

Мономиальность конечных групп с некоторыми условиями на классы сопряжённых элементов

С. Н. ФЁДОРОВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: Sergey.Fedorov@mail.ru

УДК 512.542+512.547.21

Ключевые слова: мономиальная группа, M -группа, классы сопряжённых элементов.

Аннотация

Представлены некоторые условия арифметического характера на множество классов сопряжённых элементов конечной группы, достаточные для её мономиальности, т. е. для того, чтобы все её неприводимые комплексные характеры индуцировались линейными характерами подгрупп.

Abstract

S. N. Fedorov, Monomiality of finite groups with some conditions on conjugacy classes, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 5, pp. 201–212.

We expose some arithmetical type conditions on the set of conjugacy classes of a finite group that are sufficient for the monomiality of the group, i.e., for the property that all its irreducible complex characters are induced by linear characters of subgroups.

1. Введение

Конечная группа G называется *мономиальной* или *M -группой*, если все её неприводимые характеры индуцируются линейными характерами подгрупп группы G . Это означает, что в некотором базисе неприводимые представления группы G имеют матрицы мономиального вида, т. е. матрицы с ровно одним ненулевым элементом в каждом столбце и каждой строке.

В 1930 г. К. Такета [13] доказал, что M -группы разрешимы. Обратное неверно: существуют примеры разрешимых не- M -групп, минимальная по порядку из которых — группа $SL(2, 3)$ порядка 24 [9, 24.7с]. Класс M -групп замкнут относительно перехода к гомоморфным образам и прямым произведениям. Специфическим свойством M -групп является то, что их подгруппы сами не обязаны быть мономиальными. Более того, как было показано Э. Дейдом (см. [12]), любая разрешимая группа изоморфно вкладывается в M -группу с теми же производной и нильпотентной длинами, множеством простых делителей порядка

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 5, с. 201–212.

© 2007 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

группы и т. д. Это сильно затрудняет теоретико-групповой характеристику мономиальных групп.

Из-за указанного свойства целесообразно бывает рассматривать также $\tilde{\mathcal{M}}$ -группы, т. е. те мономиальные группы, все подгруппы которых тоже мономиальны. Известно, что метабелевы группы, сверхразрешимые группы, а также разрешимые группы, все силовские подгруппы которых абелевы (так называемые $\mathcal{A}$ -группы), являются $\tilde{\mathcal{M}}$ -группами [10, 14].

Данная работа посвящена поиску достаточных условий мономиальности конечной группы, имеющих арифметический характер. Доказана достаточность для мономиальности группы ряда условий на количество и мощности классов сопряжённых элементов.

2. Обозначения и предварительные сведения

Все упоминаемые далее группы подразумеваются конечными. Представления и характеры рассматриваются над полем комплексных чисел. В тексте используются следующие обозначения:

x^g — элемент, сопряжённый с x посредством g ; $x^g = g^{-1}xg$;

x^G — класс сопряжённости в G , порождённый элементом x ; $x^G = \{x^g \mid g \in G\}$;

G_π — холлова π -подгруппа группы G , в частности G_p — силовская p -подгруппа;

$\pi(G)$ — множество простых делителей порядка группы G ;

$\text{cs}(G)$ — множество мощностей классов сопряжённых элементов группы G ;

$\text{cs}^*(G)$ — набор мощностей классов сопряжённых элементов группы G с учётом кратностей;

$\text{bcs}(G)$ — наибольшая из мощностей классов сопряжённых элементов группы G ;

$k(G)$ — количество классов сопряжённых элементов в группе G ;

$\text{Irr}_1(G)$ — множество нелинейных неприводимых характеров группы G ;

$\text{Lin}(G)$ — множество линейных характеров группы G ;

$\text{cd}(G)$ — множество степеней неприводимых характеров группы G ;

$\Gamma(G)$ — граф классов сопряжённых элементов группы G (см. определение 2.6);

C_n — циклическая группа порядка n ;

Q_n — обобщённая группа кватернионов порядка n ;

D_n — группа диэдра порядка $2n$.

Приведём некоторые необходимые определения и утверждения.

Экстраспециальная p -группа — это группа порядка p^{2m+1} с циклическими центром и коммутантом $Z(G) = G'$, $|G'| = p$, такая что $G/Z(G)$ — элементарная абелева группа порядка p^{2m} .

Назовём $\mathcal{H}_2$ -группой группу кватернионов Q_8 порядка 8, а $\mathcal{H}_p$ -группой, где p — нечётное простое число, — экстраспециальную p -группу порядка p^3 экспоненты p . Тогда $\mathcal{H}_p$ -свободной группой будем называть группу, которая не имеет сечений, являющихся $\mathcal{H}_p$ -группами. Условие, что группа G $\mathcal{H}_p$ -свободна, эквивалентно тому, что силовские p -подгруппы группы G $\mathcal{H}_p$ -свободны (см. лемма 2.1).

