Кольца, над которыми все модули являются I_0-модулями*

А. А. ТУГАНБАЕВ
Российский государственный
торгово-экономический университет
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.55

Ключевые слова: I_0-модуль, полуартиново кольцо, идеал $\mathrm{SI}(A_A)$.

Аннотация

Если кольцо A не содержит бесконечных множеств идемпотентов, ортогональных по модулю идеала $\mathrm{SI}(A_A)$, то все правые A-модули являются I_0-модулями в точности тогда, когда либо A — полуартиново справа кольцо, в котором каждый собственный правый идеал является пересечением максимальных правых идеалов, либо $A/\mathrm{SI}(A_A)$ — полуцепное артиново кольцо с нулевым квадратом своего радикала Джекобсона.

Abstract

A. A. Tuganbaev, Rings over which all modules are I_0-modules, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 5, pp. 193—200.

Let A be a ring that does not contain an infinite set of idempotents that are orthogonal modulo the ideal $\mathrm{SI}(A_A)$. It is proved that all A-modules are I_0-modules if and only if either A is a right semi-Artinian right V-ring or $A/\mathrm{SI}(A_A)$ is an Artinian serial ring and the square of the Jacobson radical of $A/\mathrm{SI}(A_A)$ is equal to zero.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Слова типа «артиново кольцо» означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Подмодуль X модуля M называется *малым в* M, если $X + P \neq M$ для любого собственного подмодуля P модуля M. Следуя [9], мы называем модуль M I_0-*модулем*, если каждый его немалый подмодуль содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M. (В [1—3, 6] I_0-модули называются *слабо регулярными* модулями.) I_0-модули изучались в [1—6; 8; 9; 10, гл. 3; 11] и других работах.

Для любого модуля M и каждого ординального числа α определим с помощью трансфинитной индукции подмодуль $\mathrm{SI}_\alpha(M)$. Полагаем, что $\mathrm{SI}_0(M) = 0$, $\mathrm{SI}_1(M)$ — сумма всех простых инъективных подмодулей модуля M (полагаем $\mathrm{SI}_1(M) = 0$, если M не имеет простых инъективных подмодулей). Допустим,

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 5, с. 193—200.

что α — ординальное число и для всех $\beta < \alpha$ подмодули SI_β определены. Если $\alpha - 1$ существует, то обозначим через $\mathrm{SI}_\alpha(M)$ такой подмодуль в M, что $\mathrm{SI}_\alpha(M)/\mathrm{SI}_{\alpha-1}(M) = \mathrm{SI}_1\big(M/\mathrm{SI}_{\alpha-1}(M)\big)$. Если $\alpha - 1$ не существует, то обозначим через $\mathrm{SI}_\alpha(M)$ подмодуль $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathrm{SI}_\beta(M)$ модуля M. Найдётся такое α, что $\mathrm{SI}_\alpha(M) = \mathrm{SI}_{\alpha+1}(M)$. Наименьшее такое α обозначим через $\bar{\alpha}$ и назовём *SI-размерностью* модуля M, а подмодуль $\mathrm{SI}_\alpha(M) = \mathrm{SI}_{\alpha+1}(M)$ обозначим через $\mathrm{SI}(M)$. *Правой SI-размерностью* кольца A мы будем называть SI-размерность модуля A_A. Так как каждый гомоморфный образ любой суммы простых инъективных модулей является прямой суммой простых инъективных модулей, то все подмодули $\mathrm{SI}_\alpha(M)$ вполне инвариантны в M. В частности, $\mathrm{SI}(M)$ — вполне инвариантный подмодуль в M и $\mathrm{SI}(A_A)$ — идеал кольца A. Если B — идеал кольца A и $\{e_i\}_{i\in I}$ — такое множество идемпотентов в A, что $e_ie_j \in B$ при $i \neq j$, то множество $\{e_i\}_{i\in I}$ называется *ортогональным по модулю идеала* B.

В [4] описаны такие кольца A, что все правые A-модули являются I_0-модулями и A не содержит бесконечных множеств ортогональных идемпотентов. Основным результатом данной работы является теорема 1.

