)/I_t$. $\square$

Пусть объекты $\mathfrak{g}_t$, I_t, p_i, q_i такие, как в лемме 1.7. Обозначим

$$X_t := \mathrm{Ann}\, I_t \subset \mathfrak{g}_t^*,$$
$$X_{t,0} := \{f \in X_t \colon p_i(f) = q_i(f) = 0 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k_t\}.$$

Пусть θ_{t*} — отображение $X_t \to \mathfrak{g}_{t+1}^*$, индуцированное вложением θ_t из (1.1). Так как I_t — пуассонов идеал, то X_t — пуассоново подмногообразие и θ_{t*} — пуассоново отображение.

Следствие 1.8.

1. *Отображение $\omega \mapsto \theta_{t*}^{-1}(\omega)$ устанавливает взаимно-однозначное отображение между симплектическими листами в $\mathfrak{g}_{t+1}^*$ и симплектическими листами в X_t.*

2. *Ограничение* $\rho_t := \theta_{t*}|_{X_{t,0}}$ *взаимно-однозначно отображает* $X_{t,0}$ *на* $\mathfrak{g}^*_{t+1}$ *и совпадает с ограничением на* $X_{t,0}$ *естественной проекции* $\mathfrak{g}_t \to \mathfrak{g}_{t+1}$.

Доказательство. Каждый пуассонов идеал в тензорном произведении $\mathcal{A}_k \otimes \mathcal{B}$ имеет вид $\mathcal{A}_k \otimes \mathcal{J}$, где $\mathcal{J}$ — пуассонов идеал в $\mathcal{B}$. Утверждение пункта 1 вытекает из равенства (1.2).

Для доказательства утверждения 2 достаточно проверить, что для любых $a \in S(\mathfrak{g}_{t+1})$ и $f \in X_{t,0}$ имеет место равенство $\tilde{a}(f) = a(f)$. Из соотношений (1.3) получаем

$$\tilde{a}(f) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \mathrm{ad}_p^s(a)(f) q^s(f) = a(f). \qquad \square$$

Пусть (S, c) — максимальная допустимая пара. Поставим ей в соответствие AMP-идеал $\mathcal{I}_{S,c}$ в $S(\mathfrak{g})$. Построение проводится по индукции по номеру столбца $1 \leqslant t \leqslant n-1$. Построим цепочку идеалов

$$\mathcal{I}^{(1)} \subset \mathcal{I}^{(2)} \subset \ldots \subset \mathcal{I}^{(n-1)} =: \mathcal{I}_{S,c}.$$

По определению идеал $\mathcal{I}^{(1)}$ равен I_1. Согласно лемме 1.7

$$S(\mathfrak{g})/I_1 \cong \mathcal{A}_{k_1} \otimes \theta_1\big(S(\mathfrak{g}_2)\big).$$

Предположим, что уже построен идеал $\mathcal{I}^{(t)}$, такой что

$$S(\mathfrak{g})/\mathcal{I}^{(t)} = \mathcal{A}_k \otimes \theta\big(S(\mathfrak{g}_{t+1})\big),$$

где $k = k_1 + \ldots + k_t$ и $\theta = \theta_1 \ldots \theta_t$. Построим идеал $\mathcal{I}^{(t+1)}$, который содержит $\mathcal{I}^{(t)}$ и порождается $\theta(I_{t+1})$ по модулю $\mathcal{I}^{(t)}$. Тогда

$$\begin{aligned} S(\mathfrak{g})/\mathcal{I}^{(t+1)} &= \mathcal{A}_k \otimes \theta\big(S(\mathfrak{g}_{t+1})/\mathcal{I}^{(t+1)}\big) = \\ &= \mathcal{A}_k \otimes \theta\Big(\mathcal{A}_{k_{t+1}} \otimes \theta_{t+1}\big(S(\mathfrak{g}_{t+1})\big)\Big) = \mathcal{A}_{k+k_{t+1}} \otimes \theta\theta_{t+1}\big(S(\mathfrak{g}_{t+2})\big). \end{aligned}$$

При $t = n-1$ получаем идеал $\mathcal{I}^{(n-1)}$, который обозначаем $\mathcal{I}_{S,c}$. Поскольку $\mathfrak{g}_n = 0$, имеем

$$S(\mathfrak{g})/\mathcal{I}_{S,c} = \mathcal{A}_{k_1+\ldots+k_{n-1}}. \tag{1.4}$$

Обозначим $\Omega_{S,c} = \mathrm{Ann}\,\mathcal{I}_{S,c}$. Заметим, что из равенства (1.4) вытекает, что $\mathcal{I}_{S,c}$ — AMP-идеал и, следовательно, $\mathcal{I}_{S,c}$ совпадает с определяющим идеалом $\mathcal{I}(\Omega_{S,c})$ орбиты, который состоит из всех элементов $S(\mathfrak{g})$, равных нулю на орбите $\Omega_{S,c}$.

Теорема 1.9. *Пусть* $n \leqslant 7$ *и* $\mathfrak{g} = \mathfrak{ut}(n, K)$.

1. *Отображение* $(S, c) \mapsto \mathcal{I}_{S,c}$ *устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством максимальных допустимых пар* $\mathcal{S}_n$ *и множеством AMP-идеалов в* $S(\mathfrak{g})$.
2. *Отображение* $(S, c) \mapsto \Omega_{S,c}$ *устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством максимальных допустимых пар* $\mathcal{S}_n$ *и множеством коприсоединённых орбит группы* $\mathrm{UT}(n, K)$.
3. *Размерность* $\dim(\Omega_f)$ *равна числу символов* $\pm$ *в диаграмме* $D(S)$.

Доказательство. Утверждение п. 3 является следствием соотношение (1.4). Утверждение 2 вытекает из утверждения 1. Докажем утверждение п. 1.

Пусть $\mathcal{I}$ — некоторый AMP-идеал в $S(\mathfrak{g})$. Если идеал $\mathcal{I}$ содержит все элементы $y_{n1},\ldots,y_{21}$ первого столбца матрицы Φ, то обозначим через $\mathcal{I}^{(1)}$ идеал $\langle y_{n1},\ldots,y_{21}\rangle$ и перейдём к рассмотрению второго столбца.

Пусть идеал $\mathcal{I}$ содержит $y_{n1},\ldots,y_{i+1,1}$ и не содержит y_{i1}. Идеал $\mathcal{I}_0^{(1)}$, порождённый $y_{n1},\ldots,y_{i+1,1}$ — простой пуассонов идеал в $S(\mathfrak{g})$. Элемент y_{i1} является элементом Казимира по модулю $\mathcal{I}_0^{(1)}$. Поэтому идеал $\mathcal{I}$ содержит некоторый элемент вида $y_{i1}-c$, $c\in K$. Тогда $\mathcal{I}$ содержит идеал $\mathcal{I}^{(1)}$, порождённый $\mathcal{I}_0^{(1)}$ и $y_{i1}-c$. Обозначим через ξ_1 положительный корень, соответствующий месту $(i,1)$.

Согласно лемме 1.7 $S(\mathfrak{g})/\mathcal{I}^{(1)} = \mathcal{A}_k\otimes\theta_1 S(\mathfrak{g}_2)$. Рассмотрим элементы $\theta(y_{n2}),\ldots,\theta_1(y_{32})$, соответствующие базисным векторам из второго столбца матрицы Φ. Рассуждая аналогично случаю первого столбца, мы по идеалу $\mathcal{I}$ восстанавливаем $S=\{\xi_1,\ldots\}$ и $c\colon S\to K$. $\square$

Теорема 1.10. *Пусть $n\leqslant 7$, (S,c) — максимальная допустимая пара. Каноническая линейная форма $f_{S,c}$ принадлежит орбите $\Omega_{S,c}$.*

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{g}_t\}$ — цепочка вложенных подалгебр, определённых выше по S. Утверждение 1 следствия 1.8 позволяет по цепочке определить набор коприсоединённых орбит (т. е. симплексических листов) $\Omega_t\in\mathfrak{g}_t^*$ (каждая относительно своей группы $\mathrm{Exp}(\mathfrak{g}_t)$), таких что для любого t орбита Ω_t содержится в X_t и $\Omega_t=\theta_{t*}^{-1}(\Omega_{t+1})$.