$\mathcal{Z}$ -группа — это группа, у которой все силовские подгруппы циклические.

$\mathcal{A}$ -группа — это разрешимая группа, у которой все силовские подгруппы абелевы.

Лемма 2.1. Пусть p — простое число, $\mathcal{P}$ — некоторое свойство p -групп. Группа G не имеет сечений, обладающих свойством $\mathcal{P}$, тогда и только тогда, когда силовские p -подгруппы группы G не имеют сечений, обладающих свойством $\mathcal{P}$.

Доказательство. Необходимость условия очевидна, так как сечение подгруппы является сечением всей группы.

Докажем достаточность. Допустим, что группа G содержит подгруппу L , некоторая фактор-группа L/N которой обладает свойством $\mathcal{P}$, причём $L \not\subseteq G_p$. Пусть $T \in \text{Syl}_p(L)$. Тогда

$$L/N = NT/N \cong T/T \cap N = T/N_p.$$

Значит, группа G_p имеет сечение T/N_p со свойством $\mathcal{P}$. □

Лемма 2.2 [9, 15.5]. Если $N \triangleleft G$, то $|x^N| \mid |x^G|$ и $|(xN)^{G/N}| \mid |x^G|$.

Наиболее близкий к критерию достаточный признак мономиальности группы (среди теоретико-групповых условий такого типа) на сегодняшний день представлен следующей теоремой Г. М. Зейца [12, теорема 2.4].

Теорема 2.3. Пусть $\mathcal{C}$ — объединение таких классов разрешимых групп $\mathcal{X}$, что

- 1) $\mathcal{X}$ замкнут относительно взятия подгрупп;
- 2) $\mathcal{X}$ замкнут относительно гомоморфизмов;
- 3) $\mathcal{X}$ состоит из $\mathcal{M}$ -групп;
- 4) $G/Z(G)$ принадлежит $\mathcal{X}$ тогда и только тогда, когда G принадлежит $\mathcal{X}$.

Пусть G — разрешимая группа, $N \triangleleft G$ и $G/N \in \mathcal{X}$. Предположим, что группа N $\mathcal{H}_p$ -свободна для каждого простого p . Тогда G — $\mathcal{M}$ -группа.

Определение 2.4. Квазифробениусовой называют такую группу G , что фактор-группа $G/Z(G)$ является группой Фробениуса. При этом ядро и дополнение квазифробениусовой группы G — прообразы ядра и дополнения группы Фробениуса $G/Z(G)$ (при естественном гомоморфизме).

Это обобщение понятия группы Фробениуса, поскольку последняя имеет, очевидно, тривиальный центр. Иногда бывает удобнее пользоваться сформулированным в следующем предложении эквивалентным определением квазифробениусовой группы, которое аналогично определению группы Фробениуса.

Предложение 2.5. *Группа G квазифробениусова тогда и только тогда, когда G обладает нецентральной подгруппой H с условием $H \cap H^g \subseteq Z(G)$ для всех $g \in G - H$. В этом случае H — дополнение квазифробениусовой группы G , а $N = G - \bigcup_{g \in G} (H - Z(G))^g$ — её ядро.*

Доказательство. Пусть $\pi: G \rightarrow \bar{G} = G/Z(G)$ — естественный гомоморфизм.

Докажем необходимость. Пусть $\bar{G}$ — группа Фробениуса с дополнением $\bar{H}$. Рассмотрим в G подгруппу H — прообраз $\bar{H}$ (т. е. H — дополнение квазифробениусовой группы G). Поскольку $\bar{H} \cap \bar{H}^{\bar{g}} = 1$ для любого $\bar{g} \in \bar{G} - \bar{H}$, то $H \cap H^g \subseteq \text{Ker } \pi = Z(G)$ для любого $g \in G - H$.

Докажем достаточность. По условию $H \not\subseteq Z(G)$ и $H \cap H^g \subseteq Z(G)$ для всех $g \in G - H$. Имеем вложение $Z(G) \subset H$, иначе нашёлся бы элемент $z \in (G - H) \cap Z(G)$, но для него $H \cap H^z = H$ — противоречие. Пусть $\bar{H} = \pi(H)$. Возьмём произвольный элемент $\bar{g} \in \bar{G} - \bar{H}$ и некоторый g из его прообраза. Тогда

$$\bar{H} \cap \bar{H}^{\bar{g}} = \pi(H \cap H^g) \subseteq \pi(Z(G)) = 1.$$

По теореме Фробениуса $G/Z(G)$ — фробениусова группа с дополнением $\bar{H} = H/Z(G)$.

