О плоских деревьях с заданным количеством реализаций наборов валентностей

Н. М. АДРИАНОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: nikolai_adrianov@cnit.msu.ru

УДК 519.172.1+519.172.2+519.175.3

Ключевые слова: плоские двукрашенные деревья, набор валентностей, число реализаций.

Аннотация

В настоящей работе рассматривается задача описания наборов валентностей плоских двукрашенных деревьев, имеющих заданное количество реализаций плоскими деревьями. Выделены три специальных типа плоских деревьев: цепочки, деревья диаметра 4 и специальные деревья диаметра 6. Доказано, что существует лишь конечное число наборов валентностей, имеющих R реализаций плоскими деревьями и не принадлежащих выделенным специальным типам, причём количество рёбер таких деревьев не превосходит $12R+2$. Приведены полные списки наборов валентностей плоских двукрашенных деревьев, имеющих одну, две или три реализации.

Abstract

N. M. Adrianov, On planes trees with a prescribed number of valency set realizations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 6, pp. 9—17.

We describe valency sets of plane bicolored trees with a prescribed number of realizations by plane trees. Three special types of plane trees are defined: chains, trees of diameter 4, and special trees of diameter 6. We prove that there is a finite number of valency sets that have R realizations as plane trees and do not belong to these special types. The number of edges of such trees is less than or equal to $12R + 2$. The complete lists of valency sets of plane bicolored trees with 1, 2, or 3 realizations are presented.

В настоящей статье мы рассматриваем дважды частный случай теории детских рисунков Гротендика: случай плоских деревьев, т. е. детских рисунков рода 0 с единственной клеткой. Этот случай не является сильно ограничительным с точки зрения действия группы Галуа $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$: в [1] показано, что группа Галуа действует на множестве плоских деревьев точно. С другой стороны, специфика плоских деревьев позволяет получить интересные результаты.

Набор валентностей плоского дерева является инвариантом Галуа, плоские деревья с одним и тем же набором валентностей мы называем *реализациями* этого набора. Априори различные реализации набора валентностей «подозреваются» на принадлежность одной орбите Галуа, поэтому первым шагом при

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 6, с. 9—17.

изучении орбит действия группы $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ может быть решение следующей задачи.

Задача. Для данного натурального R описать все наборы валентностей плоских двукрашенных деревьев, имеющие ровно R реализаций.

Во втором разделе мы вводим три специальных типа плоских деревьев: цепочки, деревья диаметра 4 и специальные деревья диаметра 6. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Основная теорема. *Для любого натурального R существует лишь конечное число наборов валентностей, имеющих ровно R реализаций плоскими двукрашенными деревьями и не принадлежащих выделенным специальным типам. Более того, число рёбер таких деревьев не превосходит $12R+2$.*

Этот результат получен совместно с Г. Б. Шабатом и впервые был сформулирован в [2], однако его доказательство до сих пор не было опубликовано. Кроме того, мы приводим полные списки наборов валентностей с R реализациями для случаев $R = 1, 2, 3$ (теоремы 4.1, 4.2, 4.3).

1. Определения и обозначения

Будем обозначать количество элементов конечного множества M через $\#M$.

Определение 1.1. Связный граф называется *двукрашенным*, если множество его вершин раскрашено в чёрный и белый цвета так, что каждое ребро соединяет вершины разного цвета.

Определение 1.2. *Плоским двукрашенным деревом* мы называем связный двукрашенный граф без циклов, вложенный в ориентированную плоскость.

В дальнейшем под плоским деревом будем всегда подразумевать плоское двукрашенное дерево. Для плоского дерева T обозначим через $V^+(T)$ множество чёрных вершин, $V^-(T)$ множество белых вершин, $E(T)$ множество рёбер. Формула Эйлера в этих обозначениях принимает вид

$$\#V^+(T) + \#V^-(T) - \#E(T) = 1. \tag{1}$$

Определение 1.3. *Валентностью вершины* $x \in V^{\pm}(T)$ мы называем число рёбер, инцидентных x, и обозначаем её $v_{\pm}(x)$.