Из утверждения 2 следствия 1.8 вытекает, что орбита $\Omega_{S,c}$ содержит элемент $\rho_1^{-1}\circ\ldots\circ\rho_{n-1}^{-1}(0)$, который совпадает с $f_{S,c}$. $\square$

Следствие 1.11. *Идеал $\mathcal{I}_{S,c}$ порождается элементами вида $Q_\eta-Q_\eta(f_{S,c})$, где $\eta\in A(S)$ и $Q_\eta(f_{S,c})=c(\eta)$. Элемент Q_η представляется в виде $y_\eta+R_{>\eta}$, где элемент $R_{>\eta}$ принадлежит подалгебре, порождённой множеством $\{y_\gamma,\ \gamma>\eta\}$, и $R_{>\eta}(f_{S,c})=0$.*

Доказательство. Идеал $\mathcal{I}^{(t)}$ порождается по модулю $\mathcal{I}^{(t-1)}$ элементами вида $\theta_{t-1}(y_\eta)-c(\eta)$, $\eta\in A^{(t)}$. Из соотношений (1.3) следует, что элемент $\theta_{t-1}(y_\eta)$ может быть представлен в $S(\mathfrak{g})$ элементом $Q_\eta=y_\eta+R_{>\eta}$, где $R_{>\eta}$ удовлетворяет приведённым выше условиям. Наконец,

$$Q_\eta(f_{S,c})=(y_\eta+R_{>\eta})(f_{S,c})=y_\eta(f_{S,c})=c(\eta). \qquad \square$$

Пусть $\mathcal{G}$ — произвольная алгебра Ли и $f\in\mathcal{G}^*$. Подалгебру $\mathfrak{p}$ называют поляризацией для f, если $\mathfrak{p}$ — максимальное изотропное подпространство относительно кососимметрической билинейной формы $f([x,y])$ на $\mathcal{G}$.

Теорема 1.12. *Пусть $n\leqslant 7$ и S — максимальное допустимое подмножество. Пусть $\mathfrak{p}_S$ — линейное подпространство, натянутое на базисные элементы $\{y_\eta\}$, для которых на месте корня η в диаграмме $D(S)$ стоит символ $+$, $\otimes$, $\square$ или $\bullet$ (т. е. любой символ, кроме символа $-$). Утверждается, что для всех S, кроме представленного диаграммой $(7,3,8)$, $\mathfrak{p}_S$ — поляризация для линейных форм вида $f_{S,c}$. Для построения $\mathfrak{p}_{(7,3,8)}$ следует заменить y_{54} на y_{75}.*

Доказательство. Непосредственно перебираются все диаграммы размера не больше 7. $\square$

Классификация announcementкоприсоединённых орбит и конструкция поляризаций даёт возможность классифицировать неприводимые унитарные представления [4] и примитивные идеалы в универсальной обёртывающей алгебре [2].

Следствие 1.13. *Любое неприводимое унитарное представление вещественной унитреугольной группы* $\mathrm{UT}(n,\mathbb{R})$ *для* $n \leqslant 7$ *индуцировано с некоторого одномерного представления* $e^{if\ln}$, *где* $f = f_{S,c}$, *подгруппы* $P_S = \exp(\mathfrak{p}_S)$. *Максимальная допустимая пара* (S,c) *восстанавливается по представлению однозначно.* $\square$

Следствие 1.14. *Любой абсолютно примитивный идеал в* $U\big(\mathfrak{ut}(n,K)\big)$ *для* $n \leqslant 7$ *индуцирован с идеала* $U(\mathfrak{p}_S)\operatorname{Ker} f|_{\mathfrak{p}_S}$, *где* $f = f_{S,c}$. *Максимальная допустимая пара* (S,c) *восстанавливается по идеалу однозначно.* $\square$

Пусть $\mathrm{T}(n,K)$ — борелевская подгруппа в $\mathrm{GL}(n,K)$. Присоединённое представление группы $\mathrm{T}(n,K)$ сохраняет алгебру Ли унитреугольных матриц $\mathfrak{g} := \mathfrak{ut}(n,K)$. Это определяет действие группы $\mathrm{T}(n,K)$ в $\mathfrak{g}^*$.

Теорема 1.15. *Число* $\mathrm{T}(n,K)$*-орбит в* $\mathfrak{g}^*$ *конечно для* $n \leqslant 5$ *и бесконечно для* $n > 5$.

Доказательство. Группа $\mathrm{T}(n,K)$ всякую орбиту $\Omega_{S,c}$ переводит в некоторую орбиту $\Omega_{S,c'}$, соответствующую тому же максимальному допустимому подмножеству S и новому допустимому отображению c'.

Легко видеть, что для $n \leqslant 5$ всякое семейство Ω_S коприсоединённых орбит $\{\Omega_{S,c}\}$ (с фиксированным S и произвольным допустимым отображением $c\colon S \to K$) является $\mathrm{T}(n,K)$-орбитой. Для $n \leqslant 5$ число $\mathrm{T}(n,K)$-орбит в $\mathfrak{g}^*$ конечно.

Рассмотрим диаграмму $(6,3,4)$ для $n = 6$:

$+$					
$\otimes$	$-$				
$\bullet$	$+$	$\square$			
$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$-$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\square$	

.

Эта диаграмма соответствует максимальному допустимому подмножеству S, состоящему из шести элементов. Коразмерность $\Omega_{S,c}$ в Ω_S равна шести. При этом коразмерность произвольной коприсоединённой $\mathrm{UT}(n,K)$-орбиты в соответствующей $\mathrm{T}(n,K)$-орбите меньше или равна пяти. Следовательно, число $\mathrm{T}(n,K)$-орбит бесконечно.

Для произвольного n пример бесконечного семейства $\mathrm{T}(n,K)$-орбит можно построить с помощью допустимой диаграммы, у которой последние шесть строк и столбцов совпадают с диаграммой $(6,3,4)$, а на остальных местах стоит символ $\bullet$.

В заключение приведём систему определяющих уравнений для орбит семейства $(6,3,4)$, которые можно получить, используя методы следующего раздела:

$$y_{61}=y_{51}=y_{41}=y_{62}=y_{63}=0,\quad y_{31}=c_1\neq 0,\quad y_{52}=c_2\neq 0,$$
$$\begin{vmatrix} y_{42} & y_{43}\\ y_{52} & y_{53}\end{vmatrix}=c_3,\quad y_{53}y_{31}+y_{52}y_{21}=c_4,\quad y_{64}=c_5,\quad y_{65}=c_6. \qquad \square$$

2. Абсолютно максимальные пуассоновы идеалы

В этом разделе будет выписана система определяющих уравнений для любой коприсоединённой орбиты для $n\leqslant 7$. Рассмотрим матрицу, которую будем называть характеристической матрицей для формальной матрицы Φ (см. раздел 1):

$$\Phi(\tau)=\tau\Phi+E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0\\ \tau y_{21} & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \tau y_{n1} & \tau y_{n2} & \ldots & 1\end{pmatrix}.$$

Напомним, что мы отождествляем $S(\mathfrak{g})$ с алгеброй многочленов на пространстве $\mathfrak{g}^*$, которое реализуется как пространство верхнетреугольных матриц с нулями по диагонали.

Каждый минор (формальной) характеристической матрицы $\Phi(\tau)$ является многочленом от τ с коэффициентами в симметрической алгебре $S(\mathfrak{g})=K[\mathfrak{g}^*]$. Значения этих коэффициентов на элементе $F\in\mathfrak{g}^*$ совпадают с коэффициентами соответствующего минора обычной характеристической матрицы $\tau F+E$.