Теорема 1. *Пусть кольцо A не содержит бесконечных множеств идемпотентов, ортогональных по модулю идеала $\mathrm{SI}(A_A)$. Все правые A-модули являются I_0-модулями в точности тогда, когда либо A — полуартиново справа кольцо, в котором каждый собственный правый идеал является пересечением максимальных правых идеалов, либо $A/\mathrm{SI}(A_A)$ — полуцепное артиново кольцо с нулевым квадратом своего радикала Джекобсона.*

Пример. Приведём пример коммутативного регулярного кольца A, которое удовлетворяет теореме 1 и содержит бесконечное множество ортогональных идемпотентов. Пусть F — поле, R — прямое произведение счётного множества $\{F_i\}_{i=1}^\infty$ экземпляров поля F, B — идеал $\bigoplus\limits_{i=1}^\infty F_i$ кольца R и A — подкольцо в R, порождённое идеалом B и F-подпространством скалярных «последовательностей» $\{f \cdot (e_i)_{i=1}^\infty\}$, где $f \in F$ и e_i — единица поля F_i. Ясно, что A — коммутативное регулярное кольцо, содержащее бесконечное множество $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ ортогональных идемпотентов. Каждый идеал коммутативного регулярного кольца A является пересечением максимальных идеалов. Так как B — цоколь кольца A и фактор-кольцо A/B изоморфно полю F, то A — полуартиново кольцо.

Доказательство теоремы 1 разбито на ряд утверждений, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес. Приведём необходимые определения и обозначения.

Кольцо A называется *регулярным* (по фон Нейману), если $a \in aAa$ для любого элемента $a \in A$. Модуль M называется *цепным*, если любые два его подмодуля сравнимы по включению. Прямая сумма цепных модулей называется *полуцепным* модулем. Модуль M называется *полупростым*, если каждый его подмодуль является прямым слагаемым в M. Подмодуль N модуля M называется *существенным*, если для любого подмодуля X модуля M равенство

$X \cap N = 0$ влечёт равенство $X = 0$. В этом случае также говорят, что M — *существенное расширение* модуля N. Модуль называется *полуартиновым*, если каждый его фактор-модуль является существенным расширением полупростого модуля. Через $\mathrm{End}(M)$ обозначается кольцо эндоморфизмов модуля M. Пересечение всех максимальных подмодулей модуля M обозначается через $J(M)$ и называется *радикалом Джекобсона* модуля M. Модуль M называется *полупримитивным*, если $J(M) = 0$. Модуль M называется *инъективным*, если для любого модуля X и каждого подмодуля Y модуля X все гомоморфизмы $Y \to M$ продолжаются до гомоморфизмов $X \to M$. Если M — инъективный модуль и N — существенный подмодуль модуля M, то модуль M называется *инъективной оболочкой* модуля N.

Следующие две леммы хорошо известны и проверяются непосредственно.

Лемма 1. *Каждый правый модуль над полуартиновым справа кольцом является полуартиновым. Модуль M является полуартиновым в точности тогда, когда существует такое ординальное число α, что $M = \bigcup\limits_{\beta \leqslant \alpha} M_\beta$, где для любого $\beta \leqslant \alpha$ M_β — подмодуль в M, $M_\gamma \subset M_\beta$ при $\gamma < \beta$, $M_\beta/M_{\beta-1}$ — полуартинов модуль для непредельных β и $M_\beta = \bigcup\limits_{\gamma \leqslant \beta} M_\gamma$ для предельных β.*

Лемма 2. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *в кольце A каждый собственный правый идеал является пересечением максимальных правых идеалов*;
2) *все простые правые A-модули инъективны*;
3) *все правые A-модули полупримитивны и каждый ненулевой правый A-модуль является существенным расширением прямой суммы простых инъективных модулей.*

Кольцо A, удовлетворяющее эквивалентным условиям леммы 2, называется *правым V-кольцом*.

Хорошо известно, что $J(M)$ совпадает с суммой всех малых подмодулей модуля M (см., например, [12, 21.5]). Отсюда вытекает лемма 3.