По теореме Виландта (см. [2, (35.5)]) множество $N = G - \bigcup_{g \in G} (H - Z(G))^g$ является нормальной подгруппой группы G . Рассмотрим образ подгруппы N при действии гомоморфизма π . Сначала заметим, что для любого гомоморфизма групп $\psi: U \rightarrow V$ справедливо

$$\psi(X \cup Y) = \psi(X) \cup \psi(Y), \quad \psi(X - Y) \supseteq \psi(X) - \psi(Y), \quad X, Y \subseteq U.$$

В нашем случае

$$1 \notin \pi(H - \text{Ker } \pi) \subseteq \pi(H) - 1 = \pi(H) - \pi(\text{Ker } \pi),$$

т. е. $\pi(H - Z(G)) = \pi(H) - \pi(Z(G))$. Поэтому

$$\pi\left(\bigcup_{g \in G} (H - Z(G))^g\right) = \bigcup_{g \in G} \left(\pi(H) - \pi(Z(G))\right)^{\pi(g)} = \bigcup_{\bar{g} \in \bar{G}} (\bar{H} - 1)^{\bar{g}}.$$

Допустим теперь, что в N существует элемент n , для которого

$$\pi(n) \in \bigcup_{\bar{g} \in \bar{G}} (\bar{H} - 1)^{\bar{g}}.$$

Для некоторого $\bar{g}$ имеем $\pi(n) \in \bar{H}^{\bar{g}}$, т. е. $\pi(n) = \bar{g}^{-1} \bar{h} \bar{g}$, $\bar{h} \in \bar{H}$. Если мы возьмём $n' = g n g^{-1} \in N$, то $\pi(n') = \bar{h}$. Получаем $n' \in \pi^{-1}(\bar{H}) = H$, точнее,

$n' \in N \cap H = Z(G)$. Таким образом, $\pi(n) = \pi(n')^{\bar{g}} = \bar{1}$, что противоречит выбору n . Это означает, что

$$\pi(N) \subseteq \bar{G} - \bigcup_{\bar{g} \in \bar{G}} (\bar{H} - \bar{1})^{\bar{g}}.$$

Итак,

$$N/Z(G) = G/Z(G) - \bigcup_{\bar{g} \in G/Z(G)} (H/Z(G) - \bar{1})^{\bar{g}}.$$

Значит, определённая в предложении подгруппа N является прообразом ядра группы Фробениуса $G/Z(G)$, т. е. ядром квазифробениусовой группы G . $\square$

В исследовании свойств конечных групп при заданном наборе мощностей классов сопряжённых элементов удобным и эффективным инструментом является граф, описанный ниже.

Определение 2.6. *Граф классов сопряжённых элементов $\Gamma(G)$ группы G — это граф, множеству вершин которого поставлено в соответствие множество всех нецентральных классов сопряжённых элементов группы G и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда мощности соответствующих им классов имеют нетривиальный общий делитель.*

Впервые подобного вида граф ввёл в рассмотрение Л. С. Казарин [1], но в его графе вершины соединяются ребром, если мощности соответствующих им классов сопряжённости взаимно просты.

Граф $\Gamma(G)$ либо связан, либо имеет две компоненты связности, и в последнем случае G — квазифробениусова группа с абелевыми ядром N и дополнением H . Данный результат получен в [4], хотя он (по крайней мере его вторая часть) может быть без особого труда выведен из [1]. Поскольку для квазифробениусовой группы справедливо $G/N \cong H/Z(G)$, в случае несвязного графа $\Gamma(G)$ группа G является метабелевой.

3. Вспомогательные результаты

Лемма 3.1. *Если мощности всех классов сопряжённых элементов группы G являются степенями некоторого простого числа p , т. е.*

$$\text{cs}(G) = \{1, p^{\alpha_1}, \dots, p^{\alpha_k}\}, \quad \text{где } 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k,$$

то G нильпотентна и $|G|$ делится на $p^{\alpha_1 + \alpha_k}$.

Доказательство. Пусть n_j , $0 \leq j \leq k$, — это количество классов сопряжённых элементов мощности p^{α_j} . Тогда

$$|G| = n_0 + n_1 p^{\alpha_1} + \dots + n_k p^{\alpha_k}.$$

Очевидно, $p^{\alpha_1} \mid n_0$. Число n_0 , как количество элементов с тривиальными орбитами (при сопряжении), в точности равно $|Z(G)|$. Таким образом, G имеет нетривиальный центр и $p^{\alpha_1} \mid |Z(G)|$.

Рассмотрим теперь фактор-группу $G/Z(G)$. По лемме 2.2 $|(xZ(G))^{G/Z(G)}|$ делит $|x^G|$. Значит, мощности классов сопряжённости группы $G/Z(G)$ тоже степени числа p . По доказанному выше $G/Z(G)$ имеет нетривиальный центр $Z_1/Z_0 = Z(G/Z_0)$, где $Z_0 = Z(G)$. Далее будем рассматривать G/Z_1 . Продолжая этот процесс, через конечное число шагов получим верхний центральный ряд

$$Z(G) = Z_0 \triangleleft Z_1 \triangleleft \dots \triangleleft Z_m = G, \text{ где } Z_{i+1}/Z_i = Z(G/Z_i).$$

Итак, группа G нильпотентна.