Согласно теореме 1.9 каждой допустимой паре (S,c) однозначно соответствует АМР-идеал $\mathcal{I}_{S,c}$ и орбита $\Omega_{S,c}=\operatorname{Ann}\mathcal{I}_{S,c}$. Размерность соответствующей орбиты равна числу символов $\pm$ в диаграмме. Идеал $\mathcal{I}_{S,c}$ совпадает с $\mathcal{I}(\Omega_{S,c})$. Каждому корню $\eta\in A(S)$ соответствует образующий элемент в идеале $\mathcal{I}_{S,c}$. В терминах диаграммы $D(S)$ каждому символу $\square$, $\otimes$, $\bullet$ соответствует образующий элемент в идеале $\mathcal{I}_{S,c}$. В этом разделе будет показано, что в качестве образующих элементов идеала $\mathcal{I}_{S,c}$ можно выбрать подходящие коэффициенты миноров характеристической матрицы $\Phi(\tau)$.

Пусть $S_\otimes=\{\beta_1>\ldots>\beta_{k_\otimes}\}$, где $k_\otimes=|S_\otimes|$. Пусть $\eta=\varepsilon_j-\varepsilon_i\in A(S)$. На соответствующем месте (i,j), $i>j$, диаграммы $D(S)$ стоит один из символов $\square$, $\otimes$ или $\bullet$. Поставим в соответствие корню η подстановку

$$w_\eta:=s_{\beta_1}\ldots s_{\beta_t}s_\eta,$$

где $\beta_1>\ldots>\beta_t>\eta\geqslant\beta_{t+1}>\ldots>\beta_{k_\otimes}$.

Рассмотрим набор столбцов
$$\Lambda := \Lambda_j = \{1, \ldots, j\}$$
и строк
$$w_\eta(\Lambda) = \mathrm{ord}\{w_\eta(1), \ldots, w_\eta(j)\}.$$
Минор $M^{\Lambda}_{w_\eta\Lambda}(\tau)$ матрицы $\Phi(t)$ является многочленом от τ:
$$M^{\Lambda}_{w_\eta\Lambda}(\tau) = P_{q,\eta}\tau^q + \ldots + P_{d,\eta}\tau^d, \quad q < \ldots < d,$$
где показатели q (d) при младшем (соответственно старшем) члене равны
$$q = |\Lambda \setminus w_\eta\Lambda| = |w_\eta\Lambda \setminus \Lambda|, \quad d = \sharp\{1 \leqslant m \leqslant j \mid i_m > m\}.$$
Пусть $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$ — набор фундаментальных весов.

Лемма 2.1. *Пусть $n \leqslant 7$. Для любого $\eta = \varepsilon_j - \varepsilon_i \in A(S)$ вес $(1 - w_\eta)\phi_j$ однозначно представи́м в виде суммы $\eta + \sum\beta$, в которой β пробегает некоторое подмножество $H(S, \eta) \subset \{\beta_1, \ldots, \beta_t\} \subset S_\otimes$.*

Доказательство получается перебором всех диаграмм для $n \leqslant 7$. □

Обозначим $h = h(S, \eta) := |H(S, \eta)| + 1$. Заметим, что число h определяется по η и S однозначно.

Теорема 2.2. *Пусть $n \leqslant 7$. AMP-идеал $\mathcal{I}_{S,c}$ в $S(\mathfrak{g})$ порождается элементами $P_{h,\eta} - P^0_{h,\eta} \in K$, где $P^0_{h,\eta} = P_{h,\eta}(f_{S,c})$.*

Доказательство. Для каждого максимального допустимого подмножества S доказательство проводится отдельно. Для примера проведём доказательство для $(7, 2, 7)$:
$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
 & & & & & & \\ \hline
+ & & & & & & \\ \hline
+ & + & & & & & \\ \hline
+ & \otimes & - & & & & \\ \hline
\otimes & - & - & - & & & \\ \hline
\bullet & \bullet & + & \square & \square & & \\ \hline
\bullet & \bullet & \otimes & \square & \square & - & \\ \hline
\end{array}.$$
Аддитивное подмножество $A(S)$ имеет вид $A(S) = S_\otimes \sqcup S_\square \sqcup M(S)$, где
$$S_\otimes = \{\alpha_{15}, \alpha_{24}, \alpha_{37}\}, \quad S_\square = \{\alpha_{46}, \alpha_{47}, \alpha_{56}, \alpha_{57}\}, \quad M(S) = \{\alpha_{16}, \alpha_{17}, \alpha_{26}, \alpha_{27}\}.$$

Пусть $\mathcal{I}$ — идеал, порождённый элементами $P_{h,\eta} - P^0_{h,\eta}$, где $\eta \in A(S)$. Чтобы доказать равенство $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{S,c}$ достаточно показать, что

1) идеал $\mathcal{I}$ пуассонов;
2) $\mathcal{I}(f_{S,c}) = 0$;

3) идеал $\mathcal{I}$ порождается образующими элементами вида $y_\eta + T_{>\eta} - c$, где $\eta \in A(S)$ и $T_{>\eta}$ — элемент подалгебры, порождённой $\{y_\gamma,\ \gamma > \eta\}$.

Действительно, из требований 1), 2) вытекает $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_{S,c}$. Из условия 3) следует, что алгебра $S(\mathfrak{g})/\mathcal{I}$ изоморфна алгебре многочленов $K[y_\eta \colon \eta \in \Delta^+ \setminus A(S)]$. Поэтому идеал $\mathcal{I}$ простой и $\operatorname{Dim}\mathcal{I} = |\Delta^+ \setminus A(S)| = \dim \Omega_{S,c}$. Таким образом, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{S,c}$.

Покажем, что $\mathcal{I}$ действительно удовлетворяет условиям 1), 2) и 3). Обозначим $P_{ij} = P_{h,\eta}$, где $\eta = \alpha_{ji}$. По определению идеал $\mathcal{I}$ порождается элементами $P_{ij} - P_{ij}^0$, где $P_{ij}^0 = P_{ij}(f_{S,c})$ и (i,j) пробегает пары, отмеченные на диаграмме символами $\otimes$, $\bullet$, $\square$. На множестве мономов от y_{ij} рассмотрим лексикографический порядок, при котором $y_\alpha > y_\eta$, если $\alpha < \eta$. Выпишем многочлены P_{ij} начиная со старшего члена:

$$P_{71} = y_{71}, \quad P_{61} = y_{61}, \quad P_{51} = y_{51}, \quad P_{51} = y_{51}, \quad P_{72} = \begin{vmatrix} y_{51} & y_{52} \\ y_{71} & y_{72} \end{vmatrix},$$

$$P_{62} = \begin{vmatrix} y_{51} & y_{52} \\ y_{61} & y_{62} \end{vmatrix}, \quad P_{42} = \begin{vmatrix} y_{41} & y_{42} \\ y_{51} & y_{52} \end{vmatrix}, \quad P_{73} = \begin{vmatrix} y_{41} & y_{42} & y_{43} \\ y_{51} & y_{52} & y_{53} \\ y_{71} & y_{72} & y_{73} \end{vmatrix},$$

$$P_{74} = y_{74} \begin{vmatrix} y_{41} & y_{42} \\ y_{51} & y_{52} \end{vmatrix} + y_{73} \begin{vmatrix} y_{31} & y_{32} \\ y_{51} & y_{52} \end{vmatrix} = y_{74}P_{42} + \ldots,$$

$$P_{64} = \begin{vmatrix} y_{41} & y_{42} \\ y_{51} & y_{52} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_{63} & y_{64} \\ y_{73} & y_{74} \end{vmatrix} = -y_{64}y_{73}P_{42} + \ldots,$$

$$P_{75} = y_{75}y_{51} + y_{74}y_{41} + y_{73}y_{31} = y_{75}y_{51} + \ldots,$$

$$P_{65} = \begin{vmatrix} y_{63} & y_{65} \\ y_{73} & y_{75} \end{vmatrix} y_{51} + \begin{vmatrix} y_{63} & y_{64} \\ y_{73} & y_{74} \end{vmatrix} y_{41} = -y_{65}y_{73}y_{51} + \ldots.$$

Идеал $\mathcal{I}$ содержит пуассонов идеал $\mathcal{I}^{(1)}$, порождённый элементами y_{71}, y_{61}, $y_{51} - y_{51}^0$. Элементы P_{62}, P_{72} являются элементами Казимира по модулю $\mathcal{I}^{(1)}$. Расширим идеал $\mathcal{I}^{(1)}$ до идеала $\mathcal{J} := \langle \mathcal{I}^{(1)}, P_{72}, P_{62} \rangle$.

