

## Каталог функций Белого детских рисунков с не более чем четырьмя рёбрами

**Н. М. АДРИАНОВ**

*Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова*

**Н. Я. АМБУРГ**

*Институт теоретической  
и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова*

**В. А. ДРЁМОВ**

*Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова*

**Ю. Ю. КОЧЕТКОВ**

*Московский государственный институт  
электроники и математики*

**Е. М. КРЕЙНЕС**

*Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова  
e-mail: kreines@itep.ru*

**Ю. А. ЛЕВИЦКАЯ**

*Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова*

**В. Ф. НАСРЕТДИНОВА**

*Институт теоретической  
и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова*

**Г. Б. ШАБАТ**

*Российский государственный гуманитарный университет  
e-mail: shabat@mccme.ru*

УДК 511.6+512.7+519.17

**Ключевые слова:** теорема Белого, пары Белого, детские рисунки Гротендика.

### Аннотация

В настоящей работе перечисляются все детские рисунки с не более чем четырьмя рёбрами и вычисляются их пары Белого. Для перечисления всех детских рисунков применяется метод матричных моделей. Представлено 134 детских рисунка; среди них 77 являются сферическими, 53 имеют род 1 и 4 — род 2. Также найдены группы автоморфизмов всех этих детских рисунков. Детские рисунки упорядочены по числу рёбер. Детские рисунки с одинаковым числом рёбер упорядочены лексикографически по наборам своих 0-валентностей. Приводится и вычисляется соответствующая матричная модель для каждого набора 0-валентностей. Используются комплексные матричные модели для детских рисунков с количеством рёбер, меньшим трёх. Для четырёхрёберных детских рисунков используется эрмитова матричная модель.

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2007, том 13, № 6, с. 35—112.

© 2007 *Центр новых информационных технологий МГУ,  
Издательский дом «Открытые системы»*

**Abstract**

*N. M. Adrianov, N. Ya. Amburg, V. A. Dremov, Yu. Yu. Kochetkov, E. M. Kreines, Yu. A. Levitskaya, V. F. Nasretdinova, G. B. Shabat, Catalog of dessins d'enfants with no more than 4 edges, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 6, pp. 35–112.*

In this work, all the dessins d'enfants with no more than 4 edges are listed and their Belyi pairs are computed. In order to enumerate all dessins, the technique of matrix model computations was used. The total number of dessins is 134; among them 77 are spherical, 53 of genus 1, and 4 of genus 2. The automorphism groups of all the dessins are also found. Dessins are listed by the number of edges. Dessins with the same number of edges are ordered lexicographically by their lists of 0-valencies. The corresponding matrix model for any list of 0-valencies is given and computed. Complex matrix models for dessins with 1–3 edges are used. For the dessins with 4 edges, we use Hermitian matrix model.

**Содержание**

<b>1. Введение</b>	<b>37</b>
<b>2. Замечания о функциях Белого</b>	<b>38</b>
<b>3. О матричных моделях и их использовании при перечислении детских рисунков</b>	<b>39</b>
<b>4. Однорёберные рисунки</b>	<b>41</b>
4.1. Набор валентностей $\langle 2   1, 1 \rangle$ . . . . .	41
4.2. Набор валентностей $\langle 1, 1   2 \rangle$ . . . . .	41
<b>5. Двухрёберные рисунки</b>	<b>42</b>
5.1. Набор валентностей $\langle 4   * \rangle$ . . . . .	42
5.2. Набор валентностей $\langle 3, 1   3, 1 \rangle$ . . . . .	43
5.3. Набор валентностей $\langle 2, 2   2, 2 \rangle$ . . . . .	43
5.4. Набор валентностей $\langle 2, 1, 1   4 \rangle$ . . . . .	44
<b>6. Трёхрёберные рисунки</b>	<b>44</b>
6.1. Набор валентностей $\langle 6   * \rangle$ . . . . .	44
6.2. Набор валентностей $\langle 5, 1   * \rangle$ . . . . .	47
6.3. Набор валентностей $\langle 4, 2   * \rangle$ . . . . .	48
6.4. Набор валентностей $\langle 4, 1, 1   * \rangle$ . . . . .	49
6.5. Набор валентностей $\langle 3, 3   * \rangle$ . . . . .	50
6.6. Набор валентностей $\langle 3, 2, 1   * \rangle$ . . . . .	52
6.7. Набор валентностей $\langle 3, 1, 1, 1   6 \rangle$ . . . . .	53
6.8. Набор валентностей $\langle 2, 2, 2   3, 3 \rangle$ . . . . .	53
6.9. Набор валентностей $\langle 2, 2, 1, 1   6 \rangle$ . . . . .	54

<b>7. Четырёхрёберные рисунки</b>	<b>54</b>
7.1. Набор валентностей $\langle 8   * \rangle$	54
7.2. Набор валентностей $\langle 7, 1   * \rangle$	64
7.3. Набор валентностей $\langle 6, 2   * \rangle$	73
7.4. Набор валентностей $\langle 6, 1, 1   * \rangle$	78
7.5. Набор валентностей $\langle 5, 3   * \rangle$	83
7.6. Набор валентностей $\langle 5, 2, 1   * \rangle$	87
7.7. Набор валентностей $\langle 5, 1, 1, 1   * \rangle$	92
7.8. Набор валентностей $\langle 4, 4   * \rangle$	93
7.9. Набор валентностей $\langle 4, 3, 1   * \rangle$	96
7.10. Набор валентностей $\langle 4, 2, 2   * \rangle$	100
7.11. Набор валентностей $\langle 4, 2, 1, 1   * \rangle$	102
7.12. Набор валентностей $\langle 4, 1, 1, 1, 1   8 \rangle$	105
7.13. Набор валентностей $\langle 3, 3, 2   * \rangle$	105
7.14. Набор валентностей $\langle 3, 3, 1, 1   * \rangle$	107
7.15. Набор валентностей $\langle 3, 2, 2, 1   * \rangle$	109
7.16. Набор валентностей $\langle 3, 2, 1, 1, 1   8 \rangle$	110
7.17. Набор валентностей $\langle 2, 2, 2, 2   4, 4 \rangle$	111
7.18. Набор валентностей $\langle 2, 2, 2, 1, 1   8 \rangle$	111

## 1. Введение

*Детским рисунком* называется компактная, связная, гладкая ориентированная поверхность  $S$  вместе с таким графом  $\Gamma$  на ней, что его дополнение  $S \setminus \Gamma$  гомеоморфно дизъюнктому объединению открытых дисков. Теория детских рисунков была основана А. Гротендиком в [5] и активно развивалась далее (см. монографию [6] и библиографию в ней). В последнее время детские рисунки стали достаточно популярной тематикой. Они дают возможность описывать на несложном и наглядном комбинаторном языке графов на поверхностях многие сложные и нетривиальные результаты обратной теории Галуа, результаты о пространствах модулей и пространствах Тейхмюллера, результаты, связанные с теорией отображений и гиперотображений, матричных моделей, квантовой гравитации, теории струн и т. д.

Детские рисунки естественно появляются в различных областях математики. Гладкая неприводимая комплексная алгебраическая кривая, определённая над полем  $\mathbb{Q}$ , задаёт детский рисунок следующим образом. На этой кривой  $X$ , согласно известной теореме Белого, существует непостоянная рациональная функция  $\beta$ , обладающая не более чем тремя критическими значениями. Обозначим через  $X_{\mathbb{C}}$  её комплексификацию, и пусть  $\beta_{\mathbb{C}}$  — естественное поднятие  $\beta$  на  $X_{\mathbb{C}}$ . По определению такие  $\beta$  и  $\beta_{\mathbb{C}}$  являются *функциями Белого*. Без ограничения общности будем предполагать, что критические значения функции  $\beta$  содержатся в множестве  $\{0, 1, \infty\}$ . Более того, заменяя  $\beta$  на  $4\beta(1 - \beta)$ , если

есть необходимость, можно допустить, что  $1 - \beta$  имеет только двойные нули, такие функции Белого называются *чистыми*. Тогда  $\beta_C^{-1\circ}([0, 1])$  является детским рисунком на топологической модели  $X_C$ ,  $\{\beta_C^{-1\circ}([0, 1])\}$  — рёбра этого рисунка,  $\{\beta_C^{-1\circ}(0)\}$  — вершины. В основном тексте мы будем опускать индексы комплексификации.