Учитывая, что каждое ребро инцидентно ровно одной белой и одной чёрной вершине, а также принимая во внимание формулу Эйлера (1), получаем соотношение

$$\sum_{x \in V^+(T)} v_+(x) = \sum_{x \in V^-(T)} v_-(x) = \#V^+(T) + \#V^-(T) - 1. \tag{2}$$

Определение 1.4. Будем называть *частотными функциями, ассоциированными с плоским деревом T*, функции $q_{\pm} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, определяемые формулой

$$q_{\pm}(j) = \#v_{\pm}^{-1}(j).$$

Частотные функции являются финитными, т. е. принимают нулевые значения всюду вне некоторого конечного множества. Соотношение (2) в терминах частотных функций имеет вид

$$\sum_{j=1}^{\infty} j q_+(j) = \sum_{j=1}^{\infty} j q_-(j) = \sum_{j=1}^{\infty} q_+(j) + \sum_{j=1}^{\infty} q_-(j) - 1. \tag{3}$$

Определение 1.5. Будем называть *частотными функциями* финитные функции $q_\pm \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, удовлетворяющие соотношению (3).

Пример 1.6. Мы будем использовать два способа записи набора валентностей плоского дерева: перечисляя $v_\pm(x)$ для всех вершин $x \in V_\pm$ или рассматривая частотные функций $q_\pm$. Например, набор валентностей дерева, приведённого на рис. 1, может быть записан в виде

$$(1,1,1,1,1,3,3,3 \mid 2,2,2,2,2,2,2) \quad \text{или} \quad (1^5 3^3 \mid 2^7).$$

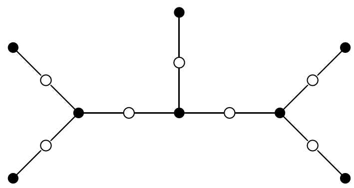

Рис. 1. Единственная реализация набора валентностей $(1^5 3^3 \mid 2^7)$

Для заданных частотных функций $q_\pm \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ обозначим через $\mathrm{BPlTr}[q_+, q_-]$ (конечное) множество плоских деревьев, для которых ассоциированные с ними частотные функции совпадают с $q_\pm$. Элементы множества $\mathrm{BPlTr}[q_+, q_-]$ мы будем называть *реализациями* пары $q_\pm$.

В этих обозначениях задача, поставленная во введении, может быть переформулирована следующим образом.

Задача′. Для данного натурального R описать частотные функции $q_\pm$, удовлетворяющие условию

$$\#\,\mathrm{BPlTr}[q_+, q_-] = R.$$

Для финитной функции $q \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ введём следующие обозначения:

$$\|q\| = \sum_{j=1}^{\infty} q(j), \qquad \Delta q = \|q\| - \max\{q(j) \mid j \in \mathbb{N}\}, \qquad ((q)) = \frac{\|q\|!}{\prod\limits_{j=1}^{\infty} q(j)!}. \tag{4}$$

2. Специальные типы плоских деревьев

Введём несколько специальных типов плоских деревьев. Частотные функции, ассоциированные со специальными плоскими деревьями, мы будем также называть специальными. Специальные типы деревьев мы описываем в терминах наборов валентностей; деревья, получающиеся перекраской вершин, мы считаем относящимися к тому же типу.

1. *Цепочки*. Цепочками мы называем деревья, у которых валентности всех вершин не превосходят 2. Набор валентностей деревьев этого типа имеет один из следующих двух видов:

$$(1, 1, 2, \dots, 2 \mid 2, 2, \dots, 2), \quad (1, 2, \dots, 2 \mid 1, 2, \dots, 2).$$

Цепочки с тремя и четырьмя рёбрами приведены на рис. 2. Цепочку с e рёбрами мы обозначаем I_e.

