Предисловие

Теория детских рисунков, начало которой было положено Александром Гротендиком в период его работы в Монпелье (1970—1985), доставляет поразительную возможность *визуализации* арифметических объектов. Более того, оказывается, что вся арифметическая информация кодируется в простых комбинаторных образах; говоря техническим языком, соответствующие *категории* эквивалентны.

Первый, а лучше сказать нулевой, случай эквивалентности подобного рода знаком каждому с раннего детства: счёт устанавливает эквивалентность между 0-мерными топологическими объектами (дискретными конечными пространствами) и натуральными числами. Насколько мне известно, размерность 1 пропускается современной математикой: мы не знаем арифметических объектов, соответствующих *абстрактным конечным графам*. Однако как только мы переходим от абстрактных графов к *ленточным*, или, что то же самое, фиксируем вложение графа в ориентируемую поверхность, мы обнаруживаем, что такой объект изображает сложную арифметическую структуру. Она называется *парой Белого* и включает в себя числовое поле, алгебраическую кривую над ним и специальную рациональную функцию — *функцию Белого* — на этой кривой. Точные определения и формулировки даны в нескольких работах настоящего сборника.

К сожалению, оказалось невозможным унифицировать терминологию и обозначения в работах этого сборника. Пара Белого состоит из комплексной алгебраической кривой и непостоянной рациональной функции β на ней, имеющей не более трёх критических значений; обычно эти значения нормализуются, иногда дополнительные ограничения накладываются на порядки ветвлений. Любая такая кривая является комплексификацией кривой над $\bar{\mathbb{Q}}$. Вложенный граф, т. е. собственно *детский рисунок*, является β-прообразом вещественного отрезка, соединяющего два из трёх критических значений функции β. Иногда граф предполагается двукрашенным, в случае сферических деревьев функции Белого называются *обобщёнными многочленами Чебышёва* (а иногда *многочленами Шабата*).

Теория детских рисунков определённо вышла из детского возраста: появление гротендиковского наброска программы (Esquisse d'un programme) датируется ещё 1984 годом. Однако из-за некоторых нематематических аспектов биографии Гротендика и весьма необычного стиля «Esquisse» (он может показаться скорее присущим поэзии или философии, чем математике, почти без точных определений и теорем) математическому сообществу потребовались годы для признания его математической глубины. По-видимому, первое «официальное» и систематическое обсуждение идей Гротендика из «Esquisse» происходило на семинаре И. М. Гельфанда в Московском государственном университете в конце 1980-х. Первой публикацией, в которой некоторые из конструкций «Esquisse» были изложены в традиционной математической форме, была работа Г. Б. Шабата и В. А. Воеводского[1] 1990 года, посвящённая 60-летию Гротендика. Первая монография С. К. Ландо и А. К. Звонкина[2], содержащая систематическое изложение теории детских рисунков, появилась лишь в 2004 году.

Впрочем, исследования в области детских рисунков начали вестись и постепенно интенсифицировались в нескольких странах начиная с 1990-х. По трудам двух международных конференций[3] можно составить представление о состоянии теории на рубеже веков. Отчёты группы GTEM (Galois theory and explicit methods in arithmetic), координируемой Лейлой Шнепс (см. `www.math.jussieu.fr/~leila/gtem/FinalReport.pdf`), наряду со многими другими материалами, показывают современное положение дел.

Семинар «Графы на поверхностях и кривые над числовыми полями», который я веду в Московском государственном университете, работает с 1990 года. Настоящий сборник состоит из работ его участников (за очевидным исключением короткой заметки Б. Бёрча). Материалы сборника отражают направления научной деятельности семинара: наши интересы в основном связаны с самыми началами теории (по Гротендику, c une identité profonde entre la combinatoire des cartes finies d'une part, et la géométrie algébriques définies sur des corps des nombres, de l'autre[4]), с явными вычислениями, связывающими комбинаторно-топологические и арифметико-геометрические объекты. Также рассматриваются связи с другими разделами математики, особенно с теорией пространств модулей кривых и с теорией Тайхмюллера.

Работы Н. М. Адрианова «О плоских деревьях с заданным количеством реализаций наборов валентностей» (с. 9—17) и И. В. Артамкина «Комбинаторика трёхвалентных ленточных графов с двумя гранями» (с. 113—120) формально относятся к двумерной топологии, но их истинный смысл определяется связями с теорией детских рисунков.

Результат Н. М. Адрианова мотивирован изучением действия абсолютной группы Галуа на изотопических классах плоских деревьев (они составляют простейший класс детских рисунков, на которых, однако, абсолютная группа Галуа действует точно). Это действие имеет очевидный инвариант: набор валентностей вершин. Поэтому если набор валентностей имеет единственную реализацию плоским деревом, то орбита Галуа такого дерева состоит из единственного

[1]Shabat G. B., Voevodsky V. A. Drawing curves over number fields // The Grothendieck Festschrift. Vol. III. — Birkhäuser, 1990. — (Progress Math.; Vol. 88). — P. 199—227.

