Примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр

**А. А. МИХАЛЁВ, А. В. МИХАЛЁВ,
А. А. ЧЕПОВСКИЙ, К. ШАМПАНЬЕР**
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*

УДК 512.554

Ключевые слова: свободные неассоциативные алгебры, примитивные элементы, ранг системы элементов, автоморфизмы свободных алгебр.

Аннотация

Построены и реализованы усовершенствованные алгоритм дополнения примитивных систем элементов свободных неассоциативных алгебр до множеств свободных образующих и алгоритм реализации ранга системы элементов.

Abstract

A. A. Mikhalev, A. V. Mikhalev, A. A. Chepovskiy, K. Champagnier, Primitive elements of free nonassociative algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 5, pp. 171—192.

Improved algorithms to construct complements of primitive systems of elements of free nonassociative algebras with respect to free generating sets and algorithms to realize the rank of a system of elements are constructed and implemented.

1. Определения и предварительные результаты

Пусть F — поле, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество свободных порождающих, $\Gamma(X)$ — свободный группоид неассоциативных одночленов без единичного элемента в алфавите X: $X \subset \Gamma(X)$; если $u, v \in \Gamma(X)$, то $u \cdot v \in \Gamma(X)$, где $u \cdot v$ — формальное умножение неассоциативных мономов. Рассмотрим линейное пространство $F(X)$ над F с базисом, состоящим из 1 и элементов $\Gamma(X)$, где задано умножение
$$(\alpha a) \cdot (\beta b) = (\alpha\beta)(a \cdot b),$$
$\alpha, \beta \in F$, $a, b \in \Gamma(X)$. $F(X)$ — свободная неассоциативная алгебра. А. Г. Курош доказал [2], что подалгебры свободных неассоциативных алгебр свободны. Пусть $S = \{s_\alpha,\ \alpha \in I\}$ — подмножество элементов алгебры $F(X)$. Отображение $\omega\colon S \to S' \subset F(X)$ называется элементарным преобразованием множества S, если ω — невырожденное линейное преобразование множества S или существует такой элемент $\beta \in I$, что $\omega(s_\alpha) = s_\alpha$ для всех отличных от β

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 5, с. 171—192.
© 2007 *Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»*

элементов $\alpha \in I$ и $\omega(s_\beta) = s_\beta + f(\{s_\alpha \mid \alpha \neq \beta\})$, где f — элемент свободной неассоциативной алгебры от множества свободных образующих y_α (и совершена подстановка $y_\alpha = s_\alpha$). Ясно, что элементарные преобразования множеств свободных образующих свободной алгебры $F(X)$ индуцируют автоморфизмы алгебры $F(X)$. Такие автоморфизмы называются элементарными. Ж. Левин показал [9], что группа автоморфизмов свободной неассоциативной алгебры $F(X)$ конечного ранга (т. е. $|X| < \infty$) порождается элементарными автоморфизмами.

Пусть $A = F(X)$. Тогда универсальная мультипликативная обёртывающая алгебра $U(A)$ алгебры A — свободная ассоциативная алгебра с множеством свободных порождающих $\{r_w, l_w \mid w \in \Gamma(X)\}$ (см. [3]), где l_w и r_w — универсальные операторы умножения слева и справа соответственно:

$$b \cdot l_a = ab, \quad b \cdot r_a = ba.$$

П. М. Кон доказал [6—8] (см. также [10]), что свободная ассоциативная алгебра $F\langle Y\rangle$ является кольцом свободных идеалов, т. е. что левые (правые) идеалы свободной ассоциативной алгебры являются свободными левыми (соответственно правыми) $F\langle Y\rangle$-модулями единственного ранга. Из этого следует, что любой подмодуль левого (правого) $F\langle Y\rangle$-модуля является свободным.

Пусть I_A — свободный правый $U(A)$-модуль с базисом $y_1, \ldots, y_n$,

$$I_A = y_1 U(A) \oplus \ldots \oplus y_n U(A).$$

Линейное отображение $\mathcal{D}\colon A \to I_A$, заданное формулами

$$\mathcal{D}(x_i) = y_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$\mathcal{D}(ab) = \mathcal{D}(a) r_b + \mathcal{D}(b) l_a,$$

где $a, b \in A$, является универсальным дифференцированием алгебры A. Частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ элемента $f \in A$ однозначно определяются соотношением

$$\mathcal{D}(f) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Положим

$$\partial(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Из определения следует, что

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij},$$
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} r_v + \frac{\partial v}{\partial x_i} l_u, \quad u, v \in A.$$

Пусть C — подалгебра в A, J_C — подмодуль в I_A, порождённый элементами $\{\mathcal{D}(c) \mid c \in C\}$. Алгебра A обладает свойством дифференциальной отделимости для подалгебр, т. е. для любого элемента $a \in A$ имеем, что $a \in C$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}(a) \in J_C$ (см. [3]).

Пусть, к примеру, C — подалгебра в A, порождённая $x_1, \ldots, x_{n-1}$, и для некоторого элемента $a \in A$ выполнено

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = 0.$$

Тогда

$$\mathcal{D}(a) = y_1 \frac{\partial a}{\partial x_1} + \ldots + y_{n-1} \frac{\partial a}{\partial x_{n-1}} \in J_C.$$

Из свойства дифференциальной отделимости следует, что элемент a не зависит от x_n.

Система элементов алгебры A называется примитивной, если она является подмножеством некоторой системы свободных порождающих в A. Рангом множества $H \subset A$ (обозначение $\mathrm{rank}(H)$) называется минимальное число порождающих из X, от которого может зависеть образ $\varphi(H)$ при автоморфизме $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$.

Пусть $\mathbb{Z}_+ = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geqslant 0\}$, $\mathbb{Q}_+ = \{\alpha \in \mathbb{Q} \mid \alpha \geqslant 0\}$. Будем говорить, что одночлен $w \in \Gamma(X)$ имеет мультистепень $m(w) = (k_1, \ldots, k_n)$, если каждый из порождающих $x_1, \ldots, x_n$ встречается в w ровно k_i раз. Линейное отображение $\mu\colon \mathbb{Z}_+^n \to \mathbb{Q}_+$ называется функционалом, если $\mu(s) \neq 0$ для любого ненулевого $s \in \mathbb{Z}_+^n$. Для $w \in \Gamma(X)$ нам понадобится также понятие μ-степени: $\mu(w) = \mu\bigl(m(w)\bigr)$. Далее, $\mu(l_w) = \mu(r_w) = \mu(w)$, а для $g = t_{w_1} \ldots t_{w_k}$, где t_{w_i} — это либо l_{w_i}, либо r_{w_i}, $w_i \in \Gamma(X)$, полагается $\mu(g) = \mu(w_1) + \ldots + \mu(w_k)$. Будем говорить, что элемент алгебры A или алгебры $U(A)$ μ-однородный, если μ-степень всех его одночленов одна и та же.

Эндоморфизм φ алгебры A называется μ-однородным, если элементы $\varphi(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, являются μ-однородными и $\mu\bigl(\varphi(x_i)\bigr) = \mu(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

А. А. Михалёв и А. А. Золотых рассмотрели [1, 13] орбиты элементов свободных цветных (p-)супералгебр Ли при действии группы автоморфизмов. Были получены эффективный матричный критерий примитивности системы элементов и алгоритм нахождения ранга системы. Был также найден алгоритм, реализующий ранг системы.

А. А. Михалёв, У. У. Умирбаев и Дж.-Т. Ю с использованием свободного дифференциального исчисления получили [12] матричные критерии примитивности системы элементов и критерий того, имеет ли система заданный ранг.

К. Шампаньер построила [4] алгоритмы реализации ранга системы элементов и дополнения примитивной системы элементов до множества свободных образующих свободной неассоциативной алгебры (свободной (анти)коммутативной неассоциативной алгебры).

Данная работа является продолжением исследований, начатых в работах [4, 12]. Основным результатом является построение и реализация усовершенствованных алгоритма дополнения примитивной системы элементов свободной неассоциативной алгебры до множества свободных образующих и алгоритма реализации ранга системы элементов.

Нам понадобятся следующие результаты из [12].