В настоящей работе на основе использования метода матричных моделей (см. [1, 3, 4]) перечислены детские рисунки с не более чем четырьмя рёбрами. Существуют 2 однорёберных детских рисунка, оба они имеют род 0, 15 двурёберных, среди которых только один детский рисунок имеет род 1, 20 трёхрёберных (14 сферических и 6 имеют род 1) и 107 четырёхрёберных детских рисунков (57 сферических, 46 рода 1 и 4 рода 2). Общее число детских рисунков с не более чем четырьмя рёбрами равно 134. Основным результатом является вычисление соответствующих *пар* Белого (в случае положительного рода это означает, что найдены кривая и функции Белого на ней). Этот каталог является аналогом известного каталога Бетрема—Пере—Звонкина [2], где перечисляются деревья с не более чем восемью рёбрами и их функции Белого.

Мы благодарим всех участников семинара «Графы на поверхностях и кривые над числовыми полями» за проявленный интерес и полезные обсуждения. Второй, пятый, седьмой и восьмой авторы благодарны Российскому федеральному агентству ядерной энергии за финансовую поддержку. Второй автор поддержан грантами NWO-РФФИ 047.011.2004.026 (РФФИ 05-02-89000-NWO-а), НШ-8004.2006.2, РФФИ 07-01-00441-а, третий, пятый, шестой и восьмой авторы поддержаны грантами РФФИ 07-01-00441-а и НШ-5666.2006.1, пятый автор поддержана грантом МК-2687.2007.1, седьмой автор — грантами РФФИ 07-01-00441-а и НШ-8065.2006.2. Пятый автор благодарит Математический институт Макса Планка в Бонне, где была сделана существенная часть этой работы, за тёплую атмосферу и финансовую поддержку.

## 2. Замечания о функциях Белого

Для детских рисунков рода 0 естественно записывать функцию Белого в виде частного двух многочленов. Для упрощения проверки мы раскладываем эти многочлены на неприводимые множители.

Так как все кривые рода 1 и 2 являются гиперболическими, мы всегда будем записывать их уравнения в виде  $y^2 = F(x)$  и обозначать посредством  $\tau$  гиперболическую инволюцию

$$\tau: (x, y) \mapsto (x, -y).$$

Для кривых положительного рода имеет место разделение на два следующих случая.

1. Пусть функция  $\beta$  является инвариантной относительно гиперболической инволюции  $\tau$  (т. е.  $\beta = \beta \circ \tau$ ). Тогда функцию  $\beta$  можно записать в виде

частного двух многочленов, зависящих от координаты в фактор-пространстве по этой инволюции, т. е. на проективной прямой. В этом случае будем писать  $(X: y^2 = F(x), \beta = \frac{P(x)}{Q(x)})$ .

2. Если функция Белого не является инвариантной относительно  $\tau$ , то удобно использовать симметрические по  $\beta$  и  $\beta^\tau$  функции

$$n_0 = \beta \cdot \beta^\tau, \quad n_1 = (\beta - 1)(\beta^\tau - 1).$$

Легко построить функцию Белого по этой паре и по уравнению соответствующей кривой. В самом деле,

$$\beta = \frac{n_0 - n_1 + 1}{2} + y \sqrt{\frac{(n_0 - n_1)^2 - 2(n_0 + n_1) + 1}{4F}}.$$

Для удобства читателя мы рассматриваем в этих случаях все приведённые выше объекты, а именно

$$X: y^2 = F(x), \quad \beta = \frac{P(x) + Q(x)y}{R(x)},$$

$$n_0 = \frac{P(x)^2 - Q(x)^2 F(x)}{R(x)^2}, \quad n_1 = \frac{(P(x) - R(x))^2 - Q(x)^2 F(x)}{R(x)^2}.$$

Кроме того, полезно разложить на неприводимые множители числители и знаменатели функций  $n_0$  и  $n_1$ . Заметим, что степени неприводимых множителей числителя  $n_0$  связаны с валентностями вершин этого рисунка, а степени множителей знаменателя связаны с валентностями граней.

При перечислении автоморфизмов мы будем обозначать циклическую группу порядка  $d$  через  $\mathbb{Z}_d$ .

### 3. О матричных моделях и их использовании при перечислении детских рисунков

Для перечисления детских рисунков мы используем методы матричных моделей (см., например, монографию [6, гл. 3] и ссылки в ней).

Для детских рисунков с 1, 2 или 3 рёбрами используется комплексная матричная модель. Пусть

$$\langle f(Z, Z^+) \rangle := \frac{\int_{Z \in M_N(\mathbb{C})} f(Z, Z^+) e^{-\text{Tr}(ZZ^+)} dZ dZ^+}{\int_{Z \in M_N(\mathbb{C})} e^{-\text{Tr}(ZZ^+)} dZ dZ^+},$$

где  $M_N(\mathbb{C})$  — множество комплексных  $(N \times N)$ -матриц,  $Z^+$  обозначает транспонированную комплексно-сопряжённую матрицу к матрице  $Z$  и  $\text{Tr}$  — функция следа матриц,

$$dZ dZ^+ = \prod_{l=1}^N \prod_{j=1}^N dx_{lj} dy_{lj}$$

для  $Z = (x_{lj} + i y_{lj})$ . Для детских рисунков с 4 рёбрами используется эрмитова матричная модель. Пусть

$$\langle g(H) \rangle := \frac{\int_{H \in \mathcal{H}_N(\mathbb{C})} g(H) e^{-\text{Tr}(H^2)} dH}{\int_{H \in \mathcal{H}_N(\mathbb{C})} e^{-\text{Tr}(H^2)} dH},$$

где  $\mathcal{H}_N(\mathbb{C})$  — множество всех эрмитовых  $(N \times N)$ -матриц, т. е.  $H = H^+$ , и

$$dH = \prod_{l=1}^N h_{ll} \prod_{l=1}^{N-1} \prod_{j=l+1}^N du_{lj} dv_{lj}$$

для  $H = (h_{lj}) = (u_{lj} + i v_{lj})$ . Функции  $\langle f(Z, Z^+) \rangle$  и  $\langle f(H) \rangle$  называются *комплексными* и *эрмитовыми корреляторами* соответственно.

Пусть  $\langle a_1, \dots, a_\alpha \rangle$  задаёт список валентностей вершин некоторого графа  $\Gamma$  и  $n$  — число ребер этого графа, тогда  $n$  выражается по формуле

$$n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\alpha} a_i.$$

Будем использовать обозначения

$$f_{a_1, \dots, a_\alpha} := \text{Tr}(Z^{a_1}) \dots \text{Tr}(Z^{a_\alpha}) \text{Tr}^n((Z^+)^2)$$

в случае комплексных матричных моделей и

$$g_{a_1, \dots, a_\alpha} := \text{Tr}(H^{a_1}) \dots \text{Tr}(H^{a_\alpha})$$

в случае эрмитовых матричных моделей. Заметим, что в обоих случаях, для комплексных и для эрмитовых матричных моделей, корреляторы  $\langle f_{a_1, \dots, a_\alpha}(Z, Z^+) \rangle$  и  $\langle g_{a_1, \dots, a_\alpha}(H) \rangle$  являются многочленами от  $N$  (размер матриц). Тогда по формуле Вика (см. [6, теорема 3.2.5]) получаем, что после подходящей нормализации коэффициент при  $N^i$  равен сумме  $\frac{1}{|\text{Aut}(D)|}$ , где суммирование проводится по всем детским рисункам  $D$  с  $i$  гранями, полученным из графа  $\Gamma$ . Выписывание всех соответствующих рисунков завершает перечисление рисунков с одним, двумя, тремя и четырьмя рёбрами.

Связные (т. е. отвечающие связным корреляторам) детские рисунки с любым набором валентностей представлены в тексте. Корреляторы для комплексных матричных моделей были вычислены непосредственно. Для эрмитовых матричных моделей мы воспользовались значениями корреляторов, найденными в [1].