[2]Lando S. K., Zvonkin A. K. Graphs on Surfaces and Their Applications. — Berlin: Springer, 2004. — (Encyclopedia of Mathematical Sciences; Vol. 141).

[3]Geometric Galois Actions / L. Schneps, P. Lochak, eds. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vols. 242, 243). — Vol. 1: Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme; Vol. 2: The Inverse Galois Problem, Moduli Spaces and Mapping Class Groups.
The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants / L. Schneps, ed. — Cambridge Univ. Press, 1994. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 200).

[4]Глубокое единство между комбинаторикой конечных карт и алгебраической геометрией над числовыми полями (*фр.*).

элемента и дерево определено над $\mathbb{Q}$. Множество изотопических классов таких деревьев бесконечно: например, в него входят цепочки, соответствующие классическим многочленам Чебышёва. Оказывается, однако, что цепочки и ещё несколько простых деревьев составляют специальные типы. За исключением деревьев, принадлежащих этим типам, имеется лишь конечное количество множеств валентностей с единственной реализацией. Н. М. Адрианов приводит полное доказательство обобщения этого результата на произвольное количество реализаций, давно анонсированного им и мной.

Работа И. В. Артамкина содержит красивое, нетривиальное и самодостаточное описание двуклеточных рисунков с тривалентными графами. Одно из возможных приложений этого описания связано с геометрией пространств модулей $\mathcal{M}_{g,2}$, клетки которого максимальной размерности в хорошо известном описании клеточного разбиения Штребеля—Концевича—Пеннера—Виттена—... в точности соответствуют рассматриваемым И. В. Артамкиным рисункам. Следует отметить, что флипы (играющие решающую роль в его описании) соответствуют перемещению в «соседнюю» клетку. Работа содержит также элементарное объяснение частного случая тождеств Концевича с рациональными функциями, в которых одночлены в знаменателях сокращаются по несколько таинственным причинам.

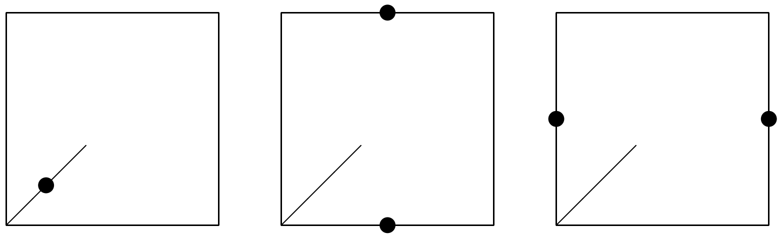
Работа Б. Бёрча «Деревья Шабата диаметра 4: приложение к статье Звонкина» (с. 131—135) занимает несколько изолированное положение в сборнике и относится к полиномиальной алгебре. Она объясняет (по словам Бёрча, «с использованием лишь алгебры XIX века») одно из первых загадочных явлений при вычислении функций Белого, обнаруженных мной и А. К. Звонкиным в начале 1990-х: дискриминанты полей определения плоских деревьев диаметра 4 разлагаются в произведение линейных форм от валентностей (весьма специального вида). Хотя работа представляет собой препринт 12-летней давности, её построения заслуживают внимания в контексте более поздних вычислений.

Центральную часть сборника составляют три работы, непосредственно посвящённые вычислениям пар Белого.

Две из них относятся к специфическому жанру «каталогов» — полных списков пар Белого, соответствующих рисункам (иногда определённого типа) ограниченной сложности. Начало этому жанру было положено моим препринтом 1991 года, подготовленным в Институте высших научных исследований (Франция), и препринтом Бетрема, Пере, Звонкина 1992 года, подготовленным в Университете Бордо; оба никогда не были опубликованы. В моём препринте были вычислены все пары Белого, соответствующие рисункам с не более чем тремя рёбрами, а в препринте Бетрема, Пере, Звонкина — обобщённые многочлены Чебышёва, соответствующие плоским деревьям с не более чем восемью рёбрами.

Как видно из названий, два каталога настоящего сборника — «Каталог функций Белого детских рисунков с не более чем четырьмя рёбрами» Н. М. Адрианова, Н. Я. Амбург, В. А. Дрёмова, Ю. Ю. Кочеткова, Е. М. Крейнес, Ю. А. Левицкой, В. Ф. Насретдиновой, Г. Б. Шабата (с. 35—112) и «Девятирёберные плоские деревья. Каталог» Ю. Ю. Кочеткова (с. 159—195) — идут на шаг дальше, чем два упомянутых препринта. Эти работы содержат только ответы, поскольку некоторые вычисления пар Белого чудовищно длинны, однако проверить ответы сравнительно просто.

