Алгебраичность множеств в локальных кольцах

И. О. КАЧКОВСКИЙ
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*

УДК 512.552

Ключевые слова: косые многочлены, локальное кольцо, корни многочленов, алгебраичность подмножеств.

Аннотация

В работе изучаются косые многочлены над локальными кольцами, их корни и разложения на множители. На основе этой теории проводится первоначальное изучение понятия алгебраичности подмножества в локальном кольце.

Abstract

I. O. Kachkovski, Algebraicity in local rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 5, pp. 161—170.

In this paper, we study skew polynomials over local rings, their roots and decompositions. We introduce the concept of an algebraic set in a local ring and study this concept using the theory of skew polynomials.

1. Введение

С момента появления в работах Оре в 1933 г. кольца косых многочленов над телом являются предметом активного изучения. Идея «подкрутки» при умножении гораздо старше и восходит к Гильберту, который использовал её при построении некоммутативного упорядоченного тела. Современное изложение теории косых многочленов над телом можно найти в [7], где содержатся также результаты об алгебраичности, получившие дальнейшее развитие в работах [8, 9]. Косые многочлены над локальными кольцами изучал А. В. Баранцев, в работе [1] которого основное внимание уделено теоретико-кольцевым свойствам кольца косых многочленов. В предлагаемой работе понятие алгебраичности обобщается на случай локального кольца. Проводится его первоначальное изучение с использованием теории, развитой в [1].

Изложение построено следующим образом. Сначала напоминаются основные факты о косых многочленах из [1] с необходимыми уточнениями и добавлениями. Доказывается важная теорема о произведении, которая служит основой для изучения алгебраичности, поскольку позволяет эффективно вычислять значение многочленов в точках кольца R. Затем вводится и обсуждается понятие θ-алгебраичности подмножества локального кольца (здесь θ — эндоморфизм

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 5, с. 161—170.

кольца R). Показывается, что, в противоположность случаю тела, конечное множество не обязано быть алгебраичным. Также формулируется гипотеза о том, что при некоторых условиях на θ и R радикал Джекобсона $J(R)$ θ-алгебраичен в том и только в том случае, если он ниль-идеал ограниченного индекса; приводятся утверждения, подтверждающие справедливость гипотезы. Наконец, изучаются разложения косых многочленов на множители. Основным результатом является теорема 4, описывающая $n!$ разложений многочлена f степени n, относительно которого предполагается, что он имеет n корней в некотором смысле «в общем положении».

На протяжении всей работы R означает (вообще говоря, некоммутативное) локальное кольцо с единицей 1, $J = J(R)$ — радикал Джекобсона кольца R, $R^* = R \setminus J$ — множество всех обратимых элементов кольца R, θ — эндоморфизм кольца R, удовлетворяющий условию $\theta(1) = 1$. Рассматривается

$$R[t,\theta] = \left\{ \sum_i c_i t^i \right\} -$$

кольцо косых многочленов над R с обычным сложением и умножением согласно правилу $ta = a^\theta t$ для всех $a \in R$ (здесь $a^\theta = \theta(a)$). Наибольшее i, такое что $c_i \in R^*$, называется степенью многочлена $f(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i t^i$, n называется слабой степенью f.

Значение многочлена $f(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i t^i$ в точке $a \in R$ определяется следующим образом:

$$f(a) = \sum_{i=0}^{n} c_i N_{\theta,i}(a),$$

где

$$N_{\theta,0}(a) = 1, \quad N_{\theta,i}(a) = a^{\theta^{i-1}} \ldots a^\theta a, \quad i \geqslant 1.$$

Элемент a называется (правым) корнем многочлена $f(t)$, если $f(a) = 0$.

Отношение (θ, J)-сопряжённости определяется следующим образом:

$$a \sim b \iff \exists x \in R^*,\ j \in J\colon\ a = x^\theta b x^{-1} + j.$$

В стандартной терминологии и обозначениях мы следуем [3, 4].