Непосредственно проверяется, что выписанные выше многочлены P_{42}, P_{73}, P_{74}, P_{64}, P_{75}, P_{65} являются элементами Казимира в фактор-алгебре по модулю $\mathcal{J}$. Поэтому идеал $\mathcal{I}$ пуассонов, что доказывает 1). Справедливость условия 2) очевидна.

В идеале $\mathcal{I}$ можно выбрать новую систему образующих y_{71}, y_{61}, $y_{51} - y_{51}^0$, $y_{73} - y_{73}^0$, $Q_{ij} - Q_{ij}^0$, где (i,j) пробегает пары $(7,4)$, $(6,4)$, $(7,5)$, $(6,5)$ и Q_{ij} получается из P_{ij} заменой y_{51}, y_{73}, P_{42} на y_{51}^0, y_{73}^0, P_{42}^0, что доказывает 3). $\square$

Следствие 2.3. *Орбита $\Omega_{S,c}$ задаётся системой уравнений $P_{h,\eta} = \mathrm{const}(\eta)$, где η пробегает множество положительных корней, которым на диаграмме $D(S)$ соответствуют символы $\otimes$, $\bullet$, $\square$.* $\square$

Следствие 2.4. *Произвольная коприсоединённая орбита для $n \leqslant 7$ задаётся системой уравнений вида $P - c$, где P — некоторый коэффициент минора характеристической матрицы и $c \in K$.* $\square$

3. Субрегулярные орбиты

В этом разделе будет дано описание субрегулярных орбит унитреугольной группы (теорема 3.3). Введём обозначения

$$n_0 = \left[\frac{n}{2}\right], \quad n_\otimes = \left[\frac{n-1}{2}\right], \quad N = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Заметим, что $n = n_0 + n_\otimes + 1$.

Мы начнём с формулировки теоремы, дающей описание регулярных орбит. Непосредственно проверяется, что миноры матрицы Φ

$$P_j := M^{1,\ldots,j}_{n-j+1,\ldots,n}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n_0 \tag{3.1}$$

(верхний ряд — номера столбцов, нижний — строк), являются элементами Казимира в $S(\mathfrak{g})$.

Теорема 3.1 [3]. *Для каждой регулярной орбиты Ω_{reg} идеал $I(\Omega_{\mathrm{reg}})$ порождается элементами $P_1 - c_1, \ldots, P_{n_0} - c_{n_0}$, $c_j \in K$ и $c_j \neq 0$ для $1 \leqslant j \leqslant n_\otimes$.*

Ниже мы дадим доказательство теоремы 3.1 и покажем, что регулярным орбитам соответствуют регулярные максимальные допустимые подмножества (см. раздел 1). Заметим, что $|S_{\mathrm{reg}}| = n_0$ и $|S_{\mathrm{reg},\otimes}| = n_\otimes$.

В дальнейшем важную роль будут играть многочлены $Z_1, \ldots, Z_{n_\otimes}$, которые мы определим ниже. Рассмотрим цепочку миноров

$$P_j(\tau) := M^{1,\ldots,j}_{n-j+1,\ldots,n}(\tau), \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1,$$

характеристической матрицы $\Phi(\tau)$. Каждый минор $P_j(\tau)$ является многочленом от τ. Для $1 \leqslant j \leqslant n_0$ многочлен $P_j(\tau)$ равен $P_j\tau^j$, где P_j — соответствующий минор из матрицы Φ.

Для $j > n_0$ младший член многочлена $P_j(\tau)$ равен $P_j\tau^{n-j}$. Обозначим через Z_{n-j} коэффициент при τ^{n-j+1} в многочлене $P_j(\tau)$, $j > n_0$. Поскольку $n_0 < j \leqslant n-1$, то $1 \leqslant n-j < n-n_0 = n_\otimes + 1$. В частности,

$$Z_1 = y_{n,n-1}y_{n-1,1} + \ldots + y_{n,2}y_{2,1}$$

является коэффициентом при τ^2 в разложении $M^{1,\ldots,n-1}_{2,\ldots,n}(\tau)$ по степеням τ.

Нам понадобится вспомогательное утверждение 3.2. Рассмотрим разложение пространства $X := \mathfrak{g}^*$

$$X = X_0 \sqcup X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_{n-1},$$

где

$$X_i = \{f \in X \mid f(y_{n1}) = \ldots = f(y_{n-i+1,1}) = 0,\ f(y_{n-i,1}) \neq 0\}.$$

Обозначим

$$d_i = \max\{\dim\Omega \mid \Omega \subset X_i\}.$$

Назовём орбиту i-регулярной, если $\Omega \subset X_i$ и $\dim\Omega = d_i$.

Максимальное допустимое подмножество $S=\{\xi_1>\ldots>\xi_k\}$ назовём i-регулярным (обозначим $S(X_i)$), если $\xi_1=\alpha_{1,n-i}$ и каждый последующий элемент ξ_t, $2\leqslant t\leqslant k$, — наибольший элемент в соответствующем A_t (см. определение 1.3). Диаграммы $D(X_i)$, соответствующие $S(X_i)$, — это в точности те диаграммы, все символы $\bullet$ которых располагаются на местах $(n,1),\ldots,(n-i+1,1)$.

Утверждение 3.2.

$$d_i=\begin{cases}N-(n_0+2i), & \textit{если } i\leqslant n_\otimes,\\ N-(n_0+2n_\otimes), & \textit{если } i>n_\otimes.\end{cases}$$

Доказательство. Ниже мы каждому $S(X_i)$ поставим в соответствие семейство орбит $\{\Omega_{S(X_i),c}\}$ одной размерности, которое всюду плотно в X_i. С другой стороны, известно, что множество орбит максимальной размерности открыто [5, § 2.6] и, следовательно, $d_i=\dim\Omega_{S(X_i),c}$.

Построение семейства $\{\Omega_{S(X_i),c}\}$ проведём для каждого из случаев отдельно.

Случай 1. $i\leqslant n_\otimes$. Ниже в качестве примера приведены диаграммы $D(X_2)$ для $n=7$ и $n=8$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c}
\hline
 & & & & & & \\
\hline
+ & & & & & & \\
\hline
+ & + & & & & & \\
\hline
+ & + & + & & & & \\
\hline
\otimes & - & - & - & & & \\
\hline
\bullet & + & \otimes & - & \square & & \\
\hline
\bullet & \otimes & - & - & \square & - & \\
\hline
\end{array}\;, \qquad
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c}
\hline
 & & & & & & & \\
\hline
+ & & & & & & & \\
\hline
+ & + & & & & & & \\
\hline
+ & + & + & & & & & \\
\hline
+ & + & + & \square & & & & \\
\hline
\otimes & - & - & - & - & & & \\
\hline
\bullet & + & \otimes & - & - & \square & & \\
\hline
\bullet & \otimes & - & - & - & \square & - & \\
\hline
\end{array}\;.$$

Столбцы таблицы $D(X_i)$ удовлетворяют случаям 1 и 3 из доказательства леммы 1.7. Это позволяет построить идеал $\mathcal{I}_{S(X_i),c}$ методами теоремы 1.9. Размерность $\Omega_{S(X_i),c}$ равна числу символов $\pm$ в диаграммах. Все орбиты семейства имеют общую размерность, равную $N-|S(X_i)|=N-(n_0+2i)$. Это завершает доказательство в случае 1.