Возьмём какой-нибудь элемент $x \in G$ из самого большого класса сопряжённости (мощности p^{α_k}). Поскольку $Z(G) \leq C_G(x)$, p^{α_1} делит $|C_G(x)|$. С другой стороны,

$$|C_G(x)| = \frac{|G|}{|x^G|} = \frac{|G|}{p^{\alpha_k}}.$$

Значит, порядок группы G делится на $p^{\alpha_1} p^{\alpha_k}$. $\square$

Замечание 3.2. Нильпотентность группы в предыдущей лемме можно было доказать и по-другому, используя результат Д. Чиллага и М. Герцога [5] о том, что простое число p не делит мощность ни одного класса сопряжённости тогда и только тогда, когда $G_p \leq Z(G)$. Если G — p -группа, то утверждение леммы очевидно. Для каждого простого $q_i \mid |G|$, $q_i \neq p$, $i = 1, \dots, s$, согласно [5] $G_{q_i} \leq Z(G)$, поэтому $G_{p'} = G_{q_1} \times \dots \times G_{q_s} \leq Z(G)$. Из равенства $G = G_p G_{p'}$ получаем $G_p \triangleleft G$. Таким образом, $G = G_p \times G_{q_1} \times \dots \times G_{q_s} \triangleleft G$.

Лемма 3.3. Пусть множество $\text{cs}(G)$ содержит простое число p . Если справедливо неравенство $\text{bcs}(G) < 2p$, то G либо нильпотентна, либо квазифробениусова с абелевыми ядром и дополнением.

Доказательство. Если множество $\text{cs}(G)$ состоит из двух чисел (1 и p), то по лемме 3.1 группа G нильпотентна.

Пусть теперь $\text{cs}(G) = \{1, a_1, \dots, a_l, p\}$. Рассмотрим граф $\Gamma(G)$ классов сопряжённых элементов группы G . Поскольку по условию $(p, a_i) = 1$ для всех a_i , $1 \leq i \leq l$, подграф, состоящий из вершин, соответствующих классам мощности p , образует компоненту связности графа $\Gamma(G)$. Таким образом, $\Gamma(G)$ имеет больше одной компоненты связности и согласно [4] G — квазифробениусова группа с абелевыми ядром и дополнением. $\square$

Следующее утверждение взято из [11], оно даётся в слегка изменённой формулировке для удобства проведения дальнейших выкладок.

Предложение 3.4. Если для любого простого числа p группа G имеет не более четырёх классов сопряжённых элементов, мощности которых делятся на p , то G изоморфна группе одного из следующих типов:

- 1) абелева группа;
- 2) прямое произведение циклической группы порядка 2 и неабелевой группы порядка 21;
- 3) Q_8 ;

- 4) D_n , где $n \in \{4, 5, 7, 9\}$, $D_5 \times C_2$;
- 5) $\langle x, y \mid x^m = y^k = 1, y^x = y^{-1} \rangle$, где $(m, k) \in \{(4, 3), (4, 5), (8, 3)\}$,
 $\langle x, y \mid x^4 = y^3 = 1, y^x = y^{-1} \rangle \times C_2$;
- 6) $S_3, S_3 \times C_n$, где $n \in \{2, 3, 4\}$, $S_3 \times C_2 \times C_2$;
- 7) группа Фробениуса $(C_k)^l \rtimes C_m$, где $(k, l, m) \in \{(2, 2, 3), (2, 4, 5), (3, 2, 2),$
 $(3, 2, 4), (5, 1, 4), (7, 1, 3), (11, 1, 5), (13, 1, 3), (13, 1, 4), (17, 1, 4)\}$;
- 8) группа Фробениуса $Q_8(C_3 \times C_3)$;
- 9) $A_4 \times C_2, S_4$;
- 10) $A_5, \text{PSL}(2, 7)$.

Замечание 3.5. Условие предыдущего предложения можно переформулировать. Для этого достаточно использовать следующие несложные утверждения.

1. Для любых n различных классов сопряжённости $g_{i_1}^G, g_{i_2}^G, \dots, g_{i_n}^G$ группы G

$$\text{НОД}(|g_{i_1}^G|, |g_{i_2}^G|, \dots, |g_{i_n}^G|) = 1$$

тогда и только тогда, когда группа G для любого простого p имеет не более $n - 1$ классов сопряжённых элементов, мощности которых делятся на p .