2. Несколько фактов о косых многочленах

В общем случае вычисление значения многочлена в точке $a \in R$ может не быть кольцевым гомоморфизмом из $R[t,\theta]$ в R. Другими словами, если $f(t) = g(t)h(t)$ в $R[t,\theta]$, то $f(a)$ может не равняться $g(a)h(a)$ по причине некоммутативности кольца R и «подкрутки» многочленов эндоморфизмом θ. Для нахождения значения произведения двух многочленов необходимо сначала перемножить их, чтобы произведение имело вид $f(t) = \sum\limits_i c_i t^i$, где все переменные записаны справа от коэффициентов, и лишь затем заменять каждое t^i на $N_{\theta,i}(a)$.

Следующая теорема, однако, до некоторой степени восстанавливает свойство гомоморфности.

Теорема 1 (теорема о произведении). *Пусть* $f, g \in R[t, \theta]$, $a \in R$.

1. *Если* $g(a) = 0$, *то* $(fg)(a) = 0$.
2. *Если* $g(a) \in J$, *то* $(fg)(a) \in J$.
3. *Если* $g(a) \in R^*$, *то* $(fg)(a) = f(g(a)^\theta a g(a)^{-1})g(a)$.

Лемма 1. *Обозначим* $N_i(a) = N_{\theta,i}(a)$. *Для произвольных* $a \in R$, $x \in R^*$ *и целых чисел* $i, j \geqslant 0$ *справедливы следующие равенства*:

1) $N_{i+j}(a) = N_j(a)^{\theta^i} N_i(a)$;
2) $N_i(x^\theta a x^{-1}) = x^{\theta^i} N_i(a) x^{-1}$.

Доказательство. Правая часть первого соотношения равна

$$\big(a^{\theta^{j-1}} \dots a^\theta a\big)^{\theta^i} \big(a^{\theta^{i-1}} \dots a^\theta a\big) = a^{\theta^{i+j-1}} \dots a^\theta a = N_{i+j}(a).$$

Левая часть второго соотношения равна

$$(x^\theta a x^{-1})^{\theta^{i-1}} \dots (x^\theta a x^{-1})^\theta (x^\theta a x^{-1}) = x^{\theta^i} \big(a^{\theta^{i-1}} \dots a^\theta a\big) x^{-1} = x^{\theta^i} N_i(a) x^{-1}. \quad \square$$

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$f(t) = \sum_i b_i t^i, \quad g(t) = \sum_j c_j t^j.$$

Тогда

$$(fg)(t) = \sum_{i,j} b_i c_j^{\theta^i} t^{i+j}.$$

В обозначениях леммы 1 имеем

$$(fg)(a) = \sum_{i,j} b_i c_j^{\theta^i} N_{i+j}(a) = \sum_{i,j} b_i c_j^{\theta^i} N_j(a)^{\theta^i} N_i(a) = \sum_{i,j} b_i \big(g(a)\big)^{\theta^i} N_i(a).$$

Если $g(a) = 0$ ($g(a) \in J$), то имеем $(fg)(a) = 0$ (соответственно $(fg)(a) \in J$). Если же $g(a) = x \in R^*$, то согласно лемме 1

$$(fg)(a) = \sum_{i,j} b_i N_i(x^\theta a x^{-1}) x = f(x^\theta a x^{-1}) x. \quad \square$$

Замечание. Утверждения пунктов 1 и 2 теоремы о произведении появлялись в работе А. В. Баранцева [1], и их доказательство приведено для полноты изложения.

Следующие три предложения также принадлежат А. В. Баранцеву, их доказательство основано на алгоритме деления в $R[t, \theta]$ (на многочлен с обратимым старшим коэффициентом) и теореме о произведении.

Теорема 2 (теорема об остатке [1]). *Пусть* $f(t) \in R[t, \theta]$, $a \in R$. *Тогда* $f(t) = q(t)(t - a) + f(a)$ *для некоторого* $q(t)$.

Следствие 1 (теорема Безу [1]).

$$f(a) = 0 \iff f(t) = g(t)(t-a).$$

Теорема 3 [1]. *Корни многочлена степени n лежат не более чем в n классах (θ, J)-сопряжённости.*

3. Алгебраичность конечных множеств

Возможны несколько вариантов обобщения понятия алгебраичности на случай локального кольца. Примем за основу нашей теории следующее определение.