Отметим, что идеал $\mathcal{I}_{S(X_i),c}$ может быть построен в явном виде методом из раздела 2. Пусть $\{\xi_1>\ldots>\xi_{n_0}\}$ — первые n_0 корней в $S(X_i)$ (в нечётном случае это веса, соответствующие символам $\otimes$, в чётном случае — веса, соответствующие символам $\otimes$, и вес α_{n_0,n_0+1}).

Каждому $1\leqslant j\leqslant n_0$ поставим в соответствие номер строки $m(j)$, такой что $\xi_i=\alpha_{i,m(i)}$. Рассмотрим систему миноров $Q_1,\ldots,Q_{n_0}$, где

$$Q_j=M^{1,\ldots,j}_{m(1),\ldots,m(j)}.$$

Рассмотрим идеал $\mathcal{J}$, порождённый элементами $y_{n1}, \ldots, y_{n-i+1,1}$. Легко проверяется, что многочлены $Q_1, \ldots, Q_{n_0}, Z_1, \ldots, Z_i$ являются элементами Казимира по модулю $\mathcal{J}$. Идеал $\mathcal{I}_{S(X_i),c}$ порождается $\mathcal{J}$ и элементами вида $P - c$, где $P = Q_j$, $1 \leqslant j \leqslant n_0$, или $P = Z_j$, $1 \leqslant j \leqslant i$.

Случай 2. $i > n_\otimes$. Ниже в качестве примера приведены диаграммы $D(X_4)$ для $n = 7$ и $n = 8$:

$+$						
$\otimes$	$-$					
$\bullet$	$+$	$+$				
$\bullet$	$+$	$+$	$\square$			
$\bullet$	$+$	$\otimes$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$-$	$-$	$-$	

,

$+$							
$+$	$+$						
$\otimes$	$-$	$-$					
$\bullet$	$+$	$+$	$+$				
$\bullet$	$+$	$+$	$\otimes$	$-$			
$\bullet$	$+$	$\otimes$	$\square$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\otimes$	$-$	$\square$	$-$	$-$	$-$	

.

Столбцы таблицы $D(X_i)$ удовлетворяют случаям 1 и 3 из доказательства леммы 1.7. Это позволяет построить идеал $\mathcal{I}_{S(X_i),c}$ методами теоремы 1.9. Размерность $\Omega_{S(X_i),c}$ равна числу символов $\pm$ в диаграммах. Все орбиты семейства имеют общую размерность, равную $N - |S(X_i)| = N - (n_0 + 2n_\otimes)$. Это завершает доказательство в случае 2.

Отметим, что можно найти образующие $\mathcal{I}_{S(X_i),c}$ аналогично случаю 1. Идеал $\mathcal{I}_{S(X_i),c}$ порождается $\mathcal{J}$ и элементами вида $P - c$, где $P = Q_j$, $1 \leqslant j \leqslant n_\otimes + 1$, или $P = Z_j$, $1 \leqslant j \leqslant n - i - 2$. $\square$

Замечание. Мы показали, что орбита $\Omega_{S(X_i),c}$ i-регулярна. Заметим, что при $i > 1$ не всякая i-регулярная орбита имеет вид $\Omega_{S(X_i),c}$.

Доказательство теоремы 3.1. К регулярным диаграммам (т. е. диаграммам $D(S_{\mathrm{reg}})$) применим метод теоремы 1.9. Это позволяет построить по S_{reg} семейство орбит $\{\Omega_{S_{\mathrm{reg}},c}\}$ размерности $N - n_0$. Так как это семейство всюду плотно в $\mathfrak{g}^*$, то максимальная размерность орбиты равна $N - n_0$. Идеал $\mathcal{I}(S_{\mathrm{reg}})$ порождается $P_j - c_j$, $1 \leqslant j \leqslant n_0$.

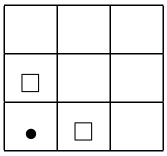
Осталось показать, что каждая регулярная орбита совпадает с орбитой, построенной по регулярной диаграмме. Пусть Ω — регулярная орбита. Тогда из утверждения 3.2 следует, что $\Omega \subset X_0$. Так как y_{n1} является элементом Казимира в $S(\mathfrak{g})$, то $\mathcal{I}(\Omega)$ содержит некоторый элемент $y_{n1} - c$, где $c \neq 0$. Пусть $\mathcal{I}^{(1)} = \langle y_{n1} - c \rangle$. Согласно лемме 1.7

$$S(\mathfrak{g})/\mathcal{I}^{(1)} = \mathcal{A}_{n-2} \otimes S\big(\mathfrak{ut}(n-2, K)\big).$$

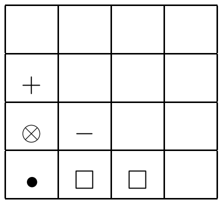
Симплектическому листу (т. е. орбите) Ω в $\mathfrak{g}^*$ соответствует симплектический лист (орбита) ω в $\mathfrak{ut}^*(n-2, K)$. Поскольку орбита Ω регулярна, то и орбита ω

регулярна в $\mathfrak{ut}^*(n-2, K)$. Применение индукции по n завершает доказательство. □

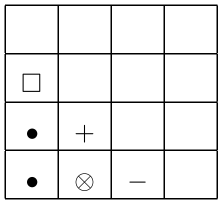
Перейдём к описанию субрегулярных орбит. Для $n = 3$ и $n = 4$ субрегулярные орбиты описываются следующими диаграммами:



(3, 1, 1),



(4, 1, 1),



(4, 2, 1).

Перечислим номера диаграмм размеров 5, 6, 7, описывающих субрегулярные орбиты:

$$\begin{aligned} n = 5&: \quad (5,0,2), \quad (5,1,1);\\ n = 6&: \quad (6,0,2), \quad (6,0,3), \quad (6,1,1);\\ n = 7&: \quad (7,0,2), \quad (7,0,3), \quad (7,1,1). \end{aligned}$$

Для каждого $1 \leqslant j \leqslant n_\otimes$ рассмотрим миноры матрицы Φ

$$P'_j = M^{1,\dots,j}_{n-j,n-j+2,\dots,n} \quad P''_j = M^{1,\dots,j-1,j+1}_{n-j+1,\dots,n},$$

окамляющие минор P_{j-1} из (3.1). Для чётного n рассмотрим также минор

$$P'_{n_0} = M^{1,2,\dots,n_0-1}_{n_0,n_0+3,n_0+4,\dots,n}.$$

Напомним, что поскольку миноры P_j из (3.1) являются элементами Казимира, то они постоянны на всех орбитах.

Теорема 3.3. *Пусть Ω_{sreg} — субрегулярная орбита.*

1. *Если $P_{n_\otimes}(\Omega_{\mathrm{sreg}}) \neq 0$, то существуют числа $1 \leqslant j_0 < n_\otimes$ и*

$$\{c_1, \dots, c_{j_0-1}, c', c'', c_{j_0+2}, \dots, c_{n_0-1}\} \subset K^*, \quad \{c_{n_0}, c\} \subset K,$$

причём $c_{n_0} \neq 0$ для нечётного n, такие что идеал $I(\Omega_{\mathrm{sreg}})$ порождается элементами

$$\begin{gathered} P_i - c_i, \quad \text{где} \quad i = 1, \dots, j_0 - 1, j_0 + 2, \dots, n_0,\\ P'_{j_0} - c', \quad P''_{j_0} - c'', \quad P_{j_0}, \quad Z_{j_0} - c. \end{gathered}$$

2. *Если $P_{n_\otimes}(\Omega_{\mathrm{sreg}}) = 0$ и n нечётно, то существуют числа*

$$\{c_1, \dots, c_{n_\otimes - 1}\} \subset K^*, \quad \{c', c''\} \subset K,$$

такие что идеал $I(\Omega_{\mathrm{sreg}})$ порождается элементами

$$\begin{gathered} P_i - c_i, \quad \text{где} \quad i = 1, \dots, n_\otimes - 1,\\ P'_{n_\otimes} - c', \quad P''_{n_\otimes} - c'', \quad P_{n_\otimes}. \end{gathered}$$