## 4. Однорёберные рисунки

### 4.1. Набор валентностей $\langle 2 \mid 1, 1 \rangle$

Следующая матричная модель соответствует рисункам с одной вершиной:

$$\langle \text{Tr}(Z^2) \text{Tr}((Z^+)^2) \rangle = 2 \cdot 2 \left( \frac{1}{2} N^2 \right).$$

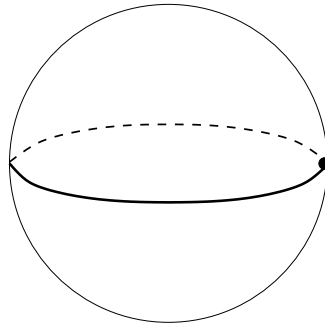


Рис. 1.  $S(2 \mid 11)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
Двойственный рисунок:  $S(11 \mid 2)$ , см. рис. 2 на с. 41. Функция Белого:  $\beta = \frac{z^2}{z^2 - 1}$

### 4.2. Набор валентностей $\langle 1, 1 \mid 2 \rangle$

Следующая матричная модель соответствует рисункам с двумя вершинами:

$$\langle \text{Tr}^2(Z) \text{Tr}((Z^+)^2) \rangle = 2! \cdot 2 \left( \frac{1}{2} N \right).$$

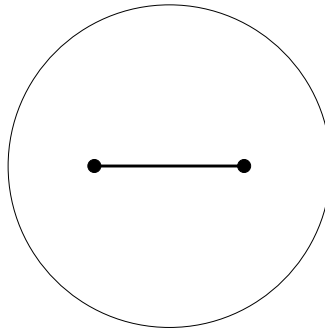


Рис. 2.  $S(11 \mid 2)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
Двойственный рисунок:  $S(2 \mid 11)$ , см. рис. 1 на с. 41. Функция Белого:  $\beta = 1 - z^2$

## 5. Двухрёберные рисунки

### 5.1. Набор валентностей $\langle 4 | * \rangle$

Начнём с рисунков с одной вершиной, тогда валентность этой вершины — 4. Следующая матричная модель соответствует этим рисункам:

$$\langle \text{Tr}(Z^4) \text{Tr}^2((Z^+)^2) \rangle = 4 \cdot 2! \cdot 2^2 \left( \frac{1}{2} N^3 + \frac{1}{4} N \right).$$

### Набор валентностей $\langle 4 | 2, 1, 1 \rangle$

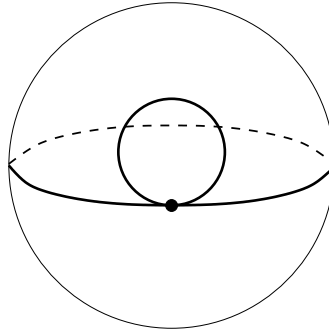


Рис. 3.  $S(4 | 211)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $S(211 | 4)$ , см. рис. 7 на с. 44. Функция Белого:  $\beta = \frac{1}{-4z^2(z^2 - 1)}$

### Набор валентностей $\langle 4 | 4 \rangle$

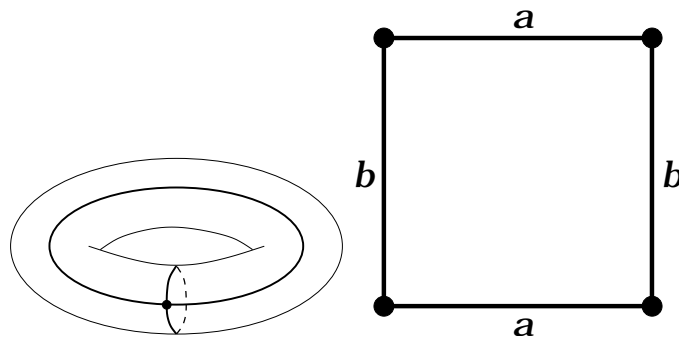


Рис. 4.  $T(4, 4)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ .  
 Этот рисунок является самодвойственным. Пара Белого:  $(X : y^2 = x^3 - x, \beta = x^2)$



### 5.2. Набор валентностей $\langle 3, 1 \mid 3, 1 \rangle$

Рассмотрим рисунки с двумя вершинами. Для разбиения  $4 = 3 + 1$  имеем

$$\langle \text{Tr}(Z^3) \text{Tr}(Z) \text{Tr}^2((Z^+)^2) \rangle = 3 \cdot 2! \cdot 2^2(N^2).$$

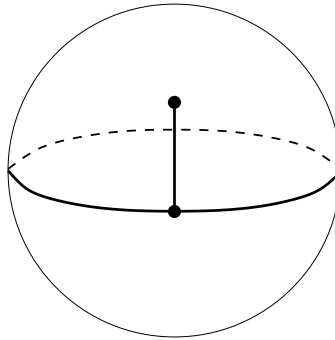


Рис. 5.  $S(31 \mid 31)$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.

Он самодвойственный. Функция Белого:  $\beta = -64 \frac{z^3(z-1)}{8z+1}$

### 5.3. Набор валентностей $\langle 2, 2 \mid 2, 2 \rangle$

Для разбиения  $4 = 2 + 2$  имеем

$$\langle \text{Tr}^2(Z^2) \text{Tr}^2((Z^+)^2) \rangle = 2! \cdot 2^2 \cdot 2! \cdot 2^2 \left( \frac{1}{4} N^2 \right).$$

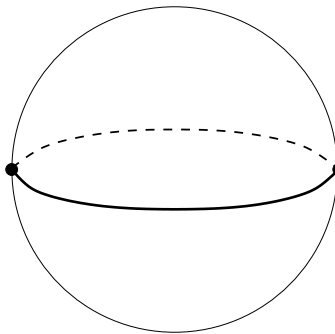


Рис. 6.  $S(22 \mid 22)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ .

Рисунок самодвойственен. Функция Белого:  $\beta = \frac{(z^2-1)^2}{-4z^2}$

#### 5.4. Набор валентностей $\langle 2, 1, 1 \mid 4 \rangle$

$$\langle \text{Tr}(Z^2) \text{Tr}^2(Z) \text{Tr}^2((Z^+)^2) \rangle = 2 \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2^2 \left( \frac{1}{2} N \right).$$

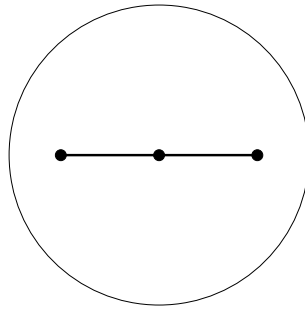


Рис. 7.  $S(211 \mid 4)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
Двойственный рисунок:  $S(4 \mid 211)$ , см. рис. 3 на с. 42. Функция Белого:  $\beta = -4z^2(z^2 - 1)$

## 6. Трёхрёберные рисунки

### 6.1. Набор валентностей $\langle 6 \mid * \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr}(Z^6) \text{Tr}^3((Z^+)^2) \rangle &= 6 \cdot 3! \cdot 2^3 \left( \frac{5}{6} N^4 + \frac{5}{3} N^2 \right) = \\ &= 6 \cdot 3! \cdot 2^3 \left( \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) N^4 + \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) N^2 \right). \end{aligned}$$

#### Набор валентностей $\langle 6 \mid 3, 1, 1, 1 \rangle$

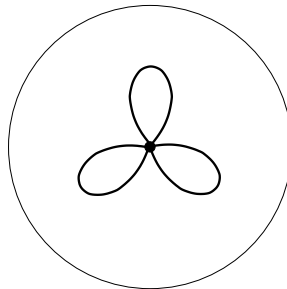


Рис. 8.  $S(6 \mid 3111)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_3$ .  
Двойственный рисунок:  $S(3111 \mid 6)$ , см. рис. 25 на с. 53. Функция Белого:  $\beta = \frac{1}{-4z^3(z^3 - 1)}$

**Набор валентностей  $\langle 6 | 2, 2, 1, 1 \rangle$**

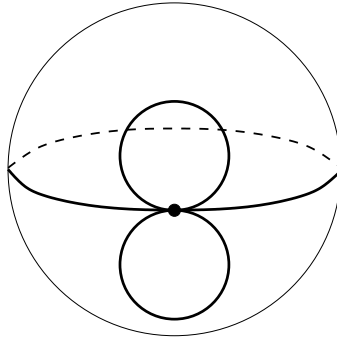


Рис. 9.  $S(6 | 2211)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $S(2211 | 6)$ , см. рис. 27 на с. 54.  
 Функция Белого:  $\beta = \frac{-4}{(z^2 - 1)^2(z^2 - 4)}$

**Набор валентностей  $\langle 6 | 5, 1 \rangle$**

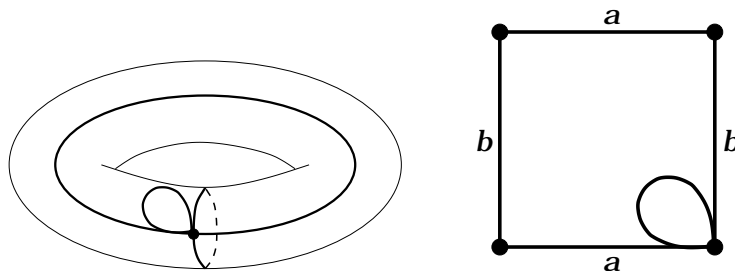


Рис. 10.  $T(6 | 51)$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $T(51 | 6)$ , см. рис. 15 на с. 48.

Функция Белого:  $\beta = -\frac{1}{216} \frac{(2x^3 + 2yx - 29x^2 - 15y + 85x - 50)x^3}{2x + 1}$

на кривой  $X: y^2 = x^4 - 14x^3 + 29x^2 - 60x$ .