2. Если граф $\Gamma(G)$ классов сопряжённых элементов группы G не содержит полного подграфа с n вершинами, то любые n (различных) классов имеют взаимно простые в совокупности мощности, т. е.

$$\text{НОД}(|g_{i_1}^G|, |g_{i_2}^G|, \dots, |g_{i_n}^G|) = 1.$$

(Обратное, вообще говоря, неверно.)

Рассмотрим группы, перечисленные в предложении 3.4.

Сначала заметим, что группа из пункта 2) предложения имеет порядок $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, значит, она является $\mathcal{Z}$ -группой.

Теперь возьмём группу, заданную следующими порождающими и определяющими соотношениями:

$$G_{m,n} = \langle x, y \mid x^m = y^n = 1, y^x = y^{-1} \rangle.$$

В частности, в таком виде представимы группы $D_n = G_{2,n}$, $S_3 = G_{2,3}$. Группа $G_{m,n}$ имеет нормальную подгруппу $\langle y \rangle$, причём $G/\langle y \rangle \cong \langle x \rangle$, т. е. $G_{m,n}$ метациклическая. Это же справедливо для группы кватернионов Q_{2^t} , являющейся гомоморфным образом группы $G_{4,2^t}$. Подгруппа $\langle y \rangle \times C_k$ нормальна в группе $G_{m,n} \times C_k$, и $(G_{m,n} \times C_k)/(\langle y \rangle \times C_k) \cong \langle x \rangle$. Таким образом, группа $G_{m,n} \times C_k$ по крайней мере метабелева, а когда $(n, k) = 1$, можно утверждать, что она метациклическая, так как в этом случае $\langle y \rangle \times C_k$ циклическая (сюда относятся группы $S_3 \times C_2$, $S_3 \times C_4$, $D_5 \times C_2$, $G_{4,3} \times C_2$). Поскольку $S_3 \times C_2$ метациклическая, для группы $S_3 \times C_2 \times C_2$ аналогично предыдущему устанавливаем, что она метабелева.

Итак, в пунктах 2)–5) предложения 3.4 фигурируют только метациклические группы, в пункте 6) — сверхразрешимые метабелевы ненильпотентные

группы (S_3 ненильпотентна). Группы Фробениуса из пункта 7) также являются ненильпотентными (как все группы Фробениуса) и метаболевыми.

Группа Фробениуса $Q_8(C_3 \times C_3)$, согласно результатам [3], является ненильпотентной $\mathcal{M}$ -группой.

Группа S_4 является $\tilde{\mathcal{M}}$ -группой (по теореме 2.3, где $N = A_4$), поэтому группы пункта 9) несверхразрешимые $\mathcal{M}$ -группы.

Наконец, простые неабелевы группы A_5 и $\text{PSL}(2, 7)$ имеют соответственно пять и шесть классов сопряжённых элементов и $\text{cs}(A_5) = \{1, 12, 15, 20\}$, $\text{cs}(\text{PSL}(2, 7)) = \{1, 21, 24, 42, 56\}$ [6].

Таким образом, мы получаем следующее утверждение.

Следствие 3.6. *Если мощности любых пяти различных классов сопряжённых элементов группы G взаимно просты в совокупности, то либо G — $\mathcal{M}$ -группа, либо G изоморфна A_5 или $\text{PSL}(2, 7)$.*

Данное следствие можно сформулировать и в терминах свойств графа $\Gamma(G)$, хотя при этом оно будет несколько более слабым.

Следствие 3.7. *Если граф классов сопряжённых элементов $\Gamma(G)$ группы G не содержит полных подграфов с пятью вершинами, то либо G — $\mathcal{M}$ -группа, либо $G \cong A_5$.*

Доказательство. Согласно второму утверждению замечания 3.5 условие доказываемого утверждения является частным случаем гипотезы следствия 3.6. Поэтому остаётся только заметить, что для группы $G = \text{PSL}(2, 7)$ имеем $\text{cs}^*(G) = \{1, 21, 24, 24, 42, 42, 56\}$ и её граф $\Gamma(G)$ является полным графом с пятью вершинами, что противоречит условию. $\square$

При доказательстве теоремы 4.1 нам также потребуется следующая оценка порядка группы с помощью числа классов сопряжённых элементов и наибольшей из их мощностей.

Лемма 3.8. *Пусть группа G неметаболева. Если $\text{bcs}(G) = b \geq 3$ и $k(G) = k$, то $|G| \leq b(k - 2)$.*

Доказательство. Пусть k_n — число классов сопряжённых элементов группы G мощности n . Тогда, учитывая, что $k_1, k_b \geq 1$, запишем равенство

$|G| = \sum_{n=1}^b nk_n$ в виде

$$|G| = \begin{array}{ccc} k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_b & k + \\ + k_2 + k_3 + \dots + k_b & k - 1 + \\ + k_3 + \dots + k_b & k - 1 + \\ \vdots & \vdots \\ + k_{b-1} + k_b & k - 1 + \\ + k_b & k - 2 \end{array} \leq b(k - 1).$$

Неравенство $k_b \leq k - 2$ в нижней строке следует из того, что $k_b \neq k - 1$, так как иначе $k_1 = 1$ и $|G| = 1 + b(k - 1)$ не делится на b .