Рис. 2. Цепочки с тремя и четырьмя рёбрами

2. *Деревья диаметра* 4. Диаметром плоского дерева мы называем максимальное расстояние (число рёбер) между любыми двумя его вершинами. Допуская некоторую неточность терминов, к классу деревьев диаметра 4 мы относим все плоские деревья, диаметр которых *не превышает* 4.

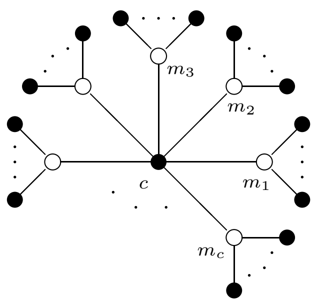

Рис. 3. Общее дерево типа $\mathrm{IV}[m_1, \dots, m_c]$

Общий вид дерева диаметра 4 приведён на рис. 3. Число, приписанное вершине дерева, — её валентность. Набор валентностей дерева имеет вид

$$(c, 1, 1, \dots, 1 \mid m_1, m_2, \dots, m_c)$$

(валентности m_i могут совпадать). Класс плоских деревьев с таким набором валентностей мы обозначаем $\mathrm{IV}[m_1, m_2, \dots, m_c]$.

3. *Специальные деревья диаметра* 6. К этому типу мы относим плоские деревья с набором валентностей

$$(1, 1, \dots, 1, m, n \mid c, c, \dots, c).$$

Класс плоских деревьев с таким набором валентностей мы обозначаем $\mathrm{VI}[m, c, n]$. Общий вид плоского дерева из класса $\mathrm{VI}[m, c, n]$ приведён на рис. 4.

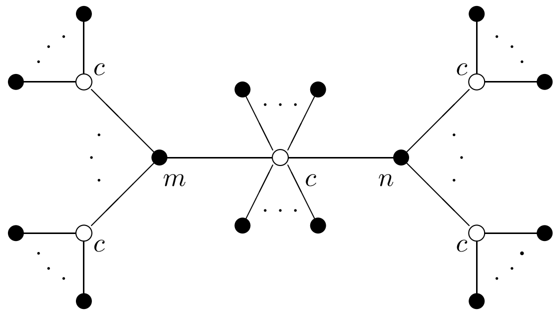

Рис. 4. Общее дерево типа $\mathrm{VI}[m, c, n]$

Замечания.

1. Возможны ситуации, когда одно и то же плоское дерево может быть отнесено к различным специальным типам. Например,

$$\begin{array}{ll} \mathrm{IV}[1] = I_1, & \mathrm{IV}[1,1] = \mathrm{IV}[2] = I_2, \\ \mathrm{IV}[1,2] = I_3, & \mathrm{IV}[2,2] = I_4, \\ \mathrm{IV}[n] = \mathrm{IV}[\underbrace{1,\dots,1}_{n}], & \mathrm{IV}[\underbrace{1,\dots,1}_{m-1}, n] = \mathrm{IV}[\underbrace{1,\dots,1}_{n-1}, m]. \end{array}$$

2. Специальные плоские деревья допускают следующую характеризацию в терминах частотных функций.
   - Если $q^+(j) = q^-(j) = 0$ для всех $j > 2$, то соответствующее плоское дерево относится к типу I_e.
   - Если $q^+(1) = \|q^+\|$ или $q^-(1) = \|q^-\|$, то соответствующее плоское дерево относится к типу $\mathrm{IV}[1, \dots, 1]$.
   - Если $q^+(1) = \|q^+\| - 1$ или $q^-(1) = \|q^-\| - 1$, то соответствующее плоское дерево относится к типу $\mathrm{IV}[m_1, \dots, m_c]$.
   - Если $q^+(1) = \|q^+\| - 2$ и $\Delta q^- = 0$ или $q^-(1) = \|q^-\| - 2$ и $\Delta q^+ = 0$, то соответствующее плоское дерево относится к типу $\mathrm{VI}[m, c, n]$.