Здесь  $n_0 = \frac{625}{11664} \frac{x^6}{2x + 1}$ ,  $n_1 = \frac{1}{11664} \frac{(29x^3 - 54x^2 + 108x + 108)^2}{2x + 1}$

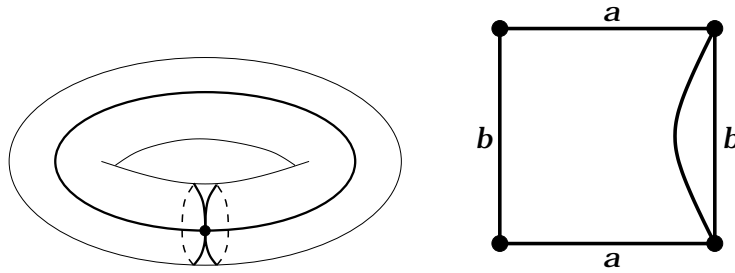
**Набор валентностей  $\langle 6 \mid 4, 2 \rangle$** 

Рис. 11.  $T(6 \mid 42)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $T(42 \mid 6)$ , см. рис. 17 на с. 49.  
 Пара Белого:  $\left( X: y^2 = x(x+3)(x-1), \beta = \frac{4x^3}{27(x-1)} \right)$

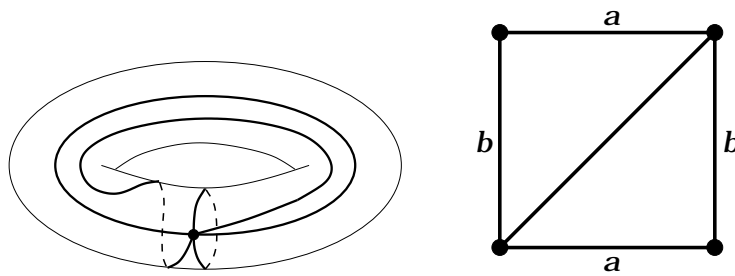
**Набор валентностей  $\langle 6 \mid 3, 3 \rangle$** 

Рис. 12.  $T(6 \mid 33)$ . Набор валентностей  $\langle 6 \mid 3, 3 \rangle$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_6$ .  
 Двойственный рисунок:  $T(33 \mid 6)$ , см. рис. 22 на с. 51.  
 Пара Белого:  $(X: y^2 = x^4 - x, \beta = x^3)$

**6.2. Набор валентностей  $\langle 5, 1 \mid * \rangle$** 

$$\langle \text{Tr}(Z^5) \text{Tr}(Z) \text{Tr}^3((Z^+)^2) \rangle = 5 \cdot 3! \cdot 2^3(2N^3 + N) = 5 \cdot 3! \cdot 2^3((1 + 1)N^3 + N).$$

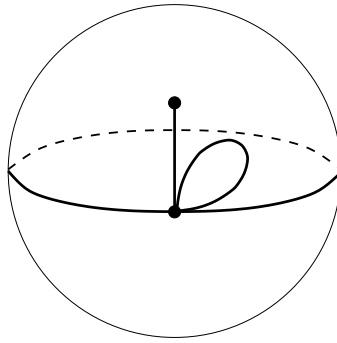
**Набор валентностей  $\langle 5, 1 \mid 4, 1, 1 \rangle$** 

Рис. 13.  $S(51 \mid 411)$ . Не существует нетривиальных автоморфизмов данного рисунка.  
Двойственный рисунок:  $S(411 \mid 51)$ , см. рис. 18 на с. 49.

$$\text{Функция Белого: } \beta = \frac{256(z-1)}{z^4(z^2+4z+20)}$$

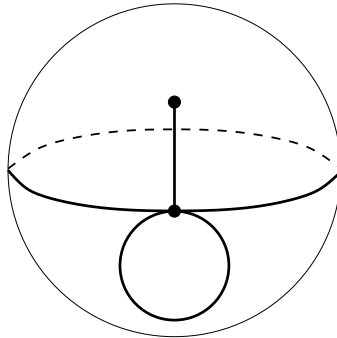
**Набор валентностей  $\langle 5, 1 \mid 3, 2, 1 \rangle$** 

Рис. 14.  $S(51 \mid 321)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
Двойственный рисунок:  $S(321 \mid 51)$ , см. рис. 23 на с. 52.

$$\text{Функция Белого: } \beta = \frac{-64(15z+1)}{3125z^3(z-1)^2(5z-8)}$$

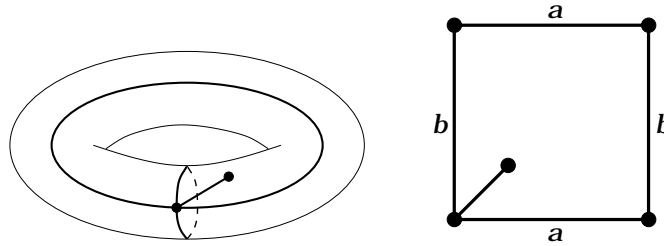
**Набор валентностей  $\langle 5, 1 \mid 6 \rangle$** 

Рис. 15.  $T(51 \mid 6)$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $T(6 \mid 51)$ , см. рис. 10 на с. 45.

$$\text{Функция Белого: } \beta = \frac{25x^3 - 270yx - 255x^2 + 216y + 522x - 216}{1250}$$

на кривой  $X: y^2 = -\frac{5}{18}x^3 + \frac{29}{36}x^2 - \frac{7}{3}x + 1$ .

$$\text{Здесь } n_0 = \frac{x^5(12+x)}{2500}, n_1 = \frac{(x^3 + 6x^2 - 18x + 58)^2}{2500}$$

**6.3. Набор валентностей  $\langle 4, 2 \mid * \rangle$** 

$$\langle \text{Tr}(Z^4) \text{Tr}(Z^2) \text{Tr}^3((Z^+)^2) \rangle = 4 \cdot 2 \cdot 3! \cdot 2^3 \left( N^3 + \frac{1}{2}N \right).$$

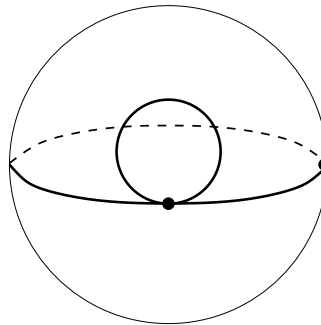
**Набор валентностей  $\langle 4, 2 \mid 3, 2, 1 \rangle$** 

Рис. 16.  $S(42 \mid 321)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(321 \mid 42)$ , см. рис. 24 на с. 52.

$$\text{Функция Белого: } \beta = \frac{-(3z-2)^2}{4z^3(z-1)^2(z+2)}$$

**Набор валентностей  $\langle 4, 2 \mid 6 \rangle$**

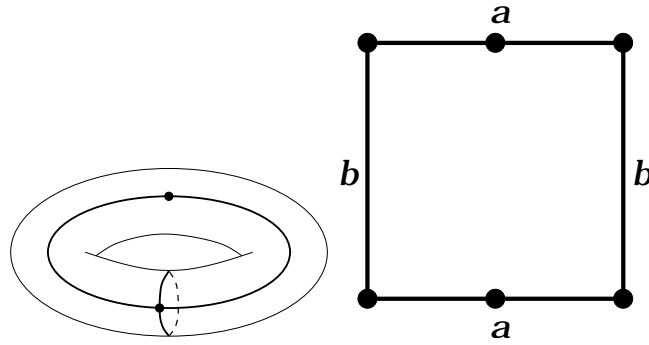


Рис. 17.  $T(42 \mid 6)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $T(6 \mid 42)$ , см. рис. 11 на с. 46.  
 Пара Белого:  $\left( X : y^2 = 4x^3 - 39x + 35, \beta = \frac{(x-1)^2(2x+7)}{27} \right)$

**6.4. Набор валентностей  $\langle 4, 1, 1 \mid * \rangle$**

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr}(Z^4) \text{Tr}(Z) \text{Tr}(Z) \text{Tr}^3((Z^+)^2) \rangle &= \\ &= 2! \cdot 4 \cdot 3! \cdot 2^3 \left( \frac{3}{2} N^2 \right) = 2! \cdot 4 \cdot 3! \cdot 2^3 \left( \left( 1 + \frac{1}{2} \right) N^2 \right). \end{aligned}$$