Лемма 1 [12]. *Пусть $a \in A$, элементы $u_1, \ldots, u_l$ алгебры $U(A)$ независимы слева над $U(A)$ и не зависят от x_n,*

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{k} m_i u_i,$$

$m_1, \ldots, m_k \in U(A)$. Тогда

$$m_i \in \frac{\partial}{\partial x_n}(A), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Лемма 2 [12]. *Пусть a — μ-однородный элемент алгебры A и $k < n$. Предположим, что существуют такие μ-однородные элементы $m_1, \ldots, m_k$ алгебры $U(A)$, что $\mu(m_i) = \mu(x_i) - \mu(x_n)$ для $i \leqslant k$ и*

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{k} m_i \frac{\partial a}{\partial x_i}.$$

Пусть φ — μ-однородный автоморфизм алгебры A. Тогда найдутся такие μ-однородные элементы $m'_1, \ldots, m'_k$ алгебры $U(A)$, что $\mu(m'_i) = \mu(x'_i) - \mu(x'_n)$ для $i \leqslant k$ и

$$\frac{\partial \varphi(a)}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{k} m'_i \frac{\partial \varphi(a)}{\partial x_i}.$$

Теорема 1 [12]. *Ранг элемента a алгебры A равен рангу левого модуля M_a свободной ассоциативной алгебры $U(A)$, порождённого элементами $\frac{\partial a}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$.*

Теорема 2 [12]. *Ранг системы элементов $a_1, \ldots, a_r$ алгебры A равен рангу левого $U(A)$-модуля $M_{(a_1,\ldots,a_r)}$, порождённого элементами $\sum\limits_{i=1}^{r} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} e_i$, $j = 1, \ldots, n$, где e_i — строка с i-й координатой, равной 1, и остальными координатами, равными нулю.*

Теорема 3 [12]. *Система элементов $a_1, \ldots, a_r$ алгебры A примитивна тогда и только тогда, когда матрица*

$$\bigl(\partial(a_1) \quad \ldots \quad \partial(a_r)\bigr)$$

обратима слева над $U(A)$.

2. μ-однородный случай

Алгоритм A (алгоритм реализации ранга однородного элемента)

Пусть μ — функционал и a — μ-однородный элемент алгебры A. Построим такой μ-однородный автоморфизм φ алгебры A, что элемент $\varphi(a)$ зависит от $k = \operatorname{rank}(a)$ порождающих из X.

Предположим, что элемент a зависит более чем от k порождающих из X (иначе $\varphi = \mathrm{id}$) и что у нас есть искомый алгоритм для любого a', зависящего от меньшего числа порождающих, чем a (алгоритм рекурсивный).

Ранг левого модуля M_a равен k, но элемент a зависит от большего числа порождающих, следовательно, для некоторого $x_j \in X$

$$0 \neq \frac{\partial a}{\partial x_j} = \sum_{i \neq j} m_i \frac{\partial a}{\partial x_i}, \quad m_i \in U(A), \quad \mu(m_i) = \mu(x_i) - \mu(x_j).$$

Будем считать, что $j = n$:

$$0 \neq \frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \frac{\partial a}{\partial x_i}.$$

Рассмотрим $a^{(0)}$, где $a^{(s)}$ — однородная по x_n компонента элемента a степени s по x_n. Компонента $a^{(0)}$ не зависит от x_n, следовательно, по нашему предположению мы можем построить такой μ-однородный автоморфизм φ', что элемент $\varphi'\bigl(a^{(0)}\bigr)$ зависит от $l = \operatorname{rank}\bigl(a^{(0)}\bigr)$ порождающих из X. Так как $a^{(0)}$ не зависит от x_n, можно считать, что φ' — автоморфизм подалгебры, порождённой элементами $x_1, \ldots, x_{n-1}$, и $\varphi'(x_n) = x_n$. Следовательно, $\varphi'\bigl(a^{(0)}\bigr) = \bigl(\varphi'(a)\bigr)^{(0)}$.

Элемент $\varphi'\bigl(a^{(0)}\bigr)$ зависит от l порождающих, и его частные производные по ним независимы слева, так как $\operatorname{rank} M_{\varphi'(a^{(0)})} = l$. Поэтому мы можем считать, что элементы

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \varphi'(a)^{(0)}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_l} \varphi'(a)^{(0)}$$

независимы слева и

$$\frac{\partial}{\partial x_{l+1}} \bigl(\varphi'(a)\bigr)^{(0)} = \ldots = \frac{\partial}{\partial x_n} \bigl(\varphi'(a)\bigr)^{(0)} = 0.$$

По лемме 2

$$\frac{\partial \varphi'(a)}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} m_i' \frac{\partial \varphi'(a)}{\partial x_i}.$$

Мы построим такой μ-однородный автоморфизм φ'', что элемент $\varphi''\bigl(\varphi'(a)\bigr)$ не зависит от x_n. По нашему предположению у нас есть алгоритм построения такого автоморфизма φ''', что элемент $\varphi'''\varphi''\varphi'(a)$ зависит от k порождающих. Тогда $\varphi = \varphi'''\varphi''\varphi'$.

После переобозначения $\varphi'(a)$ как a наша цель — построить такой μ-однородный автоморфизм φ'', что элемент $\varphi''(a)$ не зависит от x_n, имея следующие соотношения:

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \frac{\partial a}{\partial x_i}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial (a)^{(0)}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial (a)^{(0)}}{\partial x_l} \text{ независимы слева,} \tag{2}$$

$$\frac{\partial (a)^{(0)}}{\partial x_{l+1}} = \ldots = \frac{\partial (a)^{(0)}}{\partial x_n} = 0. \tag{3}$$

Мы построим такие μ-однородные автоморфизмы $\varphi_1, \ldots, \varphi_s, \ldots$ и элементы $a_0, \ldots, a_s, \ldots$, что

$$\begin{aligned} &a_0 = a, \\ &a_s = \varphi_s(a_{s-1}), \\ &a_s^{(1)} = \ldots = a_s^{(s)} = 0, \\ &a_s^{(0)} = a_{s-1}^{(0)} = \ldots = a^{(0)}. \end{aligned}$$

Тогда элемент a_s зависит от x_n, только если существует $r > s$, такое что элемент $a_s^{(r)}$ зависит от x_n, и, таким образом, $r\mu(x_n) \leqslant \mu(a_s) = \mu(a)$. Но если $s > \mu(a)/\mu(x_n)$, то для всех $r > s$ получим $r > s > \mu(a)/\mu(x_n)$. Следовательно, для $s > \mu(a)/\mu(x_n)$ (или раньше) элемент $\varphi_s \ldots \varphi_1(a)$ не зависит от x_n. Положим $\varphi'' = \varphi_s \ldots \varphi_1$.

Теперь строим φ_s. По лемме 2 элемент a_{s-1} удовлетворяет условию (1) (возможно, для других $m_1, \ldots, m_{n-1}$). Поэтому, как показано в [12, лемма 11],

$$\frac{\partial}{x_n}\left(a_{s-1}^{(s)}\right) = \sum_{i=1}^{l} m_i^{(s-1)} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{s-1}^{(0)}\right).$$

По лемме 1 $m_i^{(s-1)} = \frac{\partial g_i}{\partial x_n}$ для некоторых $g_1, \ldots, g_l \in A$, $\mu(g_i) = \mu(x_i)$. Положим

$$\varphi_s(x_i) = \begin{cases} x_i - g_i, & i = 1, \ldots, l, \\ x_i, & i = l+1, \ldots, n. \end{cases}$$

По [12, лемма 11] φ_s — искомый автоморфизм.

3. Общий случай

Обозначим μ-однородную компоненту элемента a алгебры A (или алгебры $U(A)$) с μ-степенью α через $\rho_\mu^\alpha(a)$. Будем говорить, что элемент a μ-ограничен, если $\rho_\mu^\alpha(a) = 0$ для любого $\alpha > 1$.

Пусть $V(\mu) = \{m \in \mathbb{Z}_+^n \mid \mu(m) \leqslant 1\}$. Нам потребуется следующий частичный порядок на множестве функционалов: $\mu_1 \prec \mu_2$, если $V(\mu_1) \subset V(\mu_2)$ и $V(\mu_1) \neq V(\mu_2)$.

Алгоритм Б (алгоритм реализации ранга элемента)

Пусть $a \in A$. Построим такой автоморфизм φ алгебры A, что элемент $\varphi(a)$ зависит от $k = \mathrm{rank}(a)$ порождающих из X.