Сложность некоторых ответов, возможно, снижаема лучшим подбором нормализаций, однако в целом это не так. Как показывает каталог, очень простые четырёхрёберные рисунки соответствуют исключительно сложным парам Белого. Одно из подтверждений этому — j-инварианты эллиптических кривых, не зависящие ни от каких выборов. Например, три рисунка



(противоположные стороны квадратов отождествлены) образуют орбиту Галуа. j-инварианты соответствующих кривых являются корнями многочлена

$$2^{15}5^{14}7^{10}j^3 - 3156295609222853500000000000j^2 + \\ + 7482958853213479960732972656 25j - 5640551353206681359387213998281 28.$$

Третья работа этого цикла — «Вычисление пар Белого шестирёберных рисунков рода 3 с группами автоморфизмов порядков 12 и 3» Б. С. Бычкова, В. А. Дрёмова, Е. М. Епифанова (с. 137—148) — является первым шагом в вычисления пар Белого рода 3. Вычислены все три пары Белого, соответствующие наименьшему возможному количеству рёбер (6) и обладающие симметриями порядка не меньше трёх. В этой работе вычисления описаны.

Оставшиеся шесть работ посвящены различным вопросам, связанным с теорией детских рисунков.

Работа Н. М. Адрианова «Об обобщённых многочленах Чебышёва, соответствующих плоским деревьям диаметра 4» (с. 19—33) является обзором различных свойств этих многочленов. Автор рассматривает их дискриминанты, поля определения и орбиты Галуа, подробно обсуждается известный «скрытый» инвариант Галуа. В некоторых случаях поля определения задаются гипергеометрическими многочленами. Описаны некоторые интересные классы деревьев диаметра 4.

Работа И. В. Артамкина, Ю. А. Левицкой, Г. Б. Шабата «Штребелевы дифференциалы на семействах гиперэллиптических кривых» (с. 121—130) относится к некоторому аналогу рисунков: рассматриваемые графы (сепаратрисы штребелевых дифференциалов) разбивают поверхности не на диски, а на цилиндры. Существование таких дифференциалов на любой римановой поверхности было давно известно, авторы же предъявляют простую явную конструкцию на вещественном 1-параметрическом семействе гиперэллиптических кривых произвольного чётного рода.

Работа Г. Б. Шабата и В. И. Золотарской «Параметризация Чехова—Фока пространств Тайхмюллера и детские рисунки» (с. 217—226) содержит математические переформулировки некоторых результатов, ранее опубликованных в физической литературе. Эти переформулировки основаны на гротендиковской картографической технике, являющейся одним из основных средств в теории детских рисунков. Авторы интерпретируют трёхвалентную версию теории в терминах униформизации. Рисунки соответствуют подгруппам группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, тогда как физики определили их деформации в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Основной результат работы говорит о том, что правило «каждый рисунок сидит в своей клетке» (имеющее смысл для каждого из известных разбиений пространств модулей на части, параметризованные рисунками) очередной раз подтверждается.

Работа Ю. Ю. Кочеткова «Геометрия плоских деревьев» (с. 149—158) посвящена так называемой «истинной форме плоских деревьев». Одно из следствий теории детских рисунков утверждает, что среди всех изотопически эквивалентных плоских деревьев с фиксированной комбинаторной структурой имеется выделенный представитель, однозначно определённый с точностью до подобия; это прообраз отрезка, соединяющего критические значения соответствующего обобщённого многочлена Чебышёва. Дифференциальная геометрия истинной формы деревьев почти не исследована. Работа Ю. Ю. Кочеткова содержит некоторые результаты относительно истинной формы малорёберных плоских деревьев с известными обобщёнными многочленами Чебышёва. Эти результаты составляют основу для некоторых общих гипотез и проблем, в основном касающихся характера выпуклости рёбер истинной формы плоских деревьев.

Работа Ю. Ю. Кочеткова «Слоения, порождённые дифференциалами абелева типа» (с. 197—205) связана с теорией детских рисунков довольно сложным образом. На самом деле рассматриваемые слоения являются проекциями на комплексную плоскость горизонтальных слоений на эллиптических кривых, определяемых квадратичными дифференциалами типа Штребеля—Концевича. Изложение самодостаточно и выявляет условия, при которых рассматриваемые слоения содержат замкнутые слои.

Работа Ф. Б. Паковича «О деревьях, накрывающих цепи или звёзды» (с. 207—215) содержит простой комбинаторный критерий, позволяющий определить, допускает ли данное плоское дерево накрытие простейших деревьев. Будучи вполне элементарным, этот результат, скомбинированный с некоторыми результатами диссертации автора, имеет приложения к тонкому вопросу арифметической геометрии о поле определения точек конечного порядка на якобианах гиперэллиптических кривых. Используя результаты Мазура и Мереля, Ф. Б. Пакович получает также нижние оценки степеней полей определения некоторых простых классов деревьев и перечисляет все такие деревья, определённые над $\mathbb{Q}$.

На данной стадии исследования мы скорее *описываем* интересующие нас предметы, чем *объясняем* их. Однако общая идея, дающая основу нашей работе, уже может быть сформулирована: единство математического мира (по

Гротендику, une réalité mystérieuse au-delà des mots[5]) может наблюдаться и изучаться. Будем надеяться, что эта идея уточнится и материализуется в наших последующих публикациях.

Г. Б. Шабат

[5]Невыразимая мистическая реальность (*фр.*).