**Набор валентностей  $\langle 4, 1, 1 \mid 5, 1 \rangle$**

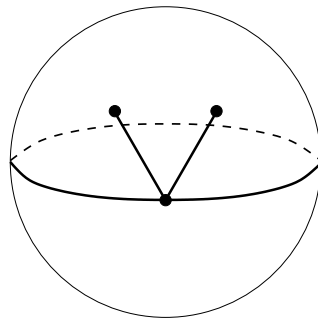


Рис. 18.  $S(411 \mid 51)$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(51 \mid 411)$ , см. рис. 13 на с. 47. Функция Белого:  $\beta = \frac{z^4(z^2 + 4z + 20)}{256(z-1)}$

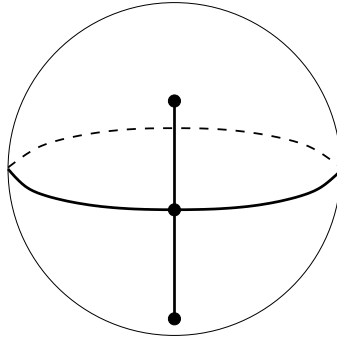
**Набор валентностей  $\langle 4, 1, 1 \mid 3, 3 \rangle$** 

Рис. 19.  $S(411 \mid 33)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $S(33 \mid 411)$ , см. рис. 20 на с. 50. Функция Белого:  $\beta = \frac{z^4(4z^2 - 3)}{4(z^2 - 1)^3}$

**6.5. Набор валентностей  $\langle 3, 3 \mid * \rangle$** 

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr}(Z^3) \text{Tr}(Z^3) \text{Tr}^3((Z^+)^2) \rangle &= \\ &= 2! \cdot 3^2 \cdot 3! \cdot 2^3 \left( \frac{2}{3} N^3 + \frac{1}{6} N \right) = 2! \cdot 3^2 \cdot 3! \cdot 2^3 \left( \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) N^3 + \frac{1}{6} N \right). \end{aligned}$$

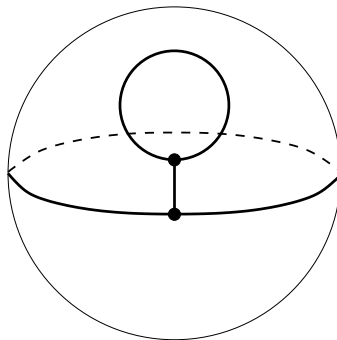
**Набор валентностей  $\langle 3, 3 \mid 4, 1, 1 \rangle$** 

Рис. 20.  $S(33 \mid 411)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $S(411 \mid 33)$ , см. рис. 19 на с. 50. Функция Белого:  $\beta = \frac{4(z^2 - 1)^3}{z^4(4z^2 - 3)}$



**Набор валентностей  $\langle 3, 3 \mid 2, 2, 2 \rangle$**

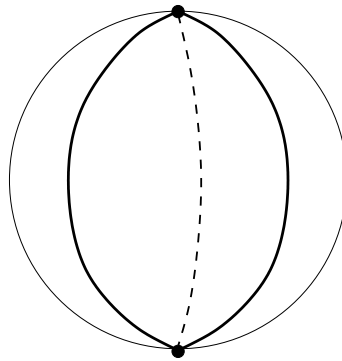


Рис. 21.  $S(33 \mid 222)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_6$ .  
 Двойственный рисунок:  $S(222 \mid 33)$ , см. рис. 26 на с. 53.

Функция Белого:  $\beta = \frac{-4z^3}{(z^3 - 1)^2}$

**Набор валентностей  $\langle 3, 3 \mid 6 \rangle$**

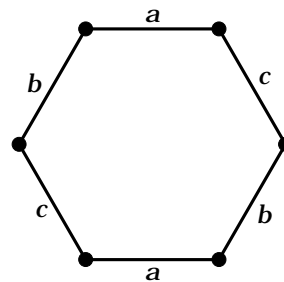
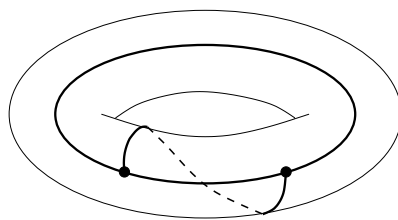


Рис. 22.  $T(33 \mid 6)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_6$ .  
 Двойственный рисунок:  $T(6 \mid 33)$ , см. рис. 12 на с. 46.

Пара Белого:  $(X : y^2 = x^3 - 1, \beta = x^3)$

### 6.6. Набор валентностей $\langle 3, 2, 1 \mid * \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr}(Z^3) \text{Tr}(Z^2) \text{Tr}(Z) \text{Tr}^3((Z^+)^2) \rangle &= \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 3! \cdot 2^3(2N^2) = 3 \cdot 2 \cdot 3! \cdot 2^3((1+1)N^2). \end{aligned}$$

#### Набор валентностей $\langle 3, 2, 1 \mid 5, 1 \rangle$

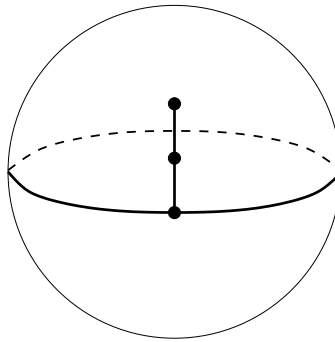


Рис. 23.  $S(321 \mid 51)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
Двойственный рисунок:  $S(51 \mid 321)$ , см. рис. 14 на с. 47.

$$\text{Функция Белого: } \beta = \frac{-z^3(z-5)^2(z-8)}{64(3z+1)}$$

#### Набор валентностей $\langle 3, 2, 1 \mid 4, 2 \rangle$

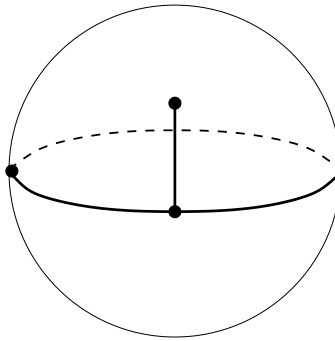


Рис. 24.  $S(321 \mid 42)$ . Нетривиальных автоморфизмов нет.  
Двойственный рисунок:  $S(42 \mid 321)$ , см. рис. 16 на с. 48.

$$\text{Функция Белого: } \beta = \frac{-4z^3(z-1)^2(z+2)}{(3z-2)^2}$$

### 6.7. Набор валентностей $\langle 3, 1, 1, 1 \mid 6 \rangle$

$$\langle \text{Tr}(Z^3) \text{Tr}^3(Z) \text{Tr}^3((Z^+)^2) \rangle = 3 \cdot 3! \cdot 2^3 \left( \frac{1}{3} N \right).$$

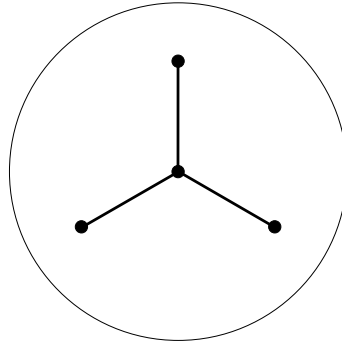


Рис. 25.  $S(3111 \mid 6)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_3$ .  
 Двойственный рисунок:  $S(6 \mid 3111)$ , см. рис. 8 на с. 44. Функция Белого:  $\beta = -4z^3(z^3 - 1)$

### 6.8. Набор валентностей $\langle 2, 2, 2 \mid 3, 3 \rangle$

$$\langle \text{Tr}^3(Z^2) \text{Tr}^3((Z^+)^2) \rangle = 3! \cdot 2^3 \cdot 3! \cdot 2^3 \left( \frac{1}{6} N^2 \right).$$

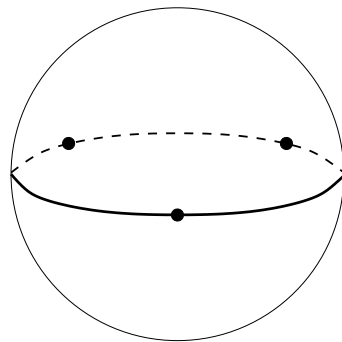


Рис. 26.  $S(222 \mid 33)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_3$ .  
 Двойственный рисунок:  $S(33 \mid 222)$ , см. рис. 21 на с. 51. Функция Белого:  $\beta = \frac{-(z^3 - 1)^2}{4z^3}$

### 6.9. Набор валентностей $\langle 2, 2, 1, 1 \mid 6 \rangle$

$$\langle \text{Tr}^2(Z^2) \text{Tr}^2(Z) \text{Tr}^3((Z^+)^2) \rangle = 2! \cdot 2^2 \cdot 2! \cdot 3! \cdot 2^3 \left( \frac{1}{2} N \right).$$