Мы положим $\varphi = \varphi_r \dots \varphi_1$, определив элементы $a_0, \dots, a_r$, функционалы $\mu_0, \dots, \mu_r$ и автоморфизмы $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ алгебры A следующим образом:

$$a_0 = a,$$
$$\mu_0(x_i) = \frac{1}{d(a)},\ i = 1, \dots, n,$$
$$a_s = \varphi_s(a_{s-1}),$$
$$\varphi_s \text{ является } \mu_s\text{-однородным},$$
$$a_s \text{ является } \mu_s\text{-ограниченным}.$$

Теперь строим φ_s. Пусть $a'_{s-1} = \rho^1_{\mu_{s-1}}(a_{s-1})$. Возможны два случая.

1. Если элементы a'_{s-1} и a_{s-1} зависят от одного и того же набора порождающих, то мы полагаем $\mu_s = \mu_{s-1}$ и, используя предыдущий алгоритм, строим μ_s-однородный автоморфизм φ_s алгебры A, такой что элемент $\varphi_s(a'_{s-1})$ зависит от $\mathrm{rank}(a'_{s-1})$ порождающих.

2. Пусть для некоторого $x_j \in X$ элемент a_{s-1} зависит от x_j, а элемент a'_{s-1} от него не зависит. Тогда положим $\varphi_s = \mathrm{id}$ и

$$\mu_s(x_i) = \mu_{s-1}(x_i) \quad \text{для} \quad i \neq j,$$
$$\mu_s(x_j) = \mu_{s-1}(x_j) + t,$$

выбирая максимальное t, при котором элемент a_s является μ_s-ограниченным.

Доказательство. Мы можем считать, что элемент a_{s-1} зависит от всех образующих $x_1, \dots, x_n$. После нескольких шагов второго типа элемент a'_{s-1} тоже будет зависеть от всех $x_1, \dots, x_n$. Тогда $\mu_s = \mu_{s-1}$ и $\varphi_s(a'_{s-1}) = a'_s$ зависит от $\mathrm{rank}(a'_{s-1}) \leqslant \mathrm{rank}(a_{s-1}) = \mathrm{rank}(a)$ порождающих. Таким образом, если элемент a'_s зависит от всех $x_1, \dots, x_n$, то задача решена, и алгоритм можно остановить на $r = s$.

Если же элемент a'_s не зависит от x_n, то возможны ещё два случая.

а) Элемент a_s зависит от x_n. Тогда $\mu_{s+1}(x_n) = \mu_s(x_n) + t$ и, следовательно, $V(\mu_{s+1}) \subset V(\mu_s)$. С другой стороны, $\mu_s(a'_{s-1}) = \mu_{s-1}(a'_{s-1}) = 1$ и a'_{s-1} зависит от x_n, следовательно, для некоторого слова $w \in \Gamma(X)$, содержащегося в a'_{s-1}, имеем $\mu_{s+1}(w) > 1$. Значит, $\mu_{s+1} \prec \mu_s$.

б) Элемент a_s не зависит от x_n.

Мы видим, что после этой последовательности шагов уменьшается либо $|V(\mu_s)|$, либо число порождающих, от которых зависит элемент a_s. Таким образом, после конечного числа шагов либо элемент a_s будет зависеть от $\mathrm{rank}(a)$

порождающих, либо мы получим $|V(\mu_s)| = 1$, т. е. $V(\mu_s) = \{(0,\ldots,0)\}$. В этом случае $a_s \in F$, $\mathrm{rank}(a) = 0$, так как элемент a_s μ_s-ограничен.

Алгоритм В (алгоритм реализации ранга системы элементов)

Пусть $a_1,\ldots,a_r \in A$. Построим такой автоморфизм φ алгебры A, что система элементов $\{\varphi(a_1),\ldots,\varphi(a_r)\}$ зависит от $k = \mathrm{rank}(\{a_1,\ldots,a_r\})$ порождающих из X. Если элементы $a_1,\ldots,a_r$ линейно зависимы, то достаточно построить автоморфизм φ для максимального линейно независимого подмножества, поэтому считаем, что $a_1,\ldots,a_r$ линейно независимы.

Пусть $Y = \{y_1,\ldots,y_r\}$, $b = a_1y_1 + \ldots + a_ry_r$. Используя предыдущий алгоритм, строим такой автоморфизм φ, что элемент $\varphi(b)$ зависит от $\mathrm{rank}(b)$ порождающих из $X \cup Y$. Тогда φ — искомый автоморфизм.

Доказательство. Мы можем считать, что элементы $a_1,\ldots,a_r$ зависят от всех $x_1,\ldots,x_n$. Следуя алгоритму Б, мы строим такой автоморфизм φ_{i_1}, что элемент $\varphi_{i_1}(b')$ зависит от $\mathrm{rank}(b')$ порождающих, где b' — сумма некоторой части членов многочлена b, зависящая от всех элементов из $X \cup Y$: $b' = a_1'y_1 + \ldots + a_r'y_r$, где a_i' — часть от a_i, $i = 1,\ldots,r$.

Теперь если $\mathrm{rank}\, M(a_1',\ldots,a_r') = n$, то по теореме 2 $\mathrm{rank}(b') = n + r$ и $\varphi_{i_1} = \mathrm{id}$ (опять можно считать, что элементы $a_1',\ldots,a_r'$ линейно независимы).

Если же $\mathrm{rank}\, M(a_1',\ldots,a_r') < n$, то можно считать, что

$$\varepsilon_n = \sum_{j=1}^{n-1} m_j\varepsilon_j, \quad \text{где} \quad \varepsilon_j = \left(\frac{\partial a_1'}{\partial x_j},\ldots,\frac{\partial a_r'}{\partial x_j}\right),$$

$m_j \in U(A)$, $j = 1,\ldots,n$, т. е.

$$\frac{\partial a_i'}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{\partial a_i'}{\partial x_j}, \quad i = 1,\ldots,r,$$

и

$$\frac{\partial b'}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial a_i'}{\partial x_n} r_{y_i} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{\partial a_i'}{\partial x_j} r_{y_i} = \sum_{j=1}^{n-1} m_j \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial a_i'}{\partial x_j} r_{y_i} = \\ = \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{\partial b'}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{\partial b'}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{r} 0 \frac{\partial b'}{\partial y_i}.$$

В соответствии с алгоритмом А мы строим автоморфизмы φ_{i_1} следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{i_1}(x_i) = x_i && \text{для некоторых } i,\\
&\varphi_{i_1}(x_i) = x_i - g_i && \text{для остальных } i, \text{ где } \frac{\partial g_i}{\partial x_n} = m_i',\ m_i' \text{ — часть от } m_i,\\
&\varphi_{i_1}(y_j) = y_j, && j = 1,\ldots,r.
\end{aligned}$$

Все m_i принадлежат $U(A)$, поэтому все $\varphi_{i_1}(x_i)$ принадлежат A, все $\varphi_{i_1}(a_j)$ принадлежат A и

$$\varphi_{i_1}(b) = \varphi_{i_1}(a_1)y_1 + \ldots + \varphi_{i_1}(a_r)y_r.$$

После завершения работы алгоритма будем иметь

$$\varphi(b) = \varphi(a_1)y_1 + \ldots + \varphi(a_r)y_r,$$

$\varphi(a_j) \in A$, $j = 1, \ldots, r$. Как показано в теореме 2, $\operatorname{rank}(b) = k+r$. Поскольку элемент $\varphi(b)$ зависит от $y_1, \ldots, y_r$, множество $\{\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_r)\}$ должно зависеть от k порождающих.

Алгоритм Г (вспомогательный алгоритм)

Пусть $\{a_1, \ldots, a_r\} \subset A$ — примитивная система элементов. Построим такой автоморфизм φ алгебры A, что $\varphi(a_i) \in X$, $i = 1, \ldots, r$, предполагая, что у нас есть такой автоморфизм для любой примитивной системы, состоящей менее чем из r элементов (алгоритм рекурсивный).

Используя алгоритм В, построим такой автоморфизм φ_1, что множество $\{\varphi_1(a_1), \ldots, \varphi_1(a_r)\}$ зависит от $\operatorname{rank}(\{a_1, \ldots, a_r\})$ порождающих из X. Можно считать, что элементы $\varphi_1(a_1), \ldots, \varphi_1(a_r)$ зависят от $x_1, \ldots, x_r$.