Допустим, что имеет место равенство $|G| = b(k-1)$. Тогда

$$k_1 = 1, \quad k_2 = \dots = k_{b-2} = 0, \quad k_{b-1} = 1, \quad k_b = k-2,$$

т. е. $\text{cs}(G) = \{1, b-1, b\}$. Поскольку $(b, b-1) = 1$, граф $\Gamma(G)$ несвязен. Это означает, в частности, что G метабелева [4]. Противоречие с условием леммы влечёт строгое неравенство $|G| < b(k-1)$, а так как $b \mid |G|$, то $|G| \leq b(k-2)$. $\square$

Условие неметабелевости в предыдущей лемме можно, конечно, заменить более слабым (условием неизоморфности квазифробениусовой метабелевой группы), но нам это не будет нужно. Совсем же убрать это условие нельзя, как показывают примеры группы S_3 с $b=3$ и $k=3$ и группы Фробениуса $C_5 \rtimes C_4$ с $b=5$ и $k=5$. Заметим также, что равенство в утверждении леммы достигается, например, при $G \cong A_5$. В этом случае $|G| = 60$, $\text{bcs}(G) = 20$, $k(G) = 5$.

4. Основные результаты

Теперь мы можем сформулировать несколько достаточных условий мономиальности конечной группы, которые представляют собой ограничения на такие числовые характеристики группы, как количество классов сопряжённых элементов и максимальное значение мощностей этих классов.

Теорема 4.1. Пусть для количества $k(G)$ классов сопряжённых элементов группы G и наибольшей из их мощностей $\text{bcs}(G)$ справедливо одно из следующих предположений:

- 1) $\text{bcs}(G)$ — простое число;
- 2) $\text{bcs}(G) \leq 9$ и $6 \notin \text{cs}(G)$;
- 3) $k(G) \leq 6$, кроме случаев $(k(G), \text{bcs}(G)) = (5, 20), (6, 56)$;
- 4) $\text{bcs}(G) = 6$ и $8 \leq k(G) \leq 13$.

Тогда G — $\mathcal{M}$ -группа.

Доказательство. Случай простого $\text{bcs}(G)$ разобран в лемме 3.3.

Пусть выполнено условие 2). Равенство $\text{bcs}(G) = 1$ равносильно абелевости группы G . По условию $\text{cs}(G) \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$. Если 5 или 7 лежат в $\text{cs}(G)$, то применим лемму 3.3. Аналогично если числа 3 и 9 (оба или одно из них) принадлежат множеству $\text{cs}(G)$, то соответствующие им классы сопряжённости образуют отдельную компоненту связности в графе $\Gamma(G)$. Остаётся рассмотреть случай, когда $\text{cs}(G)$ содержит только степени числа 2, но здесь можно воспользоваться леммой 3.1.

Рассмотрим случай 3). Пусть $k(G) = 6$. Допустим сначала, что центр группы тривиален. Тогда G имеет пять нецентральных классов сопряжённых элементов $g_1^G, g_2^G, \dots, g_5^G$. Если $n = \text{НОД}(|g_1^G|, |g_2^G|, \dots, |g_5^G|) \neq 1$, то из равенства

$$|G| = |Z(G)| + |g_1^G| + |g_2^G| + |g_3^G| + |g_4^G| + |g_5^G|$$

получаем $n \mid |Z(G)|$, что неверно. Значит, $\text{НОД}(|g_1^G|, |g_2^G|, \dots, |g_5^G|) = 1$ и согласно следствию 3.6 G — $\mathcal{M}$ -группа при условии, что она неизоморфна $\text{PSL}(2, 7)$ (A_5 здесь не подходит: у неё пять классов сопряжённости).

Если же $|Z(G)| \geq 2$, то граф $\Gamma(G)$ содержит не более четырёх вершин, поэтому в нём, конечно, нет полного подграфа с пятью вершинами. Последнее справедливо и для любой группы с $k(G) \leq 5$. С учётом следствия 3.7 заключаем, что группа G мономиальная или A_5 .

Осталось только заметить, что группы A_5 и $\text{PSL}(2, 7)$ исключены из рассмотрения условием $(k(G), \text{bcs}(G)) \neq (5, 20), (6, 56)$.