Лемма 3. *Модуль M является I_0-модулем в точности тогда, когда любой его подмодуль, не лежащий в $J(M)$, содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M. В частности, кольцо A является I_0-кольцом в точности тогда, когда для любого элемента $a \in A \setminus J(A)$ главный правый идеал aA содержит ненулевой идемпотент.*

Лемма 4. *Пусть a — элемент кольца A. Тогда*

$$aA \cap (1-a)A = (a-a^2)A.$$

Кроме того, если $(a-a^2)A$ — прямое слагаемое в A_A, то существует такой идемпотент $e \in A$, что

$$e - a \in (a-a^2)A = aA \cap (1-a)A.$$

Доказательство. Ясно, что

$$(a-a^2)A \subseteq aA \cap (1-a)A.$$

Пусть $x = ab = (1-a)c \in aA \cap (1-a)A$, где $b, c \in A$. Тогда

$$x = (1-a)x + ax = (1-a)ab + a(1-a)c = (a-a^2)(b+c),$$
$$aA \cap (1-a)A \subseteq (a-a^2)A.$$

Допустим теперь, что $(a-a^2)A$ — прямое слагаемое в A_A. Тогда существует такой идемпотент $f \in A$, что $aA \cap (1-a)A = (a-a^2)A = fA$. Поэтому

$$aA = fA \oplus (1-f)aA, \quad (1-a)A = fA \oplus (1-f)(1-a)A,$$
$$(1-f)aA \cap (1-f)(1-a)A \subseteq (1-f)(aA \cap (1-a)A) = (1-f)fA = 0,$$
$$(1-f)aA \oplus (1-f)(1-a)A = (1-f)A,$$
$$A_A = fA \oplus (1-f)aA \oplus (1-f)(1-a)A.$$

Тогда существуют такие идемпотенты $g, h \in A$, что

$$1 = f + g + h, \quad fg = gf = gh = hg = fh = hf = 0,$$
$$(1-f)aA = gA, \quad (1-f)(1-a)A = hA,$$
$$a = (f+g)a, \quad 1-a = (f+h)(1-a), \quad ha = g(1-a) = 0.$$

Обозначим через e идемпотент $f + g$. Тогда

$$1 = e + h, \quad ef = f, \quad eg = g, \quad eh = he = 0, \quad (1-f)a = g(1-f)a, \quad a = ea,$$
$$e - a = e - ea = f(1-a) + g(1-a) = f(1-a) \in aA \cap (1-a)A. \qquad \square$$

Лемма 5. *Пусть A — кольцо с правой SI-размерностью $\bar{\alpha}$. Для любого $\alpha \leqslant \bar{\alpha}$ обозначим через S_α идеал $\mathrm{SI}_\alpha(A_A)$ кольца A.*

1. *Если M — правый A-модуль и $MS_\alpha \neq 0$ для некоторого $\alpha \leqslant \bar{\alpha}$, то модуль M содержит простое инъективное прямое слагаемое.*
2. *Если M — неразложимый правый A-модуль и $MS_\alpha \neq 0$ для некоторого $\alpha \leqslant \bar{\alpha}$, то M — простой инъективный A-модуль.*
3. *Для любого $\alpha \leqslant \bar{\alpha}$ каждый ненулевой инъективный правый A/S_α-модуль X либо является инъективным A-модулем, либо содержит прямое слагаемое, являющееся простым инъективным A-модулем. В обоих случаях X содержит ненулевое прямое слагаемое, являющееся инъективным A-модулем.*
4. *Каждый идемпотент фактор-кольца A/S_1 поднимается до идемпотента кольца A.*
5. *Для любого $\alpha \leqslant \bar{\alpha}$ каждый идемпотент фактор-кольца A/S_α поднимается до идемпотента кольца A.*

Доказательство. 1. Без ограничения общности можно считать, что $MS_\beta = 0$ для всех $\beta < \alpha$. Тогда α — непредельное порядковое число. Поэтому $\alpha = \beta + 1$,

$MS_\beta = 0$, $MS_{\beta+1} \neq 0$, $mS_{\beta+1} \neq 0$ для некоторого $m \in M$ и $mS_\beta = 0$. Существует прямое разложение $S_{\beta+1}/S_\beta = \bigoplus\limits_{i\in I} X_i$ правых A-модулей, где все X_i — простые инъективные модули. Так как $mS_{\beta+1} \neq 0$ и $mS_\beta = 0$, то A-модуль $mS_{\beta+1}$ содержит простой инъективный подмодуль X, изоморфный одному из модулей X_i. Так как модуль X инъективен, то X — прямое слагаемое в M.