3. *Если $P_{n_\otimes}(\Omega_{\mathrm{sreg}}) = 0$ и n чётно, то существуют числа*

$$\{c_1, \ldots, c_{n_\otimes - 1}, c'\} \subset K^*, \quad \{c'', c\} \subset K,$$

такие что идеал $I(\Omega_{\mathrm{sreg}})$ порождается элементами

$$P_i - c_i, \quad \text{где} \ \ i = 1, \ldots, n_\otimes - 1,$$

и элементами вида а) *или* б)*:*

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad P'_{n_\otimes} - c', \ P''_{n_\otimes} - c'', \ P_{n_\otimes}, Z_{n_\otimes} - c, \\ &\text{б)} \quad P_{n_\otimes}, \ P'_{n_\otimes}, \ P'_{n_0} - c'', \ P''_{n_\otimes} - c'. \end{aligned}$$

Доказательство. Случаи $n \leqslant 4$ проверяются непосредственно. Пусть Ω_{sreg} — субрегулярная орбита в $\mathfrak{ut}(n, K)$ для $n > 4$. Из утверждения 3.2 вытекает, что для $n > 4$ возможны два случая: $\Omega_{\mathrm{sreg}} \subset X_0$ и $\Omega_{\mathrm{sreg}} \subset X_1$.

Случай 1. $\Omega_{\mathrm{sreg}} \subset X_1$. Идеал $\mathcal{I}(\Omega_{\mathrm{sreg}})$ содержит идеал $\mathcal{J}$, порождённый y_{n1}. Элементы P_i, $3 \leqslant i \leqslant n_0$, и $y_{n-1,1}$, y_{n2}, Z_1 являются элементами Казимира по модулю $\mathcal{J}$. Существуют константы $\{c, c'_1, c''_1, c_3, \ldots, c_{n_0}\} \subset K$, такие что идеал $\mathcal{I}$, порождённый $\mathcal{J}$, $P_i - c_i$, $3 \leqslant i \leqslant n_0$, и $y_{n-1,1} - c'$, $y_{n2} - c''$, $Z_1 - c$, где $c' \neq 0$, аннулируется на Ω_{sreg}. Поэтому $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}(\Omega_{\mathrm{sreg}})$.

Рассмотрим пуассонов идеал $\mathcal{I}_0 = \langle y_{n,1}, y_{n-1,1} - c', Z_1 - c \rangle$. Очевидно, что $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{I}(\Omega_{\mathrm{sreg}})$. Согласно лемме 1.7

$$S(\mathfrak{g})/\mathcal{I}_0 = \mathcal{A}_{n-3} \otimes S(\mathfrak{g}_2),$$

где алгебра Ли $\mathfrak{g}_2$ изоморфна $\mathfrak{ut}(n-2, K)$. Оба идеала $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}(\Omega_{\mathrm{sreg}})$ порождаются по модулю $\mathcal{I}_0$ регулярным AMP-идеалом в $S(\mathfrak{g}_2)$. Поэтому $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\Omega_{\mathrm{sreg}})$.

Случай 2. $\Omega_{\mathrm{sreg}} \subset X_0$. Предположим, что $P_1(\Omega_{\mathrm{sreg}}) \neq 0, \ldots, P_{j_0-1}(\Omega_{\mathrm{sreg}}) \neq 0$ и $P_{j_0}(\Omega_{\mathrm{sreg}}) = 0$. Доказательство проводится аналогично случаю 1 с заменой y_{n1}, $y_{n-1,1}$, y_{n2} на P_{j_0}, P'_{j_0}, P''_{j_0}. □

Список максимальных допустимых диаграмм для $n = 6$

$(6, 0, 1)$

$+$				
$+$	$+$			
$+$	$+$	$\square$		
$+$	$\otimes$	$-$	$-$	
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	$-$

$(6, 0, 2)$

$+$				
$+$	$+$			
$+$	$\otimes$	$-$		
$+$	$\bullet$	$\square$	$\square$	
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	$-$

$(6, 0, 3)$

$+$				
$+$	$\square$			
$+$	$\bullet$	$+$		
$+$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	$-$

$(6, 0, 4)$

$+$				
$+$	$\square$			
$+$	$\bullet$	$\square$		
$+$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	$-$

$(6, 1, 1)$

$+$				
$+$	$+$			
$+$	$+$	$\square$		
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	
$\bullet$	$\otimes$	$-$	$-$	$\square$

$(6, 1, 2)$

$+$				
$+$	$+$			
$+$	$\otimes$	$-$		
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	
$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\square$	$\square$

$(6,1,3)$

$+$				
$+$	$\square$			
$+$	$\bullet$	$+$		
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	$\square$

$(6,1,4)$

$+$				
$+$	$\square$			
$+$	$\bullet$	$\square$		
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\square$

$(6,2,1)$

$+$				
$+$	$+$			
$\otimes$	$-$	$-$		
$\bullet$	$+$	$\square$	$\square$	
$\bullet$	$\otimes$	$-$	$\square$	$-$

$(6,2,2)$

$+$				
$+$	$+$			
$\otimes$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\otimes$	$-$	$+$	
$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\otimes$	$-$

$(6,2,3)$

$+$				
$+$	$+$			
$\otimes$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\otimes$	$-$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\bullet$	$\square$

$(6,2,4)$

$+$				
$+$	$\square$			
$\otimes$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\bullet$	$+$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$-$

$(6,2,5)$

$+$				
$+$	$\square$			
$\otimes$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$+$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$

$(6,2,6)$

$+$				
$+$	$\square$			
$\otimes$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$

$(6,3,1)$

$+$				
$\otimes$	$-$			
$\bullet$	$+$	$+$		
$\bullet$	$+$	$\otimes$	$-$	
$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$-$	$-$

$(6,3,2)$

$+$				
$\otimes$	$-$			
$\bullet$	$+$	$\square$		
$\bullet$	$+$	$\bullet$	$\square$	
$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$-$	$-$

$(6,3,3)$

$+$				
$\otimes$	$-$			
$\bullet$	$+$	$+$		
$\bullet$	$\otimes$	$+$	$-$	
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	$-$

$(6,3,4)$

$+$				
$\otimes$	$-$			
$\bullet$	$+$	$\square$		
$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$-$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\square$

$(6,3,5)$

$+$				
$\otimes$	$-$			
$\bullet$	$\square$	$+$		
$\bullet$	$\bullet$	$+$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	$-$

$(6,3,6)$

$+$				
$\otimes$	$-$			
$\bullet$	$\square$	$+$		
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\square$

$(6,3,7)$

$+$				
$\otimes$	$-$			
$\bullet$	$\square$	$\square$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$+$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$

$(6,3,8)$

$+$				
$\otimes$	$-$			
$\bullet$	$\square$	$\square$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$

$(6,4,\star)$

$\square$				
$\bullet$	$*$			
$\bullet$	$*$	$*$		
$\bullet$	$*$	$*$	$*$	
$\bullet$	$*$	$*$	$*$	$*$

Список максимальных допустимых диаграмм для $n = 7$

$(7,0,1)$

$+$					
$+$	$+$				
$+$	$+$	$+$			
$+$	$+$	$\otimes$	$-$		
$+$	$\otimes$	$-$	$-$	$-$	
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

$(7,0,2)$

$+$					
$+$	$+$				
$+$	$+$	$\square$			
$+$	$+$	$\bullet$	$\square$		
$+$	$\otimes$	$-$	$-$	$-$	
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

$(7,0,3)$

$+$					
$+$	$+$				
$+$	$+$	$+$			
$+$	$\otimes$	$-$	$-$		
$+$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	$\square$	
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

$(7,0,4)$

$+$					
$+$	$+$				
$+$	$+$	$\square$			
$+$	$\otimes$	$-$	$-$		
$+$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\square$	
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