Пусть выполнено условие 4). Если $4 \notin \text{cs}(G)$, то все числа из $\text{cs}(G)$ свободны от квадратов и, следовательно, G сверхразрешима [5]. Поэтому будем считать, что множество $\text{cs}(G)$ содержит 4 (и 6 по условию). Используя лемму 3.3, мы можем без ограничения общности исключить из рассмотрения случай, когда $5 \in \text{cs}(G)$. Итак, считаем, что $\{1, 4, 6\} \subseteq \text{cs}(G) \subseteq \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Из этого следует, что порядок группы G должен делиться на $\text{НОК}(4, 6) = 12$. Кроме того, по лемме 3.8 либо $|G| \leq 66$, либо G метабелева. В последнем случае доказательство можно считать завершённым, поэтому считаем, что имеет место первый. Возможные значения для порядка группы G , таким образом, содержатся в множестве $\{12, 24, 36, 48, 60\}$. Разберём все получившиеся варианты.

Если группа порядка 60 неразрешима, то она изоморфна группе A_5 , у которой пять классов сопряжённости. Значит, по условию группа G разрешима, и тогда, если её порядок равен $12 = 2^2 \cdot 3$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$ или $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, она является $\mathcal{A}$ -группой. Единственная немономиальная группа порядка 24 — это $\text{SL}(2, 3)$, но она исключается условием $k(G) \geq 8$. Поэтому остаётся рассмотреть только один вариант.

Итак, пусть $|G| = 48$. Заметим, что $|\text{Lin}(G)| \leq k(G) - 1 \leq 12$. Выпишем в таблицу все возможные наборы степеней неприводимых характеров группы G при условии $8 \leq k(G) \leq 13$, получаемые простым перебором (ясно, что $\text{cs}(G) \subseteq \{1, 2, 3, 4, 6\}$):

$ \text{Lin}(G) $	$\sum_{\text{Irr}(G)} \chi(1)^2$	$\text{cd}(G), k = k(G)$
12	36	$\{1, 6\}, k = 13$
8	40	$\{1, 2, 6\}, k = 10; \{1, 2, 4\}, k = 12; \{1, 2, 3\}, k = 13$
6	42	$\{1, 2, 3, 4\}, k = 11$
4	44	$\{1, 2, 4\}, k = 9, 12; \{1, 2, 3\}, k = 10$
3	45	$\{1, 2, 3, 4\}, k = 10; \{1, 3\}, k = 8; \{1, 2, 3\}, k = 13$
2	46	$\{1, 2, 3, 4\}, k = 8; \{1, 2, 3\}, k = 11$

Рассмотрим имеющиеся возможности.

1. Если $\text{cd}(G) = \{1, 3\}$ или $\{1, 6\}$, то согласно [9, теорема 27.1] $G'' = 1$, т. е. G метабелева.

2. Если $\text{cd}(G) = \{1, 2, 4\}$ или $\{1, 2, 6\}$, то для любого $\chi \in \text{Irr}_1(G)$ $\chi(1)$ делится на 2. По теореме Томпсона (см. [9, теорема 23.3]) группа G имеет нормальное 2-дополнение, т. е. $G_3 \triangleleft G$. Таким образом, G является расширением циклической группы G_3 с помощью нильпотентной группы G_2 , в частности, она сверхразрешима.

3. Пусть $\text{cd}(G) = \{1, 2, 3\}$. В [9, с. 437] отмечено, что в таком случае $G/Z(G) \cong S_4$ или $G/Z(G) \cong A_4$. Но $\text{bcs}(S_4) = 8$, поэтому S_4 не может быть фактор-группой G . Следовательно, $G/Z(G) \cong A_4$.

Очевидно, $|Z(G)| = 4$. Учитывая, что $|G| = 48$, $\text{cs}^*(A_4) = \{1, 3, 4, 4\}$ и $\text{bcs}(G) = 6$, получаем, что $\text{cs}^*(G) = \{1, 1, 1, 1, 3, 3, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 6\}$, $k(G) = 13$.

Поскольку $Z(A_4) = 1$, то $Z(G) \cap H = 1$, где H — подгруппа, изоморфная A_4 (порядка 12). Поэтому $G = Z(G) \rtimes H$. Таким образом, G — расщепляемое расширение абелевой группы $Z(G)$ при помощи $\mathcal{M}$ -группы H . Согласно [7] такая группа G мономиальна.

Заметим, что группа $\text{SL}(2, 3)$ не может быть ни фактор-группой, ни нормальной подгруппой группы G , так как в противном случае мощность каждого её класса сопряжённых элементов делила бы мощность соответствующего класса группы G (лемма 2.2), но у $\text{SL}(2, 3)$ четыре класса мощности 4, а у G — только два класса, мощности которых делятся на 4. Любая подгруппа в G порядка 24 нормальна в G и, следовательно, неизоморфна $\text{SL}(2, 3)$, поэтому она мономиальна. Подгруппы группы G порядка, меньшего 24, очевидно мономиальны. Значит, G — $\mathcal{M}$ -группа.