2. Утверждение вытекает из пункта 1.

3. Достаточно доказать, что $X = M$ для произвольного правого A-модуля M, являющегося существенным расширением A-модуля X.

Если $MS_\alpha = 0$, то M является A/S_α-модулем и $X = M$, поскольку инъективный A/S_α-модуль X является существенным прямым слагаемым A/S_α-модуля M.

Если $MS_\alpha \neq 0$, то по утверждению 1 A-модуль M содержит простое инъективное прямое слагаемое S_A. Так как M — существенное расширение модуля X и модуль S прост, то $S \subseteq X$. Поэтому S — простое инъективное прямое слагаемое модуля X_A.

4. Пусть $a \in A$ и $a - a^2 \in S_1 = \bigoplus\limits_{i\in I} X_i$, где все X_i — простые инъективные модули. Существует такое конечное подмножество J в I, что $a-a^2 \in \bigoplus\limits_{j\in J} X_j$. Так как множество J конечно, то $\bigoplus\limits_{j\in J} X_j$ — инъективный модуль. Поэтому $\bigoplus\limits_{j\in J} X_j$ — прямое слагаемое модуля A_A. По лемме 4 существует такой идемпотент $e \in A$, что $e - a \in (a - a^2)A \subseteq S_1$.

5. Будем вести трансфинитную индукцию по α. При $\alpha = 1$ утверждение доказано в пункте 4. Допустим, что утверждение верно для всех ординальных чисел $\beta < \alpha$. Пусть $a \in A$ и $a - a^2 \in S_\alpha$.

Если α — предельное число, то $a - a^2 \in S_\beta$ для некоторого $\beta < \alpha$. Тогда по предположению индукции существует такой идемпотент $e \in A$, что $e - a \in S_\beta \subseteq S_\alpha$.

Допустим, что α — непредельное число, т. е. $\alpha = \beta+1$. Пусть $h\colon A \to A/S_\beta \equiv \bar{A}$ — естественный эпиморфизм, $\bar{S}_1 \equiv h(S_\alpha) = S_{\beta+1}/S_\beta$. Тогда $\bar{S}_1 = S_1(\bar{A}_{\bar{A}})$ и $h(a) - \big(h(a)\big)^2 \in S_1(\bar{A}_{\bar{A}})$. Применяя утверждение 4 к элементу $h(a)$ кольца $h(A)$, получаем существование такого идемпотента $h(e)$ кольца $h(A)$, что $h(e) - h(a) \in h(S_\alpha)$. По предположению индукции идемпотент $h(e)$ кольца A/S_β поднимается до некоторого идемпотента e кольца A. Тогда $e - a \in S_\alpha$. $\square$

Лемма 6. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *все правые A-модули являются I_0-модулями, и каждый собственный правый идеал кольца A является пересечением максимальных правых идеалов*;
2) $\mathrm{SI}(A_A) = A$;
3) *A — полуартиново справа кольцо, в котором каждый собственный правый идеал является пересечением максимальных правых идеалов*;

4) *A — полуартиново справа кольцо, и все простые правые A-модули инъективны*;
5) *каждый ненулевой правый A-модуль полупримитивен и является существенным расширением прямой суммы простых инъективных модулей*;
6) *в каждом правом A-модуле M любой ненулевой подмодуль содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M.*

Доказательство. Эквивалентность условий 3), 4) и 5) вытекает из лемм 1 и 2.

Импликация 4) $\Longrightarrow$ 2) проверяется непосредственно.

Импликации 2) $\Longrightarrow$ 4) и 2) $\Longrightarrow$ 6) вытекают из пункта 1 леммы 5.