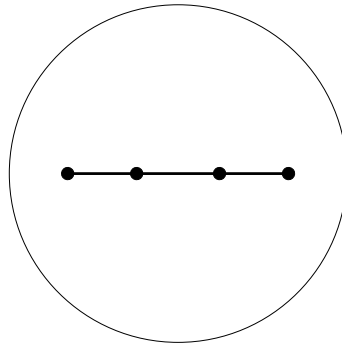


Рис. 27.  $S(2211 \mid 6)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $S(6 \mid 2211)$ , см. рис. 9 на с. 45.  
 Функция Белого:  $\beta = -(4z^2 - 1)^2(z^2 - 1)$

## 7. Четырёхрёберные рисунки

### 7.1. Набор валентностей $\langle 8 \mid * \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr}(H^8) \rangle &= 8 \left( \frac{7}{4} N^5 + \frac{35}{4} N^3 + \frac{21}{8} N \right) = \\ &= 8 \left( \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) N^5 + \left( 7 + 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) N^3 + \left( 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) N \right). \end{aligned}$$

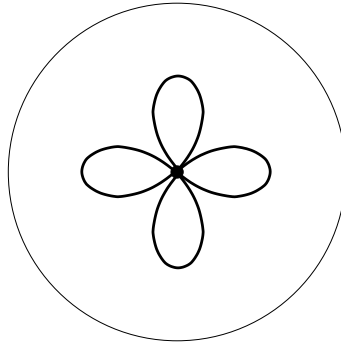
**Набор валентностей  $\langle 8 \mid 4, 1, 1, 1, 1 \rangle$** 

Рис. 28.  $S(8 \mid 41111)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_4$ .  
 Двойственный рисунок:  $S(41111 \mid 8)$ , см. рис. 121 на с. 105.

$$\text{Функция Белого: } \beta = \frac{z^8}{4(z-1)(z+1)(z^2+1)}$$

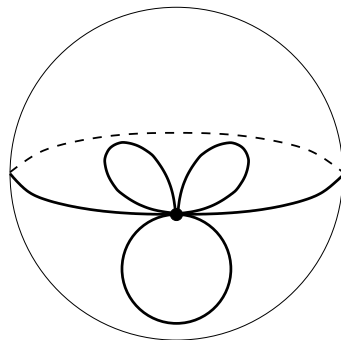
**Набор валентностей  $\langle 8 \mid 3, 2, 1, 1, 1 \rangle$** 

Рис. 29.  $S(8 \mid 32111)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(32111 \mid 8)$ , см. рис. 132 на с. 110.

$$\text{Функция Белого: } \beta = \frac{729}{1024} \frac{z^8}{(z-1)(3z^2+8z+16)(3z-4)^2}$$

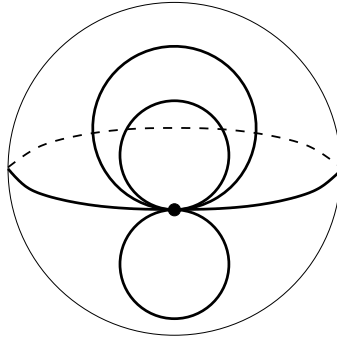
**Набор валентностей  $\langle 8 \mid 2, 2, 2, 1, 1 \rangle$** 

Рис. 30.  $S(8 \mid 22211)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $S(22211 \mid 8)$ , см. рис. 134 на с. 111.

Функция Белого: 
$$\beta = \frac{1}{-4z^2(z^2 - 2)(z - 1)^2(z + 1)^2}$$

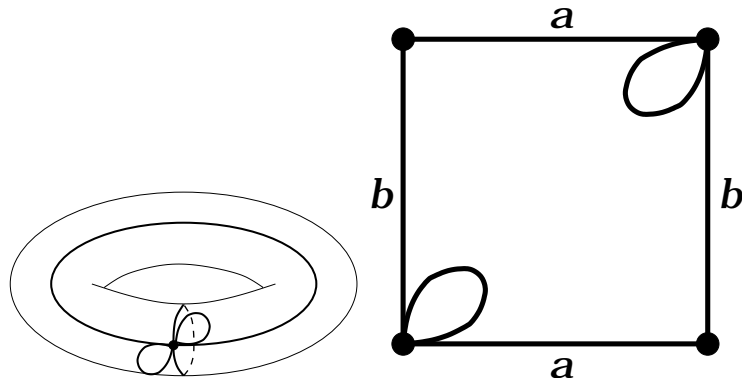
**Набор валентностей  $\langle 8 \mid 6, 1, 1 \rangle$** 

Рис. 31.  $T(8 \mid 611)_2$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $T(611 \mid 8)_2$ , см. рис. 76 на с. 81.  
 Пара Белого:  $\left( X: y^2 = 3x^3 + 8x^2 + 16x, \beta = \frac{27}{256} \frac{x^4}{x - 1} \right)$

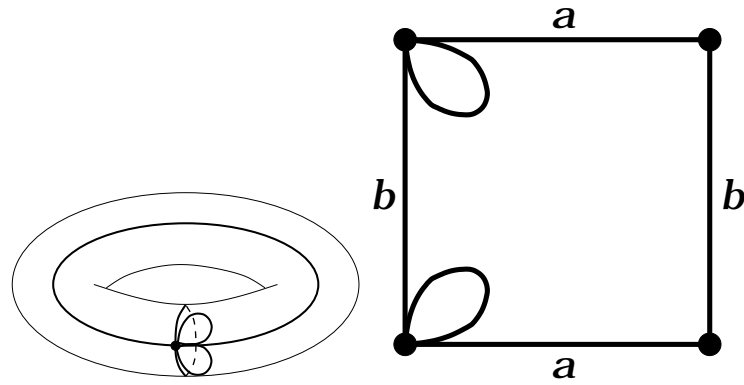


Рис. 32.  $T(8|611)_1A$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $T(611|8)_1A$ , см. рис. 77 на с. 81

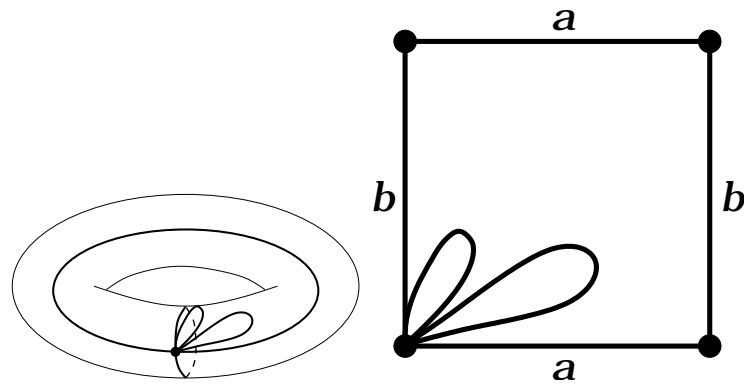


Рис. 33.  $T(8|611)_1B$ . Нетривиальных автоморфизмов нет.  
 Двойственный рисунок:  $T(611|8)_1B$ , см. рис. 78 на с. 82

Для рисунка  $T(8|611)_1A$  функцию Белого  $\beta$  на кривой

$$X: y^2 = -x^3 + 20x^2 - 8\sqrt{2}x^2 + 1104\sqrt{2}x - 132x$$

можно найти из равенства

$$\frac{1}{\beta} = -\frac{1}{22769316864}(-835 - 872\sqrt{2}) \times \\
\times (x^4 - 16yx^2 + 24\sqrt{2}yx^2 - 648x^3 + 272\sqrt{2}x^3 - 4032\sqrt{2}yx + \\
+ 4224yx - 19296\sqrt{2}x^2 + 34200x^2 + 30240\sqrt{2}y - \\
- 50112y - 818208x + 706752\sqrt{2}x - 1088640\sqrt{2} + 1708560).$$

Для рисунка  $T(8|611)_1B$  функцию Белого  $\beta$  на кривой

$$X: y^2 = -x^3 + 20x^2 + 8\sqrt{2}x^2 - 1104\sqrt{2}x - 132x$$

можно найти из равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} = & -\frac{1}{22769316864}(-835 + 872\sqrt{2}) \times \\ & \times (x^4 - 16yx^2 - 24\sqrt{2}yx^2 - 648x^3 - 272\sqrt{2}x^3 + 4032\sqrt{2}yx + \\ & + 4224yx + 19296\sqrt{2}x^2 + 34200x^2 - 30240\sqrt{2}y - \\ & - 50112y - 818208x - 706752\sqrt{2}x + 1088640\sqrt{2} + 1708560). \end{aligned}$$