Определение. Подмножество Δ локального кольца R будем называть θ-алгебраичным, если найдётся многочлен

$$f(t) = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0 \in R[t,\theta], \quad c_i \in R, \quad c_n \in R^*,$$

обращающийся в 0 на элементах Δ. Наименьшую степень n такого многочлена будем называть рангом множества Δ, приведённый многочлен наименьшей возможной степени будем называть минимальным для Δ.

Замечание. Мы требуем обратимости старшего коэффициента f, так что f автоматически ненулевой.

Замечание. Минимальный многочлен не единствен, но ранг θ-алгебраичного множества определён корректно.

В случае $\theta = \mathrm{id}_R$ будем говорить просто об алгебраичности, опуская префикс id_R.

Многочлен степени n над локальным кольцом может иметь больше чем n корней, что происходит по двум причинам: кольцо коэффициентов R некоммутативно и имеет ненулевой радикал. Известно, что в случае тела (например, если $R = \mathbb{H}$, $\theta = \mathrm{id}_{\mathbb{H}}$, $f(t) = t^2 + 1$) многочлен f, имеющий больше чем $n = \deg f$ корней, имеет бесконечно много корней (см., например, [6]). Для многочленов над локальным кольцом это утверждение перестаёт быть верным. Рассмотрим в качестве примера локальную алгебру

$$R = \mathrm{ST}_3(F) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ 0 & \lambda & * \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right\}$$

верхнетреугольных матриц с постоянной диагональю над конечным полем F, $\theta = \mathrm{id}$. Тогда J есть множество матриц с нулевой диагональю, $|J| = |F|^3$ и J — в точности множество корней многочлена $f(t) = t^3$ в R.

Основное отличие от теории многочленов над телом, конечно, определяется наличием в R необратимых элементов. Над телом каждое конечное множество из n элементов θ-алгебраично ранга не выше чем n (см. [7]). Подобное утверждение над локальным кольцом места не имеет, что проиллюстрируют два следующих примера.

Рассмотрим
$$R = \mathrm{ST}_3(F) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ 0 & \lambda & * \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right\}$$
над полем F, $\theta = \mathrm{id}_F$. Согласно теореме Безу условие того, что элементы a и $a+j$ являются корнями (приведённого) квадратного трёхчлена, имеет вид
$$f(t) = (t - A)(t - a) = (t - B)(t - a - j),$$
что влечёт
$$Aa = B(a + j), \quad A + a = B + a + j.$$
Таким образом,
$$ja = Bj.$$
Положив a и j равными соответственно
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
получим, что последнее уравнение на B не имеет решений. Этот пример показывает, что двухэлементное множество может не иметь аннулирующего его квадратного трёхчлена. Заметим, что в нашем кольце $J^3 = 0$ и элементы a и $a + j$ являются корнями многочлена $g(t) = t^3$.

Теперь мы модифицируем наш пример с целью показать, что двухэлементное подмножество локального кольца может не быть алгебраичным вообще.

Предложение 1. *Двухэлементное множество в локальном кольце не обязано быть алгебраичным.*

Доказательство. Пусть $\theta = \mathrm{id}_R$. Согласно теореме Безу условие того, что элементы $-a$ и $-b$ будут корнями приведённого многочлена степени n, имеет вид
$$(t^{n-1} + A_{n-2}t^{n-2} + \ldots + A_1 t + A_0)(t + a) = (t^{n-1} + B_{n-2}t^{n-2} + \ldots + B_0)(t + b).$$
Перемножим многочлены в обеих частях. Сравнение коэффициентов при каждом t^k приводит к системе на A_i и B_i:
$$\begin{cases} A_0 a = B_0 b, \\ A_1 a + A_0 = B_1 b + B_0, \\ \quad \ldots \\ A_{n-3}a + A_{n-4} = B_{n-3}b + B_{n-4}, \\ A_{n-2}a + A_{n-3} = B_{n-2}b + B_{n-3}, \\ A_{n-2} + a = B_{n-2} + b. \end{cases}$$