Импликация 6) $\Longrightarrow$ 4) доказана в [7].

Ясно, что из совокупности эквивалентных условий 3) и 6) следует условие 1).

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 6). Пусть N — ненулевой подмодуль правого A-модуля M. Так как по лемме 2 $J(M) = 0$, то по лемме 3 N содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M. $\square$

Модуль M называется *квазипроективным*, если для любого эпиморфизма $h\colon M \to \bar{M}$ и каждого гомоморфизма $\bar{f}\colon M \to \bar{M}$ существует такой эндоморфизм f модуля M, что $\bar{f} = hf$. Модуль M называется *самообразующим*, если все его подмодули являются гомоморфными образами прямых сумм копий модуля M. Через $\sigma[M]$ обозначается *категория Висбауэра* модуля M, т. е. полная подкатегория категории Mod-A всех правых A-модулей, состоящая из всех подмодулей гомоморфных образов прямых сумм копий модуля M.

Лемма 7. *Если M — конечно порождённый квазипроективный самообразующий, то функтор $\mathrm{Hom}(M, -)$ является Морита-эквивалентностью между категориями $\sigma[M]$ и $\mathrm{Mod}\text{-}\mathrm{End}(M)$.*

Доказательство. Так как M — конечно порождённый квазипроективный самообразующий, то по [12, 18.3 и 8.5] M — проективный образующий в категории $\sigma[M]$. Поэтому утверждение вытекает из [12, 46.2]. $\square$

Лемма 8. *Если e — ненулевой идемпотент кольца A, то функтор $\mathrm{Hom}(eA, -)$ является Морита-эквивалентностью между категориями $\sigma[eA_A]$ и Mod-eAe.*

Доказательство. Модуль eA_A является циклическим проективным самообразующим, причём $\mathrm{End}(eA_A) = eAe$. Поэтому лемма 8 вытекает из леммы 7 при $M = eA_A$. $\square$

Лемма 9 [4]. *Кольцо A является артиновым полуцепным кольцом и $\bigl(J(A)\bigr)^2 = 0$ в точности тогда, когда каждый правый A-модуль является I_0-модулем и модуль A_A является прямой суммой неразложимых модулей.*

Лемма 10 [5, предложение 1.4]. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *каждый правый A-модуль является I_0-модулем*;

2) *для каждого правого A-модуля M верно, что $J(M)$ — полупростой модуль и если $J(M) = 0$, то каждый ненулевой подмодуль модуля M содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M;*
3) *каждый правый A-модуль либо имеет ненулевое инъективное прямое слагаемое, либо является полупростым модулем и лежит в радикале Джекобсона своей инъективной оболочки;*
4) *каждый циклический правый A-модуль либо имеет ненулевое инъективное прямое слагаемое, либо является полупростым модулем.*

Для краткости назовём кольцо A *специальным справа*, если все правые A-модули являются I_0-модулями.

Лемма 11. *Для кольца A равносильны следующие условия:*

1) *A — специальное справа кольцо;*
2) *либо $\mathrm{SI}(A_A) = A$, либо $\mathrm{SI}(A_A) \neq A$ и $A/\mathrm{SI}(A_A)$ — специальное справа кольцо;*
3) *любое фактор-кольцо кольца A является специальным справа кольцом;*
4) *любое кольцо, Морита-эквивалентное кольцу A, является специальным справа кольцом;*
5) *для любого ненулевого идемпотента $e \in A$ кольцо eAe является специальным справа кольцом.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1), 3), 4) и импликации 5) $\Longrightarrow$ 1) и 3) $\Longrightarrow$ 2) проверяются непосредственно.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 5). По лемме 8 категории $\sigma[eA_A]$ и Mod-eAe эквивалентны. Кроме того, в категории $\sigma[eA_A]$ каждый модуль является I_0-модулем, поскольку A — специальное справа кольцо. Поэтому eAe — специальное справа кольцо.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Обозначим $S = \mathrm{SI}(A_A)$. Если $S = A$, то по лемме 6 A — специальное справа кольцо.