4. Пусть $\text{cd}(G) = \{1, 2, 3, 4\}$. Согласно [8] группа G содержит такую нормальную подгруппу M , что $G/Z(M) \cong S_4$. Как и выше, получаем противоречие с тем, что $\text{bcs}(G) = 6$. $\square$

Для того чтобы показать, почему в условиях теоремы 4.1 приходится накладывать настолько сильные ограничения на $k(G)$ и $\text{bcs}(G)$, составим таблицу значений этих характеристик для нескольких немомиальных групп.

G	$k(G)$	$\text{cs}(G)$
$\text{SL}(2, 3)$	7	$\{1, 4, 6\}$
$\text{GL}(2, 3)$	8	$\{1, 6, 8, 12\}$
$\text{SL}(2, 3) \times C_2$	14	$\{1, 4, 6\}$
A_5	5	$\{1, 12, 15, 20\}$
S_5	7	$\{1, 10, 15, 20, 24, 30\}$
$\text{PSL}(2, 7)$	6	$\{1, 21, 24, 42, 56\}$

В заключение как следствие одного из предыдущих утверждений сформулируем очень простой достаточный признак момиальности групп Фробениуса в терминах классов сопряжённых элементов.

Предложение 4.2. Пусть G — группа Фробениуса с ядром N . Тогда G — $\mathcal{M}$ -группа, если $\frac{\text{bcs}(G)}{|N|}$ равно 1, 4 или любому простому числу.

Доказательство. Для доказательства этого факта достаточно заметить, что $\text{bcs}(G) = |N|\text{bcs}(H)$, где H — дополнение группы Фробениуса G . Действительно, если рассматривать действие группы G на подгруппах сопряжения, то непосредственно из определения группы Фробениуса получаем, что

$$|\{H^g \mid g \in G\}| = \frac{|G|}{|N_G(H)|} = \frac{|G|}{|H|} = |N|.$$

Соответственно, для любого $h \in H$ класс h^G содержит $|N|$ копий класса h^H . С другой стороны, если $h_1, h_2 \in H$ не сопряжены в H , то они не сопряжены и в G (по определению). Таким образом, для каждого $h \in H$ имеем $|h^G| = |N| \cdot |h^H|$, и так как очевидно, что это больше, чем $|x^G|$, для любого $x \in N \triangleleft G$, то $\text{bcs}(G) = |N|\text{bcs}(H)$.

Итак, по условию $\text{bcs}(H)$ равно 1, 4 или p , где p простое. Согласно теореме 4.1 H является $\mathcal{M}$ -группой. Нетрудно показать (см. [3]), что в этом случае G — $\mathcal{M}$ -группа. $\square$

Литература

- [1] Казарин Л. С. О группах с изолированными классами сопряжённых элементов // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1981. — № 7 (230). — С. 40–45.
- [2] Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. — М.: Наука, 1969.
- [3] Фёдоров С. Н. Признаки мономиальности группы Фробениуса // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2007. — № 5. — С. 64–65.
- [4] Bertram E., Herzog M., Mann A. On a graph related to conjugacy classes of groups // Bull. London Math. Soc. — 1990. — Vol. 22. — P. 569–575.
- [5] Chillag D., Herzog M. On the length of the conjugacy classes of finite groups // J. Algebra. — 1990. — Vol. 131, no. 1. — P. 110–125.
- [6] Conway J., Curtis R., Norton S., Parker R., Wilson R. Atlas of Finite Groups: Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups. — Oxford: Clarendon Press, 1985.
- [7] Horváth E. On a problem of finite solvable groups // Mat. Lapok. — 1987. — Vol. 34, no. 1–3. — P. 99–108.
- [8] Huppert B. A characterization of $\text{GL}(2, 3)$ and $\text{SL}(2, 5)$ by the degrees of their representations // Forum Math. — 1989. — Vol. 1. — P. 167–183.
- [9] Huppert B. Character Theory of Finite Groups. — Berlin: Walter de Gruyter, 1998.
- [10] Itô N. Note on A -groups // Nagoya Math. J. — 1952. — Vol. 4. — P. 79–81.
- [11] Moretó A., Qian G., Shi W. Finite groups whose conjugacy class graphs have few vertices // Arch. Math. — 2005. — Vol. 85, no. 2. — P. 101–107.
- [12] Seitz G. M. M -groups and the supersolvable residual // Math. Z. — 1969. — Vol. 110, no. 2. — P. 101–122.
- [13] Taketa K. Über die Gruppen, deren Darstellungen sich sämtlich auf monomiale Gestalt transformieren lassen // Proc. Japan. Imp. Acad. — 1930. — Vol. 6. — P. 31–33.
- [14] Zassenhaus H. Über endliche Fastkörper // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1935/1936. — P. 187–220.