Будем «подниматься» по системе, выражая B_i из $(i+1)$-го уравнения и подставляя в i-е:

$$\begin{aligned}
&B_{n-2} = A_{n-2} + a - b,\\
&A_{n-2}a + A_{n-3} = A_{n-2}b + (a-b)b + B_{n-3},\\
&B_{n-3} = A_{n-2}(a-b) - (a-b)b + A_{n-3},\\
&A_{n-3}a + A_{n-4} = A_{n-2}(a-b)b - (a-b)b^2 + A_{n-3}b + B_{n-4}
\end{aligned}$$

и так далее. В конце мы получим равенство

$$(a-b)b^{n-1} + C_{n-2}(a-b)b^{n-2} + \ldots + C_1(a-b)b + C_0(a-b) = 0$$

для некоторых $C_i \in R$. Покажем, что это уравнение на C_i может не иметь решений в R. В этом случае исходная система также не будет иметь решений.

Рассмотрим

$$R = \mathrm{ST}_\infty(F) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & * & * & \ldots \\ 0 & \lambda & * & \ldots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \right\} \text{ —}$$

кольцо бесконечных вправо и вниз верхнетреугольных матриц над полем F, $\operatorname{char} F \neq 2$, с постоянной диагональю и конечным числом отличных от нуля элементов в каждой строке. Положим a и b равными соответственно

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$a - b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (a-b)b^k = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

с единственным ненулевым элементом, а именно 1 в $(k+2)$-м столбце. Получаем, что в нашем уравнении матрица $(a-b)b^{n-1}$ имеет ненулевой $(n+1)$-й столбец, тогда как у остальных матриц этот столбец нулевой. Таким образом, никакие $C_i \in R$ не удовлетворяют уравнению, и следовательно, множество $\{-a, -b\} \subseteq R$ не является $(\mathrm{id}_R$-)алгебраичным. $\square$

Следующее предложение показывает, что конечное множество в некотором смысле общего вида θ-алгебраично.

Предложение 2. *Множество $\Delta = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq R$, такое что $x_i - x_j \notin J$ при $i \neq j$, θ-алгебраично ранга не выше чем n.*

Доказательство. Достаточно найти приведённый многочлен f степени, не превосходящей n, обращающийся в 0 на элементах Δ. Проведём доказательство индукцией по n. База при $n = 1$, очевидно, верна. Если $n \geqslant 2$, то положим $f(t) = g(t)(t - x_n)$, где g требуется определить. Согласно теореме 1, для того чтобы f обращался в 0 на $\Delta \setminus \{x_n\}$, g должен обращаться в 0 на множестве

$$\Delta' = \{(x_i - x_n)^\theta x_i (x_i - x_n)^{-1} \colon i = 1, \ldots, n-1\}.$$

Так как $|\Delta'| \leqslant n - 1$, мы можем выбрать подходящий многочлен g степени $\deg g \leqslant n - 1$ в силу индуктивного предположения. □

4. Алгебраичность радикала

В случае тела интересен и важен вопрос об алгебраичности класса сопряжённости. По-видимому, наиболее общее утверждение здесь — теорема 5.4 работы [9], являющаяся обобщением классических теорем: теоремы 90 Гильберта и теоремы Веддерберна—Диксона. Для локальных колец естественно рассмотреть вопрос об алгебраичности радикала, являющегося одним из классов (θ, J)-сопряжённости.

Гипотеза 1. Радикал J локального кольца R θ-алгебраичен для некоторого эндоморфизма θ, такого что $\theta^k = I_u$ для некоторых $k \in \mathbb{N}$ и $u \in R^*$, тогда и только тогда, когда он является ниль-идеалом ограниченного индекса. Здесь I_u — внутренний автоморфизм R, переводящий a в uau^{-1}.

Достаточность очевидна, необходимость легко доказывается для случаев $\operatorname{rank} J = 2, 3, 4$ при условии $\operatorname{char} R/J = 0$. Полностью доказать это предположение пока, к сожалению, не удаётся.

Применив классическую теорему Нагаты—Хигмана (см., например, [2]), мы получим следствие 2.

Следствие 2. *Если R — локальная алгебра над полем F характеристики 0, то радикал J θ-алгебраичен для некоторого эндоморфизма θ, такого что $\theta^k = I_u$ для некоторых $k \in \mathbb{N}$ и $u \in R^*$, тогда и только тогда, когда он нильпотентен.*

Следующее предложение говорит в пользу нашей гипотезы.