Допустим, что $S \neq A$ и A/S — специальное справа кольцо. По лемме 10 достаточно доказать, что каждый неполупростой циклический правый A-модуль M имеет ненулевое прямое слагаемое, являющееся инъективным A-модулем.

Если $MS \neq 0$, то по утверждению 1 леммы 5 M_A содержит простое инъективное прямое слагаемое.

Допустим, что $MS = 0$. Тогда M — неполупростой циклический правый A/S-модуль, поскольку $MS = 0$ и M — неполупростой циклический правый A-модуль. По лемме 10 A/S-модуль M имеет ненулевое инъективное прямое слагаемое $X_{A/S}$. По утверждению 3 леммы 5 X содержит ненулевое прямое слагаемое, являющееся инъективным A-модулем. □

Лемма 12. *Если A — кольцо и $\mathrm{SI}(A_A) \neq A$, то A является специальным справа кольцом в точности тогда, когда $A/\mathrm{SI}(A_A)$ — специальное справа кольцо.*

Доказательство. Лемма 12 вытекает из леммы 11. □

Лемма 13. *Пусть A — кольцо и $\mathrm{SI}(A_A) \neq A$. Равносильны следующие условия*:

1) *A — специальное справа кольцо, не содержащее бесконечных множеств идемпотентов, являющихся ортогональными по модулю идеала $\mathrm{SI}(A_A)$*;
2) *$A/\mathrm{SI}(A_A)$ — специальное справа кольцо и A не содержит бесконечных множеств идемпотентов, являющихся ортогональными по модулю идеала $\mathrm{SI}(A_A)$*;
3) *$A/\mathrm{SI}(A_A)$ — специальное справа кольцо, не содержащее бесконечных множеств ортогональных идемпотентов*;
4) *$A/\mathrm{SI}(A_A)$ — специальное справа кольцо, и правый $A/\mathrm{SI}(A_A)$-модуль $A/\mathrm{SI}(A_A)$ — прямая сумма неразложимых модулей*;
5) *$A/\mathrm{SI}(A_A)$ — полуцепное артиново кольцо с нулевым квадратом своего радикала Джекобсона.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) вытекает из леммы 12. Эквивалентность условий 2) и 3) вытекает из утверждения 5 леммы 5. Эквивалентность условий 4) и 5) вытекает из леммы 9. Импликации 5) $\Longrightarrow$ 3) и 3) $\Longrightarrow$ 4) проверяются непосредственно. $\square$

Окончание доказательства теоремы 1. При $\mathrm{SI}(A_A) \neq A$ утверждение вытекает из леммы 13. При $\mathrm{SI}(A_A) = A$ утверждение вытекает из леммы 6. $\square$

Литература

[1] Абызов А. Н. Замкнутость слабо регулярные модулей относительно прямых сумм // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2003. — № 9. — С. 3—5.

[2] Абызов А. Н. Слабо регулярные модули над полусовершенными кольцами // Чебышёвский сб. — 2003. — Т. 4, № 1. — С. 4—9.

[3] Абызов А. Н. Слабо регулярные модули // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2004. — № 3. — С. 3—6.

[4] Туганбаев А. А. Модули с большим числом прямых слагаемых // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 8. — С. 233—241.

[5] Туганбаев А. А. Кольца, над которыми все модули полурегулярны // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 2. — С. 185—194.

[6] Хакми Х. И. Сильно регулярные и слабо регулярные кольца и модули // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1994. — № 5. — С. 60—65.

[7] Dung N. V., Smith P. F. On semiartinian V-modules // J. Pure Appl. Algebra. — 1992. — Vol. 82, no. 1. — P. 27—37.

[8] Hamza H. I_0-rings and I_0-modules // Math. J. Okayama Univ. — 1998. — Vol. 40. — P. 91—97.

[9] Nicholson W. K. I-rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 207. — P. 361—373.

[10] Tuganbaev A. A. Rings Close to Regular. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.

[11] Tuganbaev A. A. Semiregular, weakly regular, and π-regular rings // J. Math. Sci. — 2002. — Vol. 109, no. 3. — P. 1509—1588.

[12] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. — Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.