3. Доказательство основной теоремы

Основой доказательства служит следующая перечислительная формула.

Теорема 3.1 (Татт, [3]). *Пусть $q_\pm$ — частотные функции. Тогда*

$$\sum_{T\in \mathrm{BPlTr}[q_+,q_-]} \frac{1}{\#\,\mathrm{Aut}(T)} = \frac{\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{\infty} q_+(j)-1\Bigr)!\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{\infty} q_-(j)-1\Bigr)!}{\prod\limits_{j=1}^{\infty} q_+(j)!\,\prod\limits_{j=1}^{\infty} q_-(j)!}. \tag{5}$$

В обозначениях (4) частотные функции $q_\pm$, имеющие ровно R реализаций, удовлетворяют в силу формулы Татта (5) неравенству

$$((q_+))((q_-)) \leqslant R\,\|q_+\|\,\|q_-\|. \tag{6}$$

Теорема 3.2. *Пусть $q^\pm$ — частотные функции, отличные от частотных функций специальных типов деревьев и удовлетворяющие неравенству* (6)*. Тогда*

$$\|q_+\| + \|q_-\| \leqslant 12R + 3.$$

Основная теорема, сформулированная во введении, является прямым следствием теоремы 3.2. Для её доказательства нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 3.3. *Пусть $q\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ — произвольная финитная функция.*

а) *Если $\Delta q = 0$, то $((q)) = 1$.*
б) *Если $\Delta q = 1$, то $((q)) = \|q\|$.*
в) *Если $\Delta q = 2$, то либо $((q)) = \|q\|(\|q\|-1)$, либо $((q)) = \|q\|(\|q\|-1)/2$.*
г) *Если $\Delta q \geqslant 3$, то $((q)) \geqslant \|q\|(\|q\|-1)(\|q\|-2)/6$.*

Доказательство. Соотношения следуют из свойств полиномиальных коэффициентов. □

Лемма 3.4. *Пусть $q^\pm$ — частотные функции. Тогда*

$$\|q^+\| - q^+(1) \leqslant \|q^-\| - 1,$$

причём равенство достигается лишь в том случае, когда $q^+(j) = 0$ для всех $j > 2$.

Доказательство. В силу равенства (3) имеем

$$\|q^+\| + \|q^-\| - 1 = \sum_{j=1}^{\infty} j q^+(j) \geqslant q^+(1) + 2\bigl(\|q^+\| - q^+(1)\bigr),$$

откуда вытекает утверждение леммы. □

Лемма 3.5. *Пусть $q^\pm$ — частотные функции. Тогда*

$$q^+(1) + q^-(1) \geqslant 2,$$

причём равенство достигается лишь в том случае, когда $q^\pm(j) = 0$ для всех $j > 2$.

Доказательство. Согласно лемме 3.4 имеем

$$q^+(1) \geqslant \|q^+\| - \|q^-\| + 1, \quad q^-(1) \geqslant \|q^-\| - \|q^+\| + 1,$$

причём оба равенства достигаются одновременно лишь в случае $q^\pm(j) = 0$ для $j > 2$. Складывая два последних неравенства, получаем утверждение леммы. □

Доказательство теоремы 3.2. Из-за симметрии между плюс- и минус-вершинами мы можем предполагать, что $\Delta q^+ \leqslant \Delta q^-$. Рассмотрим следующие три случая.

Случай 0. $\Delta q^+ = 0$. Если $q^+(1) > 0$, то $q^+(1) = \|q^+\|$ и соответствующее дерево относится к типу $\mathrm{IV}[1, \ldots, 1]$. Далее будем считать, что $q^+(1) = 0$. Тогда в силу леммы 3.4 $\|q^+\| \leqslant \|q^-\| - 1$.

Случай 0.0. $\Delta q^- = 0$. По лемме 3.5 выполнено $q^-(1) > 0$. Тогда $q^-(1) = \|q^-\|$ и соответствующее дерево относится к типу $\mathrm{IV}[1, \ldots, 1]$.