Предложение 3. *Если R — локальное кольцо без делителей нуля с ненулевым радикалом J и элемент 2 обратим в R, то J не является θ-алгебраичным ни для какого сюръективного эндоморфизма θ.*

Доказательство. Допустим, что радикал J θ-алгебраичен, и пусть

$$f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 -$$

многочлен наименьшей степени, аннулирующий J. Поскольку 0 — корень f, $a_0 = 0$.

Для каждого $j \in J$ имеем

$$f(j) = j^{\theta^{n-1}} \ldots j^{\theta} j + a_{n-1} j^{\theta^{n-2}} \ldots j^{\theta} j + \ldots + a_2 j^{\theta} j + a_1 j = 0,$$
$$f(-j) = (-1)^n j^{\theta^{n-1}} \ldots j^{\theta} j + (-1)^{n-1} a_{n-1} j^{\theta^{n-2}} \ldots j^{\theta} j + \ldots + a_2 j^{\theta} j - a_1 j = 0.$$

Если n чётно, то многочлен

$$g(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} = t^n + a_{n-2} t^{n-2} + \ldots + a_2 t^2$$

обращается в 0 на J. Тогда

$$g(j) = j^{\theta^{n-1}} \ldots j^{\theta} j + a_{n-2} j^{\theta^{n-3}} \ldots j^{\theta} j + \ldots + a_2 j^{\theta} j = 0,$$
$$\big(j^{\theta^{n-1}} \ldots j^{\theta} + a_{n-2} j^{\theta^{n-3}} \ldots j^{\theta} + \ldots + a_2 j^{\theta}\big) j = 0,$$
$$h(j^{\theta}) j = 0, \quad \text{где} \quad h(t) = t^{n-1} + a_{n-2} t^{n-3} + \ldots + a_2 t.$$

Так как по условию R — область, получаем, что $h(j^{\theta}) = 0$. В силу сюръективности эндоморфизма θ $h(J) = 0$, что противоречит минимальности f.

В случае нечётного n рассматривается многочлен

$$g_1(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} = t^n + a_{n-2} t^{n-2} + \ldots + a_1 t,$$

и доказательство предложения проводится аналогично. □

Приведём пример, показывающий, что в гипотезе 1 нельзя отказаться от условий (по крайней мере сюръективности) на эндоморфизм θ. Рассмотрим в качестве R кольцо $\mathrm{ST}_{\infty}\big(\mathbb{F}_{p^n}\big)$ бесконечных вправо и вниз верхнетреугольных матриц над полем $\mathbb{F}_{p^n}$ с постоянной диагональю и конечным числом отличных от нуля элементов в каждой строке. В качестве эндоморфизма θ возьмём отображение, переводящее

$$\begin{pmatrix} \lambda & * & * & \ldots \\ 0 & \lambda & * & \ldots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

в

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \lambda & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Тогда согласно теореме 1 для каждого $a \in R$ будем иметь

$$\big((t^{p^n} - t)t\big)(a) = \big(t^{p^n} - t\big)(a^{\theta}) \cdot a = 0.$$

Таким образом, радикал J θ-алгебраичен, но, как легко видеть, не является ниль-идеалом ограниченного индекса.

Гипотеза 2. Если для некоторого $a \in R$ класс $\Delta^\theta(a)$ (θ, J)-сопряжённости элемента a θ-алгебраичен, то радикал J также θ-алгебраичен.

5. Разложения косых многочленов на множители

Основной результат этого раздела относится к многочлену

$$f(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0 \in R[t, \theta],$$

относительно которого мы предположим, что он имеет n корней $x_1, \ldots, x_n$, таких что $x_i - x_j \notin J$ при $i \neq j$.