По нашему рекурсивному предположению мы можем построить такой автоморфизм φ_2, что $\varphi_2\big(\varphi_1(a_i)\big) = x_i$, $i = 1, \ldots, r-1$. Тогда $\varphi_2\big(\varphi_1(a_r)\big) = \alpha x_r + g$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \in F$, элемент g не зависит от x_r. Пусть теперь

$$\varphi_3(x_i) = x_i \quad \text{для } i \neq r,$$
$$\varphi_3(x_r) = \frac{1}{\alpha}(x_r - g).$$

Наконец, $\varphi = \varphi_3\varphi_2\varphi_1$.

Доказательство. Единственное, что требует доказательства, это то, что $\varphi_2\big(\varphi_1(a_r)\big) = \alpha x_r + g$. По теореме 3 для $a = \varphi_2\big(\varphi_1(a_r)\big)$ матрица

$$B = \big(\partial(x_1) \quad \ldots \quad \partial(x_{r-1}) \quad \partial(a)\big) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & \frac{\partial a}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & \frac{\partial a}{\partial x_r} \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial a}{\partial x_{r+1}} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial a}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

обратима слева над $U(A)$, так как система $\{x_1, \ldots, x_{r-1}, a\}$ примитивна.

Пусть $CB = \mathrm{id}$. Тогда для всех $j < r$ имеем

$$0 = (CB)_{rj} = \sum_{i=1}^{n} c_{ri} b_{ij} = c_{rj} b_{jj} = c_{rj},$$

т. е. $c_{rj} = 0$, $j = 1, \ldots, r-1$. В то же время

$$1 = (CB)_{rr} = \sum_{j=1}^{n} c_{rj} b_{jr} = c_{rr} b_{rr} = c_{rr} \frac{\partial a}{\partial x_r}.$$

Следовательно, элемент $\frac{\partial a}{\partial x_r}$ обратим слева над $U(A)$. Значит, $\frac{\partial a}{\partial x_r} \in F$ и $a = \alpha x_r + g$, где $\alpha = \frac{\partial a}{\partial x_r}$ и элемент g не зависит от x_r.

Алгоритм Д (алгоритм дополнения примитивной системы элементов до множества свободных образующих)

Пусть $\{a_1, \ldots, a_r\} \subset A$ — примитивная система элементов. Построим такое множество $\{a_{r+1}, \ldots, a_n\} \subset A$, что $\{a_1, \ldots, a_n\}$ — множество свободных образующих алгебры A.

Используя алгоритм Г, построим автоморфизм φ алгебры A, такой что $\varphi(a_i) = x_i$, $i = 1, \ldots, r$. φ — суперпозиция автоморфизмов, описанных в предыдущих алгоритмах. Так как все они легко обратимы, то мы можем построить φ^{-1}. Тогда $a_j = \varphi^{-1}(x_j)$, $j = r+1, \ldots, n$.

4. Техническое описание

Реализованы алгоритм по проверке примитивности элемента свободной неассоциативной алгебры $A = F(X)$ (алгоритм 1), вспомогательный алгоритм для ω-однородного элемента алгебры A (алгоритм 2, реализация алгоритма Б), алгоритм, дополняющий систему примитивных элементов до множества свободных образующих алгебры A (алгоритм 3, реализация алгоритма Д). Использовался язык C++.

Элементы свободного группоида неассоциативных мономов $\Gamma(X)$ реализованы как бинарные деревья. Это позволяет легко производить умножение в A и такие операции, как свободное дифференцирование $\mathcal{D}$. Элементы свободной неассоциативной алгебры A представляют собой массивы, элементы которых — бинарные деревья. Покажем, как выглядят элементы и умножение в $\Gamma(X)$.

Класс неассоциативных одночленов из $F(X)$ (линейного пространства над полем F с базисом, состоящим из 1 и элементов $\Gamma(X)$) имеет два члена: koef — коэффициент из поля F (взято поле $\mathbb{Q}$) и указатель root на узел дерева—корень одночлена. Сам узел состоит из двух указателей на левого и правого сына, булевой переменной—флага наличия/отсутствия в узле данных и элемента $x_k \in X$, если он присутствует в данном узле (рис. 1).

Рассмотрим более наглядно реализацию элементов на следующем примере. Пусть даны элементы αx_1 и $\beta x_1 x_2$ (рис. 2). Перемножим их: $\alpha x_1 \cdot \beta x_1 x_2 = \alpha\beta x_1(x_1 x_2)$ (рис. 3).

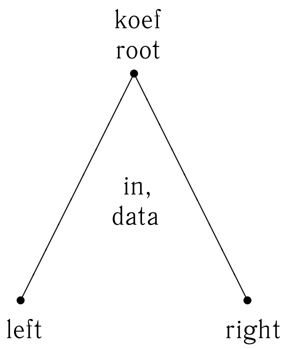

Рис. 1. Элемент из $F(X)$

Операторы умножения слева и справа, r_w и l_w соответственно, являющиеся свободными порождающими универсальной мультипликативной обертывающей $U(A)$ алгебры A, реализованы как класс, состоящий из булевой переменной—флага правого/левого умножения и одночлена $w \in \Gamma(X)$. Класс ассоциативных одночленов из $U(A)$ состоит из koef — коэффициента из поля F (взято поле $\mathbb{Q}$), целого числа len — длины одночлена и массива tws (длины len) операторов умножения. Многочлены из ассоциативной алгебры $U(A)$ представляют собой массивы одночленов. Элементы из I_A реализованы как массивы фиксированной длины n, состоящие из многочленов ассоциативной алгебры.

Опишем реализацию универсального дифференцирования алгебры A. Это рекурсивный алгоритм. Дифференцирование линейно. Опишем его для одночлена. Для ненулевого узла он проверяет флаг узла на наличие данных. В слу-

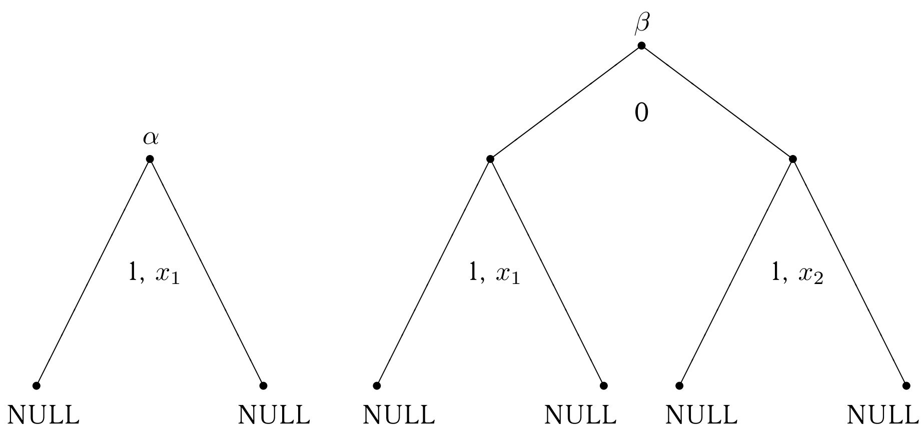

Рис. 2. Элементы αx_1 и $\beta x_1 x_2$

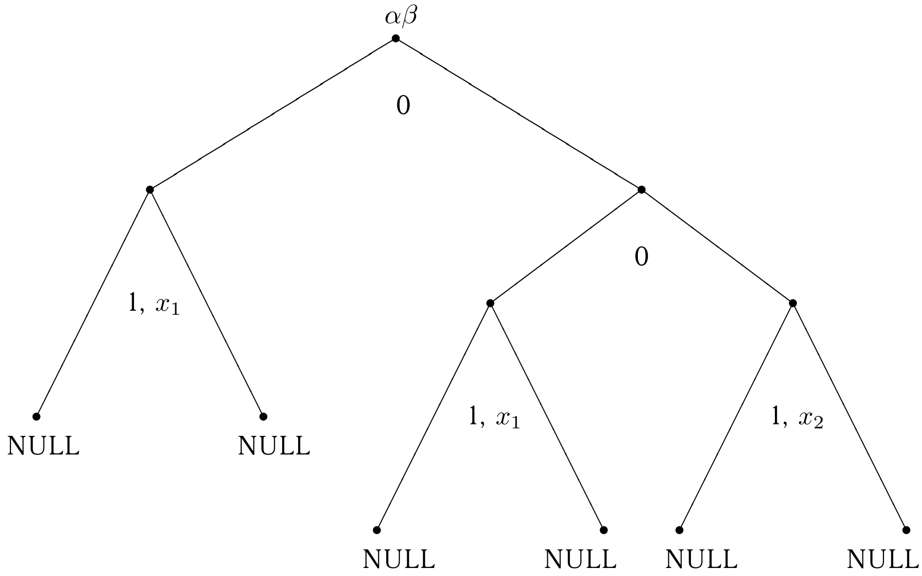

Рис. 3. Элемент $\alpha\beta x_1(x_1x_2)$

чае если узел пустой, алгоритм вызывает себя для его левого сына, получая тем самым некоторый элемент $\mathcal{D}(v)$ — результат дифференцирования левой части, создаёт оператор умножения r_w на моном w, содержащийся в правом сыне. Далее перемножает $\mathcal{D}(v)$ и r_w. Сохраняет результат, вызывает себя для правого сына, получает $\mathcal{D}(w)$ — результат дифференцирования правой части, создаёт оператор умножения l_v на моном v, содержащийся в левом сыне. Возвращает результат дифференцирования: $\mathcal{D}(v)\cdot r_w+\mathcal{D}(w)\cdot l_v$. Если этот узел не пуст, то он содержит некоторый x_k, поэтому алгоритм возвращает в этом случае y_k. Ниже приводится наглядная иллюстрация.