$(7,0,5)$

$+$					
$+$	$+$				
$+$	$\otimes$	$-$			
$+$	$\bullet$	$+$	$\square$		
$+$	$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$-$	
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

$(7,0,6)$

$+$					
$+$	$+$				
$+$	$\otimes$	$-$			
$+$	$\bullet$	$\square$	$+$		
$+$	$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

$(7,0,7)$

$+$					
$+$	$+$				
$+$	$\otimes$	$-$			
$+$	$\bullet$	$\square$	$\square$		
$+$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

$(7,0,8)$

$+$					
$+$	$\square$				
$+$	$\bullet$	$+$			
$+$	$\bullet$	$+$	$\square$		
$+$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	$-$	
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

$(7,0,9)$

$+$					
$+$	$\square$				
$+$	$\bullet$	$+$			
$+$	$\bullet$	$\otimes$	$-$		
$+$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\square$	
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

$(7,0,10)$

$+$					
$+$	$\square$				
$+$	$\bullet$	$\square$			
$+$	$\bullet$	$\bullet$	$+$		
$+$	$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

$(7, 0, 11)$

+					
+	□				
+	•	□			
+	•	•	□		
+	•	•	•	□	
⊗	−	−	−	−	−

$(7, 1, 1)$

+					
+	+				
+	+	+			
+	+	⊗	−		
⊗	−	−	−	−	
•	⊗	−	−	−	□

$(7, 1, 2)$

+					
+	+				
+	+	□			
+	+	•	□		
⊗	−	−	−	−	
•	⊗	−	−	−	□

$(7, 1, 3)$

+					
+	+				
+	+	+			
+	⊗	−	−		
⊗	−	−	−	−	
•	•	⊗	−	□	□

$(7, 1, 4)$

+					
+	+				
+	+	□			
+	⊗	−	−		
⊗	−	−	−	−	
•	•	•	□	□	□

$(7, 1, 5)$

+					
+	+				
+	⊗	−			
+	•	+	□		
⊗	−	−	−	−	
•	•	⊗	□	−	□

$(7, 1, 6)$

+					
+	+				
+	⊗	−			
+	•	□	+		
⊗	−	−	−	−	
•	•	•	⊗	−	□

$(7, 1, 7)$

+					
+	+				
+	⊗	−			
+	•	□	□		
⊗	−	−	−	−	
•	•	•	•	□	□

$(7, 1, 8)$

+					
+	□				
+	•	+			
+	•	+	□		
⊗	−	−	−	−	
•	•	⊗	−	−	□

$(7, 1, 9)$

+					
+	□				
+	•	+			
+	•	⊗	−		
⊗	−	−	−	−	
•	•	•	□	□	□

$(7,1,10)$

$+$					
$+$	$\square$				
$+$	$\bullet$	$\square$			
$+$	$\bullet$	$\bullet$	$+$		
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	$-$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	$\square$

$(7,1,11)$

$+$					
$+$	$\square$				
$+$	$\bullet$	$\square$			
$+$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$		
$\otimes$	$-$	$-$	$-$	$-$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\square$

$(7,2,1)$

$+$					
$+$	$+$				
$+$	$+$	$+$			
$\otimes$	$-$	$-$	$-$		
$\bullet$	$+$	$\otimes$	$-$	$\square$	
$\bullet$	$\otimes$	$-$	$-$	$\square$	$-$

$(7,2,2)$

$+$					
$+$	$+$				
$+$	$+$	$\square$			
$\otimes$	$-$	$-$	$-$		
$\bullet$	$+$	$\bullet$	$\square$	$\square$	
$\bullet$	$\otimes$	$-$	$-$	$\square$	$-$

$(7,2,3)$

$+$					
$+$	$+$				
$+$	$+$	$+$			
$\otimes$	$-$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\otimes$	$-$	$-$	$+$	
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	$\otimes$	$-$

$(7,2,4)$

$+$					
$+$	$+$				
$+$	$+$	$+$			
$\otimes$	$-$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\otimes$	$-$	$-$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	$\bullet$	$\square$

$(7,2,5)$

$+$					
$+$	$+$				
$+$	$+$	$\square$			
$\otimes$	$-$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\otimes$	$-$	$-$	$+$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\otimes$	$-$

$(7,2,6)$

$+$					
$+$	$+$				
$+$	$+$	$\square$			
$\otimes$	$-$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\otimes$	$-$	$-$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\bullet$	$\square$

$(7,2,7)$

$+$					
$+$	$+$				
$+$	$\otimes$	$-$			
$\otimes$	$-$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\bullet$	$+$	$\square$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$\square$	$-$

$(7,2,8)$

$+$					
$+$	$+$				
$+$	$\otimes$	$-$			
$\otimes$	$-$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$+$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$-$

$(7, 2, 9)$

$+$					
$+$	$+$				
$+$	$\otimes$	$-$			
$\otimes$	$-$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\square$	$+$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$

$(7, 2, 10)$

$+$					
$+$	$+$				
$+$	$\otimes$	$-$			
$\otimes$	$-$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\square$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$

$(7, 2, 11)$

$+$					
$+$	$\square$				
$+$	$\bullet$	$+$			
$\otimes$	$-$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\bullet$	$+$	$\square$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	$\square$	$-$

$(7, 2, 12)$

$+$					
$+$	$\square$				
$+$	$\bullet$	$+$			
$\otimes$	$-$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	$+$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\otimes$	$-$

$(7, 2, 13)$

$+$					
$+$	$\square$				
$+$	$\bullet$	$+$			
$\otimes$	$-$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\bullet$	$\square$

$(7, 2, 14)$

$+$					
$+$	$\square$				
$+$	$\bullet$	$\square$			
$\otimes$	$-$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$+$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$-$

$(7, 2, 15)$

$+$					
$+$	$\square$				
$+$	$\bullet$	$\square$			
$\otimes$	$-$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$+$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$

$(7, 2, 16)$

$+$					
$+$	$\square$				
$+$	$\bullet$	$\square$			
$\otimes$	$-$	$-$	$-$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$

$(7, 3, 1)$

$+$					
$+$	$+$				
$\otimes$	$-$	$-$			
$\bullet$	$+$	$+$	$\square$		
$\bullet$	$+$	$\otimes$	$\square$	$-$	
$\bullet$	$\otimes$	$-$	$\square$	$-$	$-$

$(7, 3, 2)$

$+$					
$+$	$+$				
$\otimes$	$-$	$-$			
$\bullet$	$+$	$\square$	$+$		
$\bullet$	$+$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	
$\bullet$	$\otimes$	$-$	$\square$	$-$	$-$

$(7,3,3)$

+					
+	+				
⊗	−	−			
•	+	□	□		
•	+	•	•	□	
•	⊗	−	□	−	−

$(7,3,4)$

+					
+	+				
⊗	−	−			
•	+	+	□		
•	⊗	−	+	−	
•	•	⊗	⊗	−	−

$(7,3,5)$

+					
+	+				
⊗	−	−			
•	+	+	□		
•	⊗	−	□	−	
•	•	⊗	•	−	□

$(7,3,6)$

+					
+	+				
⊗	−	−			
•	+	□	+		
•	⊗	−	+	−	
•	•	•	⊗	−	−

$(7,3,7)$

+					
+	+				
⊗	−	−			
•	+	□	□		
•	⊗	−	□	−	
•	•	•	•	□	□

$(7,3,8)$

+					
+	+				
⊗	−	−			
•	⊗	−	+		
•	•	+	□	□	
•	•	⊗	⊗	−	−

$(7,3,9)$

+					
+	+				
⊗	−	−			
•	⊗	−	+		
•	•	+	⊗	−	
•	•	⊗	•	□	−

$(7,3,10)$

+					
+	+				
⊗	−	−			
•	⊗	−	□		
•	•	+	•	□	
•	•	⊗	•	□	−

$(7,3,11)$

+					
+	+				
⊗	−	−			
•	⊗	−	+		
•	•	□	+	□	
•	•	•	⊗	−	−

$(7,3,12)$

+					
+	+				
⊗	−	−			
•	⊗	−	+		
•	•	□	⊗	−	
•	•	•	•	□	□

$(7,3,13)$

$+$					
$+$	$+$				
$\otimes$	$-$	$-$			
$\bullet$	$\otimes$	$-$	$\square$		
$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\bullet$	$+$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$