Случай 0.1. $\Delta q^- = 1$. По лемме 3.5 выполнено $q^-(1) > 0$. Тогда $q^-(1) = \|q^-\| - 1$ и соответствующее дерево относится к типу $\mathrm{IV}[m, \ldots, m]$.

Случай 0.2. $\Delta q^- = 2$. По лемме 3.5 либо $q^-(1) = 2$, и тогда дерево относится к типу I_e (e чётно), либо $q^-(1) = \|q^-\| - 2$, и соответствующее дерево относится к типу $\mathrm{VI}[m, c, n]$.

Случай 0.3. $\Delta q^- \geqslant 3$. Согласно лемме 3.3 имеем $((q^+)) = 1$ и $((q^-)) \geqslant \|q^-\|(\|q^-\| - 1)(\|q^-\| - 2)/6$. Тогда неравенство (6) влечёт

$$\frac{\|q^-\|(\|q^-\| - 1)(\|q^-\| - 2)}{6} \leqslant R\|q^+\|\|q^-\| \leqslant R\|q^-\|(\|q^-\| - 1).$$

Следовательно, $\|q^-\| \leqslant 6R + 2$ и $\|q^+\| + \|q^-\| \leqslant 12R + 3$.

Случай 1. $\Delta q^+ = 1$. Если $q^+(1) > 1$, то имеется единственная плюс-вершина валентности больше 1, и мы имеем дело с деревом типа $\mathrm{IV}[m_1, \ldots, m_c]$. Далее будем считать, что $q^+(1) \leqslant 1$. Тогда в силу леммы 3.4 $\|q^+\| \leqslant \|q^-\|$.

Случай 1.0. $\Delta q^- = 1$. Если $q^-(1) > 1$, то имеется единственная минус-вершина валентности больше 1, и мы имеем дело с деревом типа $\mathrm{IV}[m_1, \ldots, m_c]$. Если $q^-(1) \leqslant 1$, то согласно лемме 3.5 соответствующее дерево относится к типу I_e (e нечётно).

Случай 1.1. $\Delta q^- \geqslant 2$. По лемме 3.3 имеем $((q^+)) = \|q^+\|$ и $((q^-)) \geqslant \|q^-\|(\|q^-\| - 1)/2$. Из неравенства (6) мы получаем $\|q^-\| \leqslant 2R + 1$. Следовательно, $\|q^+\| + \|q^-\| \leqslant 4R + 2$.

Случай 2. $\Delta q^+ \geqslant 2$. По предположению имеем также $\Delta q^- \geqslant 2$. Тогда в силу леммы 3.3 $((q^\pm)) \geqslant \|q^\pm\|(\|q^\pm\| - 1)/2$, и неравенство (6) влечёт

$$\frac{\|q^+\|(\|q^+\| - 1)}{2} \, \frac{\|q^-\|(\|q^-\| - 1)}{2} \leqslant R\|q^+\| \, \|q^-\|.$$

Воспользовавшись неравенством $ab \geqslant a + b - 1$, верным для произвольных $a, b \geqslant 1$, получаем

$$\frac{\|q^+\| + \|q^-\| - 3}{4} \leqslant \frac{(\|q^+\| - 1)(\|q^-\| - 1)}{4} \leqslant R,$$

и следовательно, $\|q^+\| + \|q^-\| \leqslant 4R + 2$. □

4. Наборы валентностей с одной, двумя и тремя реализациями

Схема решения неравенства (6), изложенная при доказательстве теоремы 3.2, даёт нам алгоритм нахождения для каждого R всех наборов валентностей с ровно R реализациями. Результаты для $R = 1, 2, 3$ собраны в следующих теоремах.