**Набор валентностей  $\langle 8 | 5, 2, 1 \rangle$**

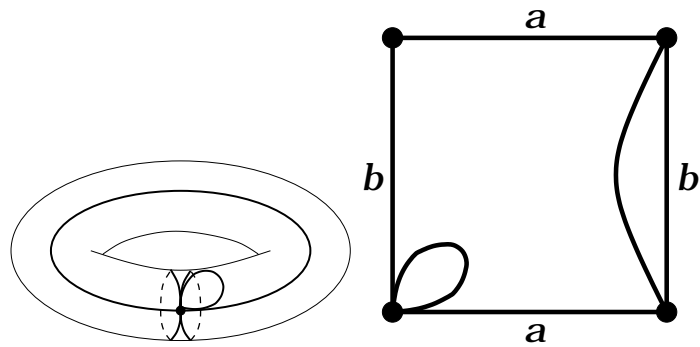


Рис. 34.  $T(8|521)A_+$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
Двойственный рисунок:  $T(521|8)A_+$ , см. рис. 92 на с. 90

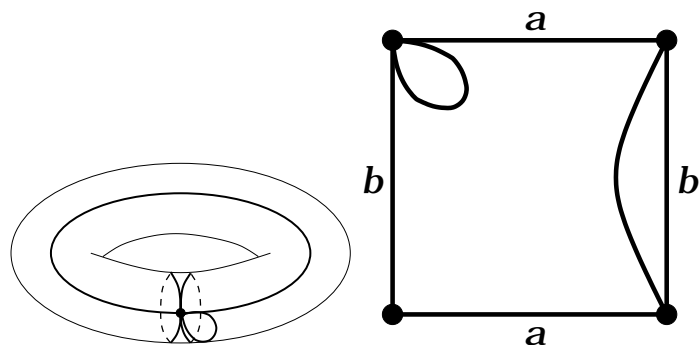


Рис. 35.  $T(8|521)A_-$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
Двойственный рисунок:  $T(521|8)A_-$ , см. рис. 93 на с. 90



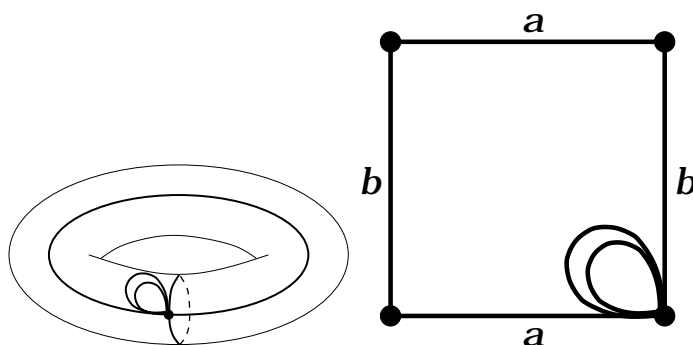


Рис. 36.  $T(8|521)B$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.  
Двойственный рисунок:  $T(521|8)B$ , см. рис. 94 на с. 91

Для рисунков  $T(8|521)A_+$ ,  $T(8|521)A_-$  и  $T(8|521)B$  функции Белого  $\beta$  на кривых

$$X: y^2 = -\frac{17\nu^2 + 8 - 42\nu}{960400}(19600x^2 + 55552\nu x - 18432\nu^2 x - 88408x + \\ + 338963 - 130592\nu + 65792\nu^2)(x - 1)$$

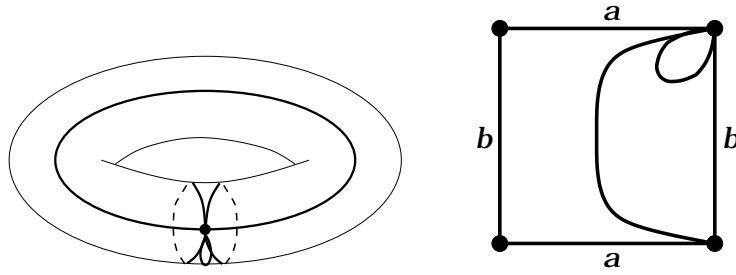
можно найти из равенства

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{735306250}(552\nu^2 - 617\nu + 68)(42875x^4 + 1756160\nu yx^2 - 860160\nu^2 yx^2 - \\ - 4543840yx^2 + 3959200\nu x^3 - 10346175x^3 - 1926400\nu^2 x^3 + 31782912\nu^2 yx - \\ - 63438592\nu yx + 168996968yx + 18916352\nu^2 x^2 - 37781632\nu x^2 + \\ + 100206428x^2 - 257512128y - 48381952\nu^2 y + 96684032\nu y - 62101504\nu^2 x - \\ - 330259656x + 123960064\nu x + 48381952\nu^2 - 96684032\nu + 257512128).$$

Здесь

$$256\nu^3 - 544\nu^2 + 1427\nu - 172 = 0,$$

причём вещественный корень этого уравнения соответствует случаю  $B$ .

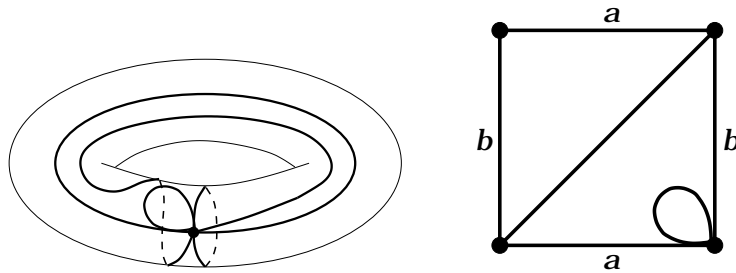
**Набор валентностей  $\langle 8 \mid 4, 3, 1 \rangle$** Рис. 37.  $T(8 \mid 431)A$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.Двойственный рисунок:  $T(431 \mid 8)A$ , см. рис. 110 на с. 99. Функция Белого:

$$\beta = -\frac{85766121}{256}(5488x^4 + 14112yx^2 - 26264x^3 + 37548yx - 202741x^2 + 3240y - 73368x - 3240)^{-1}$$

$$\text{на кривой } X: y^2 = \frac{1}{81}(1-x)(448x^2 + 1872x + 81).$$

$$\text{Здесь } n_0 = \frac{62523502209}{65536} \frac{1}{x^4(4x+45)(4x+21)^3},$$

$$n_1 = \frac{(4096x^4 + 55296x^3 + 158976x^2 + 55296x - 247617)^2}{65536x^4(4x+45)(4x+21)^3}$$

Рис. 38.  $T(8 \mid 431)B$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.Двойственный рисунок:  $T(431 \mid 8)B$ , см. рис. 111 на с. 100. Функция Белого:

$$\beta = -36(81x^4 - 108yx^2 + 288x^3 - 96yx + 308x^2 - 24y + 160x + 32)^{-1}$$

$$\text{на кривой } X: y^2 = \frac{4}{9}(x+1)(9x^2 + 4x + 4).$$

$$\text{Здесь } n_0 = \frac{16}{3} \frac{1}{(x-2)(3x+2)^3x^4}, \quad n_1 = \frac{1}{27} \frac{(27x^4 - 36x^2 - 32x - 20)^2}{(x-2)(3x+2)^3x^4}$$

**Набор валентностей  $\langle 8 \mid 4, 2, 2 \rangle$**

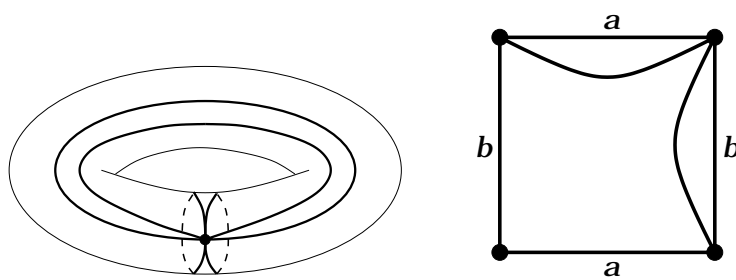


Рис. 39.  $T(8 \mid 422)_4$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $T(422 \mid 8)_4$ , см. рис. 114 на с. 101.  
 Пара Белого:  $\left( X: y^2 = x^3 - x, \beta = \frac{1}{4} \frac{x^4}{(x-1)(x+1)} \right)$

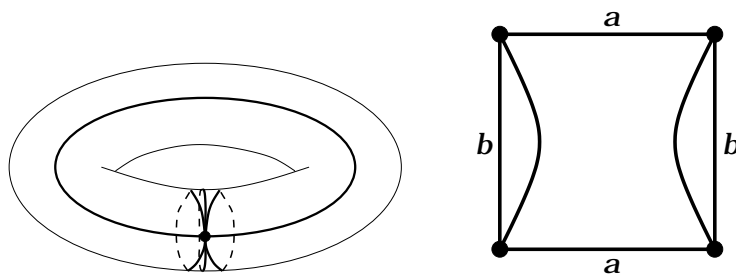


Рис. 40.  $T(8 \mid 422)_2$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $T(422 \mid 8)_2$ , см. рис. 115 на с. 102.  
 Пара Белого:  $\left( X: y^2 = 4x^3 - 4x^2 - x, \beta = \frac{1}{16x^2(x-1)^2} \right)$