Обозначим $I_n = \{1, \ldots, n\}$ и для каждого подмножества $A \subset I_n$ и $i \in I_n \setminus A$ определим элементы $x_{A,i} \in R$ индуктивно с помощью следующих соотношений (см. [5]):

$$\begin{cases} x_{\varnothing,i} = x_i, \\ x_{A\cup\{i\},j} + x^\theta_{A,i} = x_{A\cup\{j\},i} + x^\theta_{A,j}, \\ x_{A\cup\{i\},j} \cdot x_{A,i} = x_{A\cup\{j\},i} \cdot x_{A,j}. \end{cases}$$

Поскольку $x_i - x_j \notin J$ при $i \neq j$, эти соотношения определяют элементы $x_{A,i}$ единственным образом, например

$$x_{1,2} = (x_2 - x_1)^\theta x_2 (x_2 - x_1)^{-1}, \quad x_{2,1} = (x_1 - x_2)^\theta x_1 (x_1 - x_2)^{-1}.$$

Отметим аналогию последних соотношений с пунктом 3 теоремы 1. Эти элементы позволяют нам описать $n!$ разложений многочлена f.

Теорема 4. *Пусть многочлен*

$$f(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0 \in R[t, \theta]$$

имеет в R^* n корней $x_1, \ldots, x_n$, таких что $x_i - x_j \notin J$ при $i \neq j$. Тогда для любого упорядочивания $(i_1, \ldots, i_n)$ множества I_n имеет место разложение

$$f(t) = \big(t - x_{\{i_1,\ldots,i_{n-1}\},i_n}\big) \ldots \big(t - x_{i_1,i_2}\big)(t - x_{\varnothing,i_1}).$$

Доказательство. Проведём доказательство индукцией по n. База при $n = 1$ очевидна. Рассмотрим случай $n = 2$, который проиллюстрирует идею индуктивного перехода.

Имеем

$$f(t) = (t - a)(t - x_1) = (t - b)(t - x_2)$$

для некоторых $a, b \in R$. Согласно теореме 1 равенство $\big((t - a)(t - x_1)\big)(x_2) = 0$ в точности означает, что $(x_2 - x_1)^\theta x_2 (x_2 - x_1)^{-1}$ — корень $t - a$. Следовательно,

$$f(t) = (t - x_{1,2})(t - x_1) = (t - x_{2,1})(t - x_2),$$

где

$$x_{1,2} = (x_2 - x_1)^\theta x_2 (x_2 - x_1)^{-1}, \quad x_{2,1} = (x_1 - x_2)^\theta x_1 (x_1 - x_2)^{-1}.$$

Разность

$$x_{1,2} - x_{2,1} = \big((x_2 - x_1)^\theta x_2 + (x_1 - x_2)^\theta x_1\big)(x_2 - x_1)^{-1} = (x_2 - x_1)^\theta$$

и произведения

$$\begin{aligned} x_{1,2} \cdot x_1 &= (x_2 - x_1)^\theta x_2 (x_2 - x_1)^{-1} x_1 = (x_2 - x_1)^\theta (x_1^{-1}(x_2 - x_1) x_2^{-1})^{-1} = \\ &= (x_2 - x_1)^\theta (x_1^{-1} - x_2^{-1}), \\ x_{2,1} \cdot x_2 &= (x_1 - x_2)^\theta (x_2^{-1} - x_1^{-1}) = x_{1,2} \cdot x_1 \end{aligned}$$

выражают в точности соотношения перед теоремой 4, определяющие $x_{1,2}$ и $x_{2,1}$.

В общем случае доказательство проводится аналогично. □

Литература

[1] Баранцев А. В. Косые многочлены над локальными кольцами // Фундамент. и прикл. мат. — 1996. — Т. 2, вып. 4. — С. 1155—1162.

[2] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[3] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.

[4] Херстейн И. Некоммутативные кольца. — М.: Мир, 1972.

[5] Gelfand I., Retakh V., Wilson R. L. Quadratic linear algebras associated with factorizations of noncommutative polynomials and noncommutative differential polynomials // Selecta Math. (N. S.). — 2001. — Vol. 7. — P. 493—523.

[6] Lam T. Y. A First Course in Noncommutative Rings. — Berlin: Springer, 1991.

[7] Lam T. Y. A general theory of Vandermonde matrices // Exposition. Math. — 1986. — Vol. 4. — P. 193—215.

[8] Lam T. Y., Leroy A. Vandermonde and Wronskian matrices over division rings // J. Algebra. — 1988. — Vol. 119. — P. 308—336.

[9] Lam T. Y., Leroy A. Hilbert 90 theorems over division rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1994. — Vol. 345, no. 2. — P. 595—622.