<u>Дифференцирование текущего узла:</u>

- <u>Если узел ненулевой:</u>
  - <u>Если узел пустой:</u>
    - Вызвать дифференцирование левого сына.
    - Результат умножить на r_w,
    - где w — моном, отвечающий правой части.
    - Вызвать дифференцирование правого сына.
    - Результат умножить на r_v,
    - где v — моном, отвечающий левой части.
    - Возвратить сумму.
  - <u>Если узел непустой:</u>
    - Возвратить y_k.

Далее представлены более подробные описания алгоритмов 1—3 и подробные результаты работы алгоритмов 1 и 3, применённых к элементу

$$h = \frac{5}{3}x_2x_1 + \frac{6}{7}x_2\big((x_2x_2)x_3\big) + \frac{50}{21}(x_3x_1)x_1 + \frac{60}{49}(x_3x_1)\big((x_2x_2)x_3\big) + \\ + \frac{60}{49}\big(x_3\big((x_2x_2)x_3\big)\big)x_1 + \frac{216}{343}\big(x_3\big((x_2x_2)x_3\big)\big)\big((x_2x_2)x_3\big) + \frac{6}{7}x_3.$$

5. Описание алгоритма 1

Пусть h — элемент алгебры A. Опишем алгоритм, позволяющий решить, является ли h примитивным элементом. Сначала вычисляются частные производные элемента h. Далее проверяется, совпадает ли канонический базис левого идеала A, порождённого частными производными $\frac{\partial h}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_n}$, с $\{1\}$.

Алгоритм 1.

Вход:	множество свободных образующих $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и h — элемент алгебры A.
Выход:	1 («да»), если h является примитивным элементом, и 0 («нет») иначе.
Шаг 1:	вычислить частные производные элемента h: $u_i = \frac{\partial h}{\partial x_i}$.
Шаг 2:	поиск канонического базиса левого идеала A, порождённого $u_i (i = 1, \ldots, n)$.
Шаг 2.1:	положить $M = \{u_1, \ldots, u_n\}$.
Шаг 2.2:	если M содержит элемент 0, то удалить его из M.
Шаг 2.3:	если M содержит ненулевую константу среди элементов u_i, то элемент h примитивный. Выдать «да», выйти из алгоритма. (Если M содержит ненулевую константу, то остальные элементы M будут редуцированы ей и получится $M = \{1\}$.)
Шаг 2.4:	если M содержит такие элементы u_k и u_l, что $u_k^\circ = \alpha w u_l^\circ$ для некоторого (может быть, пустого) слова w, то заменить элемент u_k на $u_k - \alpha w u_l$. Перейти к шагу 2.2. Если таких элементов нет, то элемент h не является примитивным. Выдать «нет», выйти из алгоритма.

6. Описание алгоритма 2

Если h — ω-однородный элемент алгебры A и имеется нетривиальная левая зависимость между частными производными h, то существует такой автоморфизм φ алгебры A, что элемент $\varphi(h)$ зависит от меньшего числа переменных, чем h. В этом разделе приведён алгоритм для нахождения такого автоморфизма φ.

Алгоритм 2.

Вход: множество свободных порождающих $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, ω-однородный элемент $h \in A$ и ω-однородные элементы $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n \in U(A)$, удовлетворяющие ω-однородному соотношению $\frac{\partial h}{\partial x_k} = \sum\limits_{i=k,\ i\neq k}^{n} a_i \frac{\partial h}{\partial x_i}$.

Выход: автоморфизм φ алгебры A, такой что $\varphi(h)$ не зависит от x_k, и обратный к нему автоморфизм φ^{-1}.

Шаг 1: положить автоморфизмы φ, ψ равными тождественному автоморфизму id алгебры A.

Шаг 2: если элемент h не зависит от x_k, то искомые автоморфизмы φ, $\varphi^{-1} = \psi$ найдены. Выйти из алгоритма.

Шаг 3: вычислить элемент $h_0 = \zeta_k^0(h)$, т. е. компоненту h степени 0 относительно переменной x_k.

Шаг 4: задать $X_0 = \{y_1, \ldots, y_t\} \subseteq X$ — подмножество всех переменных, от которых зависит h_0.

Шаг 5: положить $l = 1$.

Шаг 6: Если $l > t$, то перейти к шагу 12.

Шаг 7: найти такие ω-однородные элементы $d_i \in A$, $i \neq l$, $1 \leqslant i \leqslant t$, что $\frac{\partial h_0}{\partial y_l} = \sum\limits_{j=1,\ j\neq l}^{t} d_j \frac{\partial h_0}{\partial y_j}$ (см. шаг 10 алгоритма 3).

Шаг 8: если d_j не существуют, то увеличить l на 1 и перейти к шагу 6.

Шаг 9: используя алгоритм 2, найти такой автоморфизм θ, что $\theta(h_0)$ не зависит от y_l, и найти обратный к нему автоморфизм θ^{-1} (элемент h_0 зависит от меньшего числа порождающих, чем h, поэтому рекурсивное использование алгоритма не приводит к «зацикливанию»).

Шаг 10: найти такие ω-однородные элементы $a_i \in A$, $i \neq k$, $1 \leqslant i \leqslant n$, что $\frac{\partial \theta(h)}{\partial x_k} = \sum\limits_{i=1,\ i\neq k}^{n} a_i \frac{\partial \theta(h)}{\partial x_i}$ (см. шаг 10 алгоритма 3).

Шаг 11: заменить автоморфизм φ на $\theta \cdot \varphi$, заменить ψ на $\psi \cdot \theta^{-1}$, заменить h на $\theta(h)$ и перейти к шагу 2.

Шаг 12: для минимального i, такого что $x_i \in X_0$ и $\zeta_k^0(a_i) \neq 0$, вычислить элемент $b_i = \zeta_k^0(a_i) \in U(A)$.

<u>Шаг 13:</u> найти такой элемент $g_i \in A$, что $\frac{\partial g_i}{\partial x_k} = b_i$ и все одночлены в g_i зависят от x_k.

<u>Шаг 14:</u> задать автоморфизмы θ_1, θ_2 алгебры A: $\theta_1(x_j) = \theta_2(x_j) = x_j$ для всех $x_j \neq x_i$ и $\theta_1(x_i) = x_i + g_i$, $\theta_2(x_i) = x_i - g_i$.

<u>Шаг 15:</u> найти такие ω-однородные элементы $a_i \in A$, $i \neq k$, $1 \leqslant i \leqslant n$, что $\frac{\partial \theta_2(h)}{\partial x_k} = \sum\limits_{i=1,\ i\neq k}^{n} a_i \frac{\partial \theta_2(h)}{\partial x_i}$ (см. шаг 10 алгоритма 3).

<u>Шаг 16:</u> заменить автоморфизм φ на $\theta_2 \cdot \varphi$, заменить ψ на $\psi \cdot \theta_1$, заменить h на $\theta_2(h)$ и перейти к шагу 2.

7. Описание алгоритма 3

Для примитивной системы элементов $\{h_1, \ldots, h_r\}$ алгебры A приведём алгоритм поиска таких элементов $h_{r+1}, \ldots, h_n$, что $\{h_1, \ldots, h_n\}$ — множество свободных образующих A.