$(7,3,14)$

$+$					
$+$	$+$				
$\otimes$	$-$	$-$			
$\bullet$	$\otimes$	$-$	$\square$		
$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\bullet$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$

$(7,3,15)$

$+$					
$+$	$\square$				
$\otimes$	$-$	$-$			
$\bullet$	$\bullet$	$+$	$+$		
$\bullet$	$\bullet$	$+$	$\otimes$	$-$	
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$-$	$-$

$(7,3,16)$

$+$					
$+$	$\square$				
$\otimes$	$-$	$-$			
$\bullet$	$\bullet$	$+$	$\square$		
$\bullet$	$\bullet$	$+$	$\bullet$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$-$	$-$

$(7,3,17)$

$+$					
$+$	$\square$				
$\otimes$	$-$	$-$			
$\bullet$	$\bullet$	$+$	$+$		
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$+$	$-$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	$-$

$(7,3,18)$

$+$					
$+$	$\square$				
$\otimes$	$-$	$-$			
$\bullet$	$\bullet$	$+$	$\square$		
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$-$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\square$

$(7,3,19)$

$+$					
$+$	$\square$				
$\otimes$	$-$	$-$			
$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$+$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$+$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	$-$

$(7,3,20)$

$+$					
$+$	$\square$				
$\otimes$	$-$	$-$			
$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$+$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\square$

$(7,3,21)$

$+$					
$+$	$\square$				
$\otimes$	$-$	$-$			
$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\square$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$+$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$

$(7,3,22)$

$+$					
$+$	$\square$				
$\otimes$	$-$	$-$			
$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\square$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$

$(7,4,1)$

+					
⊗	−				
•	+	+			
•	+	+	□		
•	+	⊗	−	−	
•	⊗	□	−	−	−

$(7,4,2)$

+					
⊗	−				
•	+	+			
•	+	⊗	−		
•	+	•	□	□	
•	⊗	□	−	−	−

$(7,4,3)$

+					
⊗	−				
•	+	□			
•	+	•	+		
•	+	•	⊗	−	
•	⊗	□	−	−	−

$(7,4,4)$

+					
⊗	−				
•	+	□			
•	+	•	□		
•	+	•	•	□	
•	⊗	□	−	−	−

$(7,4,5)$

+					
⊗	−				
•	+	+			
•	+	+	□		
•	⊗	+	−	−	
•	•	⊗	−	−	−

$(7,4,6)$

+					
⊗	−				
•	+	+			
•	+	⊗	−		
•	⊗	□	−	−	
•	•	•	□	□	□

$(7,4,7)$

+					
⊗	−				
•	+	□			
•	+	•	+		
•	⊗	□	−	−	
•	•	•	⊗	−	□

$(7,4,8)$

+					
⊗	−				
•	+	□			
•	+	•	□		
•	⊗	□	−	−	
•	•	•	•	□	□

$(7,4,9)$

+					
⊗	−				
•	+	+			
•	⊗	+	−		
•	•	+	□	□	
•	•	⊗	−	−	−

$(7,4,10)$

+					
⊗	−				
•	+	+			
•	⊗	+	−		
•	•	⊗	−	−	
•	•	•	□	□	□

$(7, 4, 11)$

$+$					
$\otimes$	$-$				
$\bullet$	$+$	$\square$			
$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$-$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$+$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$-$

$(7, 4, 12)$

$+$					
$\otimes$	$-$				
$\bullet$	$+$	$\square$			
$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$-$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$+$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$

$(7, 4, 13)$

$+$					
$\otimes$	$-$				
$\bullet$	$+$	$\square$			
$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$-$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$

$(7, 4, 14)$

$+$					
$\otimes$	$-$				
$\bullet$	$\square$	$+$			
$\bullet$	$\bullet$	$+$	$+$		
$\bullet$	$\bullet$	$+$	$\otimes$	$-$	
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	$-$	$-$

$(7, 4, 15)$

$+$					
$\otimes$	$-$				
$\bullet$	$\square$	$+$			
$\bullet$	$\bullet$	$+$	$\square$		
$\bullet$	$\bullet$	$+$	$\bullet$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	$-$	$-$

$(7, 4, 16)$

$+$					
$\otimes$	$-$				
$\bullet$	$\square$	$+$			
$\bullet$	$\bullet$	$+$	$+$		
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	$-$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	$\square$

$(7, 4, 17)$

$+$					
$\otimes$	$-$				
$\bullet$	$\square$	$+$			
$\bullet$	$\bullet$	$+$	$\square$		
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$	$-$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\square$

$(7, 4, 18)$

$+$					
$\otimes$	$-$				
$\bullet$	$\square$	$+$			
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$+$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$\square$	$-$

$(7, 4, 19)$

$+$					
$\otimes$	$-$				
$\bullet$	$\square$	$+$			
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$+$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$

$(7, 4, 20)$

$+$					
$\otimes$	$-$				
$\bullet$	$\square$	$+$			
$\bullet$	$\bullet$	$\otimes$	$-$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$	$\square$	
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\square$

$(7, 4, 21)$

+					
⊗	−				
•	□	□			
•	•	•	+		
•	•	•	+	□	
•	•	•	⊗	−	−

$(7, 4, 22)$

+					
⊗	−				
•	□	□			
•	•	•	+		
•	•	•	⊗	−	
•	•	•	•	□	□

$(7, 4, 23)$

+					
⊗	−				
•	□	□			
•	•	•	□		
•	•	•	•	+	
•	•	•	•	⊗	−

$(7, 4, 24)$

+					
⊗	−				
•	□	□			
•	•	•	□		
•	•	•	•	□	
•	•	•	•	•	□

$(7, 5, \star)$

□					
•	∗				
•	∗	∗			
•	∗	∗	∗		
•	∗	∗	∗	∗	
•	∗	∗	∗	∗	∗

Литература

[1] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Главы 4, 5, 6. — М: Мир, 1972.

[2] Диксмье Ж. Универсальные обёртывающие алгебры. — М: Мир, 1978.

[3] Кириллов А. А. Унитарные представления нильпотентных групп Ли // Успехи мат. наук. — 1962. — Т. 17. — С. 57—110.

[4] Кириллов А. А. Лекции по методу орбит. — Новосибирск: Научная книга (ИДМИ), 2002.

[5] Крафт Х. Геометрические методы в теории инвариантов. — ИО НФМИ, 2000.

[6] Andre Carlos A. M. Basic characters of the unitriangular group // J. Algebra. — 1995. — Vol. 175. — P. 287—319.

[7] Andre Carlos A. M. Basic sums of coadjoint orbits of the unitriangular group // J. Algebra. — 1995. — Vol. 176. — P. 959—1000.

[8] Andre Carlos A. M. The basic character table of the unitriangular group // J. Algebra. — 2001. — Vol. 241. — P. 437—471.

[9] Gekhtman M. I., Shapiro M. Z. Noncommutative and commutative integrability of generic Toda flows in simple Lie algebras // Comm. Pure Appl. Math. — 1999. — Vol. 11. — P. 53—84.

[10] Kirillov A. A. Variations on the triangular theme // Amer. Math. Soc. Transl. (2). — 1995. — Vol. 169. — P. 43—72.

[11] Kirillov A. A., Melnikov A. On a remarkable sequences of polynomials // Algèbre non commutative, groupes quantiques et invariants. Septième contact Franco-Belge, Reims, Juin 1995 / J. Alev, G. Cauchon, eds. — Soc. Math. de France, 1997. — (Séminaires et Congrès; Vol. 2). — P. 35—42.