Теорема 4.1. *Следующий список содержит все наборы валентностей плоских двукрашенных деревьев, имеющих единственную реализацию:*

1) *наборы валентностей типа* I_e, e *любое;*
2) *наборы валентностей типа* $\mathrm{IV}[\underbrace{m, \dots, m}_{c-1}, n]$, m, n, c *любые;*
3) *наборы валентностей типа* $\mathrm{VI}[m, 2, n]$, m, n *любые;*
4) *наборы валентностей типа* $\mathrm{VI}[m, 3, m]$, m *любое;*
5) *набор валентностей* $(1^5 3^3 \mid 2^7)$.

Теорема 4.2. *Следующий список содержит все наборы валентностей плоских двукрашенных деревьев, имеющих ровно две реализации:*

1) *наборы валентностей типа* $\mathrm{IV}[l, m, n]$, l, m, n *попарно различные;*
2) *наборы валентностей типа* $\mathrm{IV}[m, m, n, n]$, m, n *различные;*
3) *наборы валентностей типа* $\mathrm{IV}[m, m, m, n, n]$, m, n *различные;*
4) *наборы валентностей типа* $\mathrm{VI}[m, 3, n]$, m, n *различные;*
5) *наборы валентностей типа* $\mathrm{VI}[m, 4, m]$, m *любое;*
6) *наборы валентностей типа* $\mathrm{VI}[m, 5, m]$, m *любое;*
7) *«спорадические» наборы валентностей*

$$(1^3 2^2 \mid 1^1 3^2), \quad (1^3 2^2 \mid 2^2 3^1), \quad (1^3 3^2 \mid 1^1 2^4),$$
$$(1^3 2^2 3 \mid 2^5), \quad (1^8 4^3 \mid 2^{10}), \quad (1^{11} 5^3 \mid 2^{13}).$$

Теорема 4.3. *Следующий список содержит все наборы валентностей плоских двукрашенных деревьев, имеющих ровно три реализации:*

1) *наборы валентностей типа* $\mathrm{IV}[l, l, m, n]$, l, m, n *попарно различные;*
2) *наборы валентностей типа* $\mathrm{IV}[m, m, m, m, n, n]$, m, n *различные;*
3) *наборы валентностей типа* $\mathrm{IV}[m, m, m, m, m, n, n]$, m, n *различные;*
4) *наборы валентностей типа* $\mathrm{VI}[m, 4, n]$, m, n *различные;*
5) *наборы валентностей типа* $\mathrm{VI}[m, 6, m]$, m *любое;*
6) *наборы валентностей типа* $\mathrm{VI}[m, 7, m]$, m *любое;*
7) *«спорадические» наборы валентностей*

$$(1^1 2^1 3^1 \mid 1^1 2^2), \quad (1^2 2^1 3^1 \mid 1^1 2^3), \quad (1^2 3^2 \mid 1^2 2^3), \quad (2^1 3^2 \mid 1^4 2^2),$$
$$(2^2 4^1 \mid 1^4 2^2), \quad (1^1 4^2 \mid 1^5 2^2), \quad (2^2 5^1 \mid 1^5 2^2), \quad (1^5 3^2 \mid 2^4 3^1),$$
$$(1^5 4^2 \mid 1^1 2^6), \quad (3^4 \mid 1^6 2^3), \quad (1^4 2^2 4^1 \mid 2^6), \quad (1^4 2^1 3^2 \mid 2^6),$$
$$(1^6 2^2 5^1 \mid 2^7), \quad (1^6 3^4 \mid 2^9), \quad (1^{14} 6^3 \mid 2^{16}), \quad (1^{17} 7^3 \mid 2^{19}).$$

Литература

[1] Schneps L. Dessins d'enfants on the Riemann sphere // The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants / L. Schneps, ed. — Cambridge University Press, 1994. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 200). — P. 47—78.

[2] Shabat G. On the classification of plane trees by their Galois orbit // Ibid. — P. 169—177.

[3] Tutte W. T. Planted plane trees with a given partition // Amer. Math. Monthly. — 1964. — Vol. 71, no. 3. — P. 272—277.