Рассмотрим такой функционал ω, что элемент h_1 является ω-ограниченным. Одна из частных производных ω-старшей компоненты элемента h_1 принадлежит левому модулю, порождённому остальными производными. С помощью алгоритма 2 строится такой ω-однородный автоморфизм φ алгебры A, что ω-старшая компонента $\varphi(h_1)$ зависит от меньшего числа переменных, чем h_1. Заменяем h_1 на $\varphi(h_1)$ и меняем ω, чтобы ω-старшая компонента h_1 зависела от всех переменных, от которых зависит сам элемент h_1. Повторяя этот процесс, находим автоморфизм, который переводит элемент h_1 в x_1.

Аналогично продолжая с элементами $h_2, \ldots, h_r$, получаем такой автоморфизм ψ алгебры A, что $\psi(h_1) = x_1, \ldots,\ \psi(h_r) = x_r$.

Множество $\{\psi^{-1}(h_{r+1}), \ldots, \psi^{-1}(h_n)\}$ является искомой системой, дополняющей данную систему элементов до множества свободных порождающих.

Алгоритм 3.

<u>Вход:</u> множество свободных образующих $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и примитивная система элементов $\{h_1, \ldots, h_r\}$ алгебры A.

<u>Выход:</u> множество элементов $\{h_{r+1}, \ldots, h_n\}$, таких что $\{h_1, \ldots, h_n\}$ является множеством свободных образующих A.

<u>Шаг 1:</u> положить $f_1 = h_1, \ldots,\ f_r = h_r$.

<u>Шаг 2:</u> задать ψ равным тождественному автоморфизму id алгебры A.

<u>Шаг 3:</u> положить $k = 1$.

<u>Шаг 4:</u> если $k > r$, то перейти к шагу 14.

<u>Шаг 5:</u> положить $\omega(x_i) = \frac{1}{l(f_k)}$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Шаг 6: если $f_k = x_k$, то увеличить k на 1 и перейти к шагу 4.

Шаг 7: если $f_k = x_l$ при $l > k$, то рассмотреть такой автоморфизм φ алгебры A, что $\varphi(x_k) = x_l$, $\varphi(x_l) = x_k$, $\varphi(x_i) = x_i$ при $i \neq k, l$,
заменить элементы f_j на элементы $\varphi(f_j)$, $j = k, \ldots, r$,
заменить автоморфизм ψ на автоморфизм $\psi \cdot \varphi$,
увеличить k на 1 и перейти к шагу 4.

Шаг 8: если элемент $\xi_\omega(f_k)$ не зависит от некоторой переменной x_j, а f_k зависит от этой переменной, то увеличить значение $\omega(x_j)$ так, чтобы f_k стало ω-ограниченным и элемент $\xi_\omega(f_k)$ зависел от x_j, и перейти к шагу 8.

Шаг 9: положить $l = 1$.

Шаг 10: попытаться найти такие ω-однородные элементы a_i алгебры A, $i \neq l$, $k \leqslant i \leqslant n$, что $v = \sum\limits_{i=k,\ i\neq l}^{n} a_i u_i$, $v = \frac{\partial \xi_\omega(f_k)}{\partial x_l}$, $u_i = \frac{\partial \xi_\omega(f_k)}{\partial x_i}$ при $i \neq l$.

Шаг 10.1: если $u_j = 0$ для некоторого $j \neq l$, $k \leqslant j \leqslant n$, то при помощи шага 10 попытаться найти такие ω-однородные элементы $b_i \in A$, $i \neq j, l$, $k \leqslant i \leqslant n$, что $v = \sum\limits_{i=k,\ i\neq j,l}^{n} b_i u_i$. Если b_i найдены, то положить $a_i = b_i$ при $i \neq j, l$ и $a_j = 0$ (рекурсия).
Иначе элементы a_i не существуют.

Шаг 10.2: если $u_j^\circ = \alpha c$ для некоторого $j = k, \ldots, n$, некоторого слова c и некоторого $\alpha \in \mathcal{K}$, $\alpha \neq 1$, то при помощи шага 10 попытаться найти ω-однородные элементы $b_i \in A$, $i \neq l$, $k \leqslant i \leqslant n$, такие что $v = b_j\big(\frac{1}{\alpha} u_j\big) + \sum\limits_{i=k,\ i\neq j,l}^{n} b_i u_i$. Если b_i найдены, то положить $a_i = b_i$ при $i \neq j, l$ и $a_j = \frac{1}{\alpha} b_j$ (рекурсия).
Иначе a_i не существуют.

Шаг 10.3: если $u_j^\circ = c u_m^\circ$ для некоторых $j \neq m$, $j \neq l$, $m \neq l$, $k \leqslant j$, $m \leqslant n$ и для некоторого (может быть, пустого) слова c, то при помощи шага 10 попытаться найти такие ω-однородные элементы $b_i \in A$, $i \neq l$, $k \leqslant i \leqslant n$, что $v = b_j(u_j - c u_m) + \sum\limits_{i=k,\ i\neq j,l}^{n} b_i u_i$.
Если элементы b_i найдены, то положить $a_i = b_i$ при $i \neq m, l$ и $a_m = b_m - b_j c$ (рекурсия).
Иначе a_i не существуют.

Шаг 10.4: если $v = 0$, то положить $a_i = 0$ при $i \neq l$, $k \leqslant i \leqslant n$.

Шаг 10.5: если $v^\circ = \alpha c u_j^\circ$ для некоторых $j \neq l$, $k \leqslant j \leqslant n$, для некоторого $\alpha \in F$ и некоторого (может быть, пустого) слова c,
то при помощи шага 10 попытаться найти такие ω-однородные

элементы $b_i \in A$, $i \neq j, l$, $k \leqslant i \leqslant n$, что $v - \alpha c u_j = \sum\limits_{i=k,\ i\neq j,l}^{n} b_i u_i$.
Если элементы b_i найдены, то положить $a_i = b_i$ при $i \neq j, l$ и $a_j = b_j + \alpha c$ (рекурсия).
Иначе элементы a_i не существуют.

Шаг 10.6: если $v^\circ \neq \alpha c u_j^\circ$ для любого слова c, для любого $\alpha \in F$ и любых $j \neq l$, $k \leqslant j \leqslant n$, то элементы a_i не существуют.

Шаг 11: если элементы a_i не существуют, то увеличить l на 1 и перейти к шагу 10.

Шаг 12: так как для $h_0 = \xi_\omega(f_k)$ имеет место равенство $\frac{\partial h_0}{\partial x_l} = \sum\limits_{i=1,\ i\neq l}^{n} a_i \frac{\partial h_0}{\partial x_i}$, использовать алгоритм 2 для нахождения ω-однородного автоморфизма φ алгебры A, такого что элемент $\varphi(h_0) = \varphi\big(\xi_\omega(f_k)\big)$ не зависит от x_l, и вычислить обратный автоморфизм φ^{-1}.

Шаг 13: заменить элементы f_i на элементы $\varphi(f_i)$, $i = k, \ldots, r$, заменить автоморфизм ψ на автоморфизм $\psi \cdot \varphi^{-1}$ и перейти к шагу 6.

Шаг 14: множество $\{h_{r+1}, \ldots, h_n\}$, где $h_i = \psi(x_i)$ для $i = r+1, \ldots, n$, является искомым дополнением. Выйти из алгоритма.

8. Пример применения алгоритма 1 (распознавание примитивности элемента)

Дан элемент

$$h = \frac{5}{3}x_2x_1 + \frac{6}{7}x_2\big((x_2x_2)x_3\big) + \frac{50}{21}(x_3x_1)x_1 + \frac{60}{49}(x_3x_1)\big((x_2x_2)x_3\big) + \\ + \frac{60}{49}\big(x_3\big((x_2x_2)x_3\big)\big)x_1 + \frac{216}{343}\big(x_3\big((x_2x_2)x_3\big)\big)\big((x_2x_2)x_3\big) + \frac{6}{7}x_3.$$

Вычисляем:

$$u_1 = \frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{60}{49}l_{x_3}r_{(x_2x_2)x_3} + \frac{60}{49}l_{x_3((x_2x_2)x_3)} + \frac{50}{21}l_{x_3}r_{x_1} + \frac{50}{21}l_{x_3x_1} + \frac{5}{3}l_{x_2},$$

$$u_2 = \frac{\partial h}{\partial x_2} = \frac{216}{343}l_{x_2}r_{x_3}l_{x_3}r_{(x_2x_2)x_3} + \frac{216}{343}l_{x_2}r_{x_3}l_{x_3((x_2x_2)x_3)} + \\ + \frac{216}{343}r_{x_2}r_{x_3}l_{x_3}r_{(x_2x_2)x_3} + \frac{216}{343}r_{x_2}r_{x_3}l_{x_3((x_2x_2)x_3)} + \frac{60}{49}l_{x_2}r_{x_3}l_{x_3}r_{x_1} + \\ + \frac{60}{49}l_{x_2}r_{x_3}l_{x_3x_1} + \frac{60}{49}r_{x_2}r_{x_3}l_{x_3}r_{x_1} + \frac{60}{49}r_{x_2}r_{x_3}l_{x_3x_1} + \frac{6}{7}r_{(x_2x_2)x_3} + \\ + \frac{6}{7}l_{x_2}r_{x_3}l_{x_2} + \frac{6}{7}r_{x_2}r_{x_3}l_{x_2} + \frac{5}{3}r_{x_1},$$

$$u_3 = \frac{\partial h}{\partial x_3} = \frac{216}{343} r_{(x_2x_2)x_3} r_{(x_2x_2)x_3} + \frac{216}{343} l_{x_2x_2} l_{x_3} r_{(x_2x_2)x_3} + \frac{216}{343} l_{x_2x_2} l_{x_3((x_2x_2)x_3)} +$$
$$+ \frac{60}{49} r_{(x_2x_2)x_3} r_{x_1} + \frac{60}{49} l_{x_2x_2} l_{x_3} r_{x_1} + \frac{60}{49} l_{x_2x_2} l_{x_3x_1} + \frac{60}{49} r_{x_1} r_{(x_2x_2)x_3} +$$
$$+ \frac{6}{7} l_{x_2x_2} l_{x_2} + \frac{50}{21} r_{x_1} r_{x_1} + \frac{6}{7}.$$

Далее алгоритм производит следующие редукции:

$$u_2 \to u_2 - \left(\frac{18}{35} l_{x_2} r_{x_3}\right) u_1 = \frac{216}{343} r_{x_2} r_{x_3} l_{x_3} r_{(x_2x_2)x_3} + \frac{216}{343} r_{x_2} r_{x_3} l_{x_3((x_2x_2)x_3)} +$$
$$+ \frac{60}{49} r_{x_2} r_{x_3} l_{x_3} r_{x_1} + \frac{60}{49} r_{x_2} r_{x_3} l_{x_3x_1} + \frac{6}{7} r_{(x_2x_2)x_3} + \frac{6}{7} r_{x_2} r_{x_3} l_{x_2} + \frac{5}{3} r_{x_1},$$

$$u_2 \to u_2 - \left(\frac{18}{35} r_{x_2} r_{x_3}\right) u_1 = \frac{6}{7} r_{(x_2x_2)x_3} + \frac{5}{3} r_{x_1},$$

$$u_3 \to u_3 - \left(\frac{18}{35} l_{x_2x_2}\right) u_1 = \frac{216}{343} r_{(x_2x_2)x_3} r_{(x_2x_2)x_3} + \frac{60}{49} r_{(x_2x_2)x_3} r_{x_1} +$$
$$+ \frac{60}{49} r_{x_1} r_{(x_2x_2)x_3} + \frac{50}{21} r_{x_1} r_{x_1} + \frac{6}{7},$$

$$u_1 \to u_1 - \left(\frac{10}{7} l_{x_3}\right) u_2 = \frac{60}{49} l_{x_3((x_2x_2)x_3)} + \frac{50}{21} l_{x_3x_1} + \frac{5}{3} l_{x_2},$$

$$u_3 \to u_3 - \left(\frac{36}{49} r_{((x_2x_2)x_3)}\right) u_2 = \frac{60}{49} r_{x_1} r_{(x_2x_2)x_3} + \frac{50}{21} r_{x_1} r_{x_1} + \frac{6}{7},$$

$$u_3 \to u_3 - \left(\frac{10}{7} r_{x_1}\right) u_2 = \frac{6}{7}.$$

Получаем константу, из чего следует, что существуют такие элементы a_1, a_2, a_3 свободной ассоциативной алгебры $U(A)$, что

$$a_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} = 1,$$

а это, в свою очередь, влечёт примитивность элемента h.

9. Пример применения алгоритма 3 (дополнение примитивного элемента до базиса)

Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ $(n = 3)$ и $A = F(X)$ — свободная неассоциативная алгебра.

Дан элемент

$$h = \frac{5}{3}x_2x_1 + \frac{6}{7}x_2\big((x_2x_2)x_3\big) + \frac{50}{21}(x_3x_1)x_1 + \frac{60}{49}(x_3x_1)\big((x_2x_2)x_3\big) + \\ + \frac{60}{49}\big(x_3\big((x_2x_2)x_3\big)\big)x_1 + \frac{216}{343}\big(x_3\big((x_2x_2)x_3\big)\big)\big((x_2x_2)x_3\big) + \frac{6}{7}x_3.$$

В разделе 8 было установлено, что элемент h примитивный.

Полагаем $h_1 = h$, $\psi = \mathrm{id}$, $r = 1$, $k = 1$. После сортировки по старшинству одночленов h_1 получаем

$$h_1 = \frac{216}{343}\big(x_3\big((x_2x_2)x_3\big)\big)\big((x_2x_2)x_3\big) + \frac{60}{49}(x_3x_1)\big((x_2x_2)x_3\big) + \\ + \frac{60}{49}\big(x_3\big((x_2x_2)x_3\big)\big)x_1 + \frac{6}{7}x_2\big((x_2x_2)x_3\big) + \frac{50}{21}(x_3x_1)x_1 + \frac{5}{3}x_2x_1 + \frac{6}{7}x_3.$$

Условие $k > r$ не выполнено, положим

$$\omega(x_1) = \omega(x_2) = \omega(x_3) = \frac{1}{l(h_1)} = \frac{1}{7},$$

$f_1 = h_1$. Так как элемент f_1 не равен ни одному из x_i $(i = 1, 2, 3)$, то переходим к вычислению старшей ω-компоненты f_1. При таких значениях функционала ω получаем

$$\xi_\omega(f_1) = \frac{216}{343}\big(x_3\big((x_2x_2)x_3\big)\big)\big((x_2x_2)x_3\big).$$

Однако в таком случае элемент $\xi_\omega(f_1)$ не зависит от x_1, поэтому положим $\omega(x_1) = \frac{21}{49}$. В результате

$$\xi_\omega(f_1) = \frac{216}{343}\big(x_3\big((x_2x_2)x_3\big)\big)\big((x_2x_2)x_3\big) + \frac{60}{49}(x_3x_1)\big((x_2x_2)x_3\big) + \\ + \frac{60}{49}\big(x_3\big((x_2x_2)x_3\big)\big)x_1 + \frac{50}{21}(x_3x_1)x_1.$$

На шаге 9 алгоритма положим $l = 1$, а на шаге 10 ищем для

$$v = \frac{\partial \xi_\omega(f_1)}{\partial x_1}, \quad u_2 = \frac{\partial \xi_\omega(f_1)}{\partial x_2}, \quad u_3 = \frac{\partial \xi_\omega(f_1)}{\partial x_3}$$

такие ω-однородные элементы a_i алгебры A, $i \neq l$, $k \leqslant i \leqslant n$, что

$$v = \sum_{i=k,\ i\neq l}^{n} a_i u_i.$$

Получаем, что для таких элементов v, u_2, u_3 не существует a_i. Увеличиваем l на 1 и переходим к шагу 10 снова. Для новых элементов

$$v = \frac{\partial \xi_\omega(f_1)}{\partial x_2}, \quad u_1 = \frac{\partial \xi_\omega(f_1)}{\partial x_1}, \quad u_3 = \frac{\partial \xi_\omega(f_1)}{\partial x_3}$$

поиск a_i завершается удачно:

$$u_1 = \frac{50}{21}l_{x_3}r_{x_1} + \frac{50}{21}l_{x_3x_1} + \frac{60}{49}l_{x_3((x_2x_2)x_3)} + \frac{60}{49}l_{x_3}r_{(x_2x_2)x_3},$$

$$v = \frac{60}{49} r_{x_2} r_{x_3} l_{x_3} r_{x_1} + \frac{60}{49} l_{x_2} r_{x_3} l_{x_3} r_{x_1} + \frac{60}{49} r_{x_2} r_{x_3} l_{x_3 x_1} + \frac{60}{49} l_{x_2} r_{x_3} l_{x_3 x_1} +$$
$$+ \frac{216}{343} r_{x_2} r_{x_3} l_{x_3} r_{(x_2 x_2) x_3} + \frac{216}{343} l_{x_2} r_{x_3} l_{x_3} r_{(x_2 x_2) x_3} +$$
$$+ \frac{216}{343} r_{x_2} r_{x_3} l_{x_3 ((x_2 x_2) x_3)} + \frac{216}{343} l_{x_2} r_{x_3} l_{x_3 ((x_2 x_2) x_3)},$$

$$u_3 = \frac{50}{21} r_{x_1} r_{x_1} + \frac{60}{49} r_{(x_2 x_2) x_3} r_{x_1} + \frac{60}{49} l_{x_2 x_2} l_{x_3} r_{x_1} + \frac{60}{49} r_{x_1} r_{(x_2 x_2) x_3} + \frac{60}{49} l_{x_2 x_2} l_{x_3 x_1} +$$
$$+ \frac{216}{343} r_{(x_2 x_2) x_3} r_{(x_2 x_2) x_3} + \frac{216}{343} l_{x_2 x_2} l_{x_3} r_{(x_2 x_2) x_3} + \frac{216}{343} l_{x_2 x_2} l_{x_3 ((x_2 x_2) x_3)},$$

$$v = a_1 u_1 + a_3 u_3, \quad a_1 = \frac{18}{35} r_{x_2} r_{x_3} + \frac{18}{35} l_{x_2} r_{x_3}, \quad a_3 = 0.$$

Теперь, используя алгоритм 2, находим φ_1:

$$\varphi_1(x_1) = x_1 - \frac{18}{35}(x_2 x_2) x_3, \quad \varphi_1(x_2) = x_2, \quad \varphi_1(x_3) = x_3.$$

Заменяя элемент f_1 на

$$\varphi_1(f_1) = \frac{50}{21}(x_3 x_1) x_1 + \frac{5}{3} x_2 x_1 + \frac{6}{7} x_3,$$

переходим к шагу 6.

Так как элемент f_1 не равен ни одному из x_i ($i = 1, 2, 3$), переходим к вычислению старшей ω-компоненты f_1. При данных значениях функционала ω ($\omega(x_1) = \frac{21}{49}$, $\omega(x_2) = \frac{1}{7}$, $\omega(x_3) = \frac{1}{7}$) получаем

$$\xi_\omega(f_1) = \frac{50}{21}(x_3 x_1) x_1.$$

Но в таком случае элемент $\xi_\omega(f_1)$ не зависит от x_2, поэтому

$$\omega(x_2) = \frac{28}{49}.$$

В результате

$$\xi_\omega(f_1) = \frac{50}{21}(x_3 x_1) x_1 + \frac{5}{3} x_2 x_1.$$

Используя рассуждения, приведённые выше, ищем ω-однородную комбинацию. В данном случае она существует при $l = 3$:

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2,$$
$$u_1 = \frac{\partial \xi_\omega(f_1)}{\partial x_1} = \frac{5}{3} l_{x_2} + \frac{50}{21} l_{x_3} r_{x_1} + \frac{50}{21} l_{x_3 x_1},$$
$$u_2 = \frac{\partial \xi_\omega(f_1)}{\partial x_2} = \frac{5}{3} r_{x_1}, \quad v = \frac{\partial \xi_\omega(f_1)}{\partial x_3} = \frac{50}{21} r_{x_1} r_{x_1},$$
$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{10}{7} r_{x_1}.$$

Теперь, используя алгоритм 2, находим φ_2:

$$\varphi_2(x_1) = x_1, \quad \varphi_2(x_2) = x_2 - \frac{10}{7}x_3x_1, \quad \varphi_2(x_3) = x_3.$$

Заменяя f_1 на

$$\varphi_2(f_1) = \frac{5}{3}x_2x_1 + \frac{6}{7}x_3,$$

переходим к шагу 6.

Элемент f_1 снова не равен ни одному из x_i $(i = 1, 2, 3)$, поэтому переходим к вычислению старшей ω-компоненты f_1. Имеем, что $\xi_\omega(f_1) = \frac{5}{3}x_2x_1$ не зависит от x_3. Увеличиваем $\omega(x_3)$, $\omega(x_3) = 1$. Получаем

$$\xi_\omega(f_1) = \frac{5}{3}x_2x_1 + \frac{6}{7}x_3.$$

Находим ω-однородную комбинацию при $l = 1$:

$$v = a_2u_2 + a_3u_3,$$
$$v = \frac{5}{3}l_{x_2}, \quad u_2 = \frac{5}{3}r_{x_1}, \quad u_3 = \frac{6}{7},$$
$$a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{35}{18}l_{x_2}.$$

Теперь, используя алгоритм 2, находим φ_3:

$$\varphi_2(x_1) = x_1, \quad \varphi_2(x_2) = x_2, \quad \varphi_2(x_3) = x_3 - \frac{35}{18}x_2x_1.$$

Заменяем элемент f_1 на $\varphi_3(f_1) = \frac{6}{7}x_3$. Переходим к шагу 6. Так как $f_1 \neq x_1$, то переходим к шагу 7. Замечаем, что $f_1 = x_k$, $k = 3$. Поэтому строим такое отображение φ_4, что

$$\varphi_4(x_1) = x_3, \quad \varphi_4(x_2) = x_2, \quad \varphi_4(x_3) = x_1,$$

и получаем

$$\varphi_4(f_1) = \frac{6}{7}x_1.$$

Переходим к шагу 6. Так как $f_1 = x_1$, увеличиваем k на 1 и переходим к шагу 4. Так как $k = 2$, а $r = 1$, то переходим к шагу 14. В итоге получаем

$$h_2 = \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}\varphi_3^{-1}\varphi_4^{-1}(x_2) = x_2 + \frac{10}{7}x_3x_1 + \frac{36}{49}x_3\big((x_2x_2)x_3\big),$$
$$h_3 = \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}\varphi_3^{-1}\varphi_4^{-1}(x_3) = x_1 + \frac{18}{35}(x_2x_2)x_3.$$

Итак,

$$\left\{h,\ x_2 + \frac{10}{7}x_3x_1 + \frac{36}{49}x_3\big((x_2x_2)x_3\big),\ x_1 + \frac{18}{35}(x_2x_2)x_3\right\} -$$

множество свободных порождающих алгебры A.

Литература

[1] Золотых А. А., Михалёв А. А. Ранг элемента свободной цветной (p-)супералгебры Ли // Докл. РАН. — 1994. — Т. 334, № 6. — С. 690—693.

[2] Курош А. Г. Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр // Мат. сб. — 1947. — Т. 20. — С. 239—262.

[3] Умирбаев У. У. О шрейеровых многообразиях алгебр // Алгебра и логика. — 1994. — Т. 33, № 3. — С. 317—340.

[4] Шампаньер К. Алгоритмы реализации ранга и примитивности систем элементов свободных неассоциативных алгебр // Фундамент. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, № 4. — С. 1229—1238.

[5] Artamonov V. A., Mikhalev A. A., Mikhalev A. V. Combinatorial properties of free algebras of Schreier varieties of algebras // Polynomial Identities and Combinatorial Methods / A. Giambruno, A. Regev, M. Zaicev, eds. — Marcel Dekker, 2003. — P. 47—99.

[6] Cohn P. M. On a generalization of the Euclidean algorithm // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1961. — Vol. 57. — P. 18—30.

[7] Cohn P. M. Free ideal rings // J. Algebra. — 1964. — Vol. 1. — P. 47—69.

[8] Cohn P. M. Free Rings and Their Relations. — Academic Press, 1985.

[9] Lewin J. On Schreier varieties of linear algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 132. — P. 553—562.

[10] Lewin J. Free modules over free algebras and free group algebras: The Schreier technique // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 145. — P. 455—465.

[11] Mikhalev A. A., Shpilrain V., Yu J.-T. Combinatorial Methods. Free Groups, Polynomials, and Free Algebras. — New York: Springer New, 2004.

[12] Mikhalev A. A., Umirbaev U. U., Yu J.-T. Automorphic orbits of elements of free non-associative algebras // J. Algebra. — 2001. — Vol. 243. — P. 198—223.

[13] Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. Rank and primitivity of elements of free colour Lie (p-)superalgebras // Internat. J. Algebra Comput. — 1994. — Vol. 4. — P. 617—656.

[14] Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. Combinatorial Aspects of Lie Superalgebras. — Boca Raton: CRC Press, 1995.