**Набор валентностей  $\langle 8 | 3, 3, 2 \rangle$**

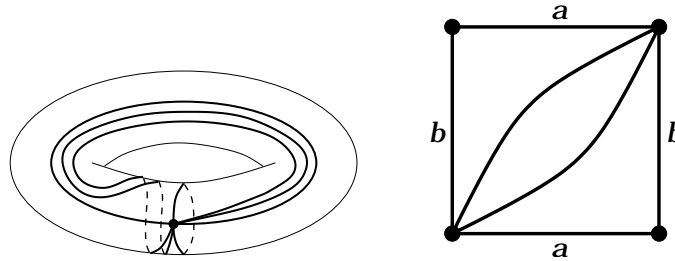


Рис. 41.  $T(8 | 332)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $T(332 | 8)$ , см. рис. 125 на с. 107.  
 Пара Белого:  $\left( X : y^2 = x(x-1)(3x^2 + 8x + 16), \beta = \frac{27}{256} \frac{x^4}{x-1} \right)$

**Набор валентностей  $\langle 8 | 8 \rangle$**

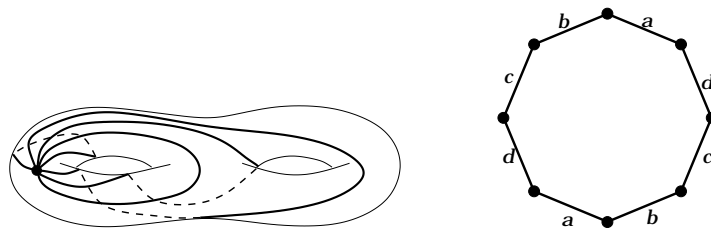


Рис. 42.  $P(8 | 8)_8$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_8$ .  
 Этот рисунок является самодвойственным. Пара Белого:  $(X : y^2 = x^5 - x, \beta = x^4)$

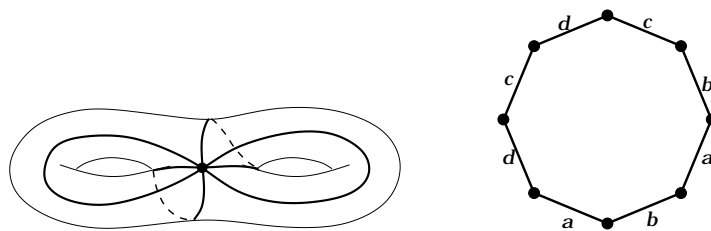


Рис. 43.  $P(8 | 8)_2$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Этот рисунок является самодвойственным.  
 Функция Белого:  $\beta = -(-xy + x^4 - 2x^2 + 1)^2$  на кривой  $X : y^2 = (x^2 - 2)(x^4 - 2x^2 + 2)$ .  
 Здесь  $n_0 = 1, n_1 = 4(x-1)^4(x+1)^4$

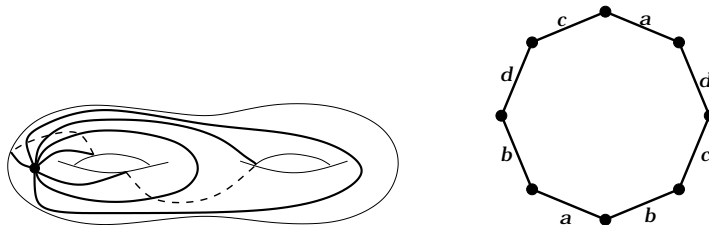


Рис. 44.  $P(8|8)_{1A}$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов. Этот рисунок является самодвойственным

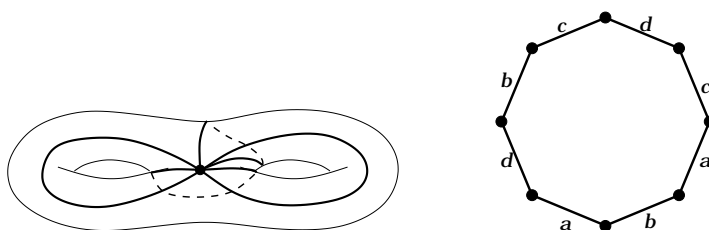


Рис. 45.  $P(8|8)_{1B}$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов. Этот рисунок является самодвойственным

Попарно сопряжённые функции Белого рисунков  $P(8|8)_{1A}$  и  $P(8|8)_{1B}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \beta = & -\frac{1}{8}(-5 + 4\mu)(x - 1 - \mu)(x + 1 - \mu)(x + 1)(x^2 - 2x - 2\mu x + 1)y + \\ & + \frac{1}{56}(-5 + 4\mu)(7x^8 - 8x^7 - 40\mu x^7 + 140x^6 - 56\mu x^5 + \\ & + 168x^5 - 14x^4 - 224\mu x^4 + 168x^3 - 56\mu x^3 + 140x^2 - 8x - 40\mu x + 7) \end{aligned}$$

на кривых

$$X: \left\{ y^2 = x^6 - \frac{24}{7}\mu x^5 - \frac{2}{7}x^5 + \frac{107}{49}x^4 - \frac{200}{49}\mu x^4 + \right. \\ \left. + \frac{500}{49}x^3 - \frac{48}{49}\mu x^3 - \frac{200}{49}\mu x^2 + \frac{107}{49}x^2 - \frac{24}{7}\mu x - \frac{2}{7}x + 1 \right\}.$$

$$n_0 = x^8, \quad n_1 = -\frac{1}{196}(-9 + 4\mu)(7x^4 + 12x^3 - 4\mu x^3 + 6x^2 - 16\mu x^2 + 12x - 4\mu x + 7)^2,$$

где  $\mu = \pm\sqrt{2}$ .

## 7.2. Набор валентностей $\langle 7, 1 \mid * \rangle$

$$\langle \text{Tr}(H^7) \text{Tr}(H) \rangle = 7(5N^4 + 10N^2).$$

### Набор валентностей $\langle 7, 1 \mid 5, 1, 1, 1 \rangle$

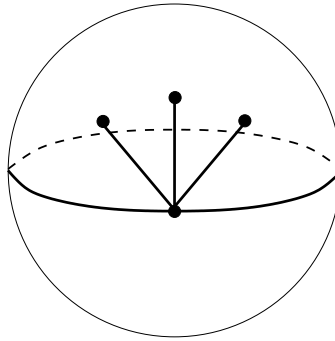


Рис. 46.  $S(71 \mid 5111)$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.

Двойственный рисунок:  $S(5111 \mid 71)$ , см. рис. 95 на с. 92.

$$\text{Функция Белого: } \beta = \frac{16384z(z-1)^7}{896z^3 - 2912z^2 + 3216z - 1225}$$

### Набор валентностей $\langle 7, 1 \mid 4, 2, 1, 1 \rangle$

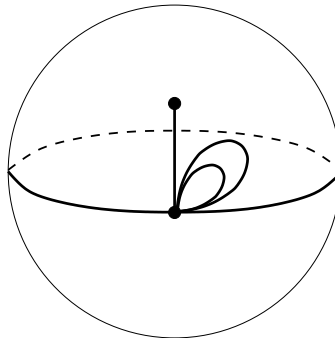


Рис. 47.  $S(71 \mid 4211)_+$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.

Двойственный рисунок:  $S(4211 \mid 71)_+$ , см. рис. 116 на с. 102.

$$\text{Функция Белого: } \beta = \frac{-7340032(i\sqrt{7} + 21)z(z-1)^7}{(896z^2 - 1904z + 48iz\sqrt{7} + 1029 - 49i\sqrt{7})(112z - 119 - 5i\sqrt{7})^2}$$

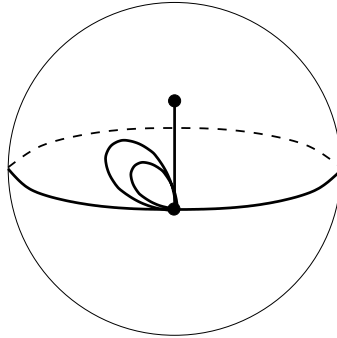


Рис. 48.  $S(71 | 4211)_-$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов. Двойственный рисунок:  $S(4211 | 71)_-$ , см. рис. 117 на с. 103. Функция Белого:

$$\beta = \frac{-7340032(-i\sqrt{7} + 21)z(z-1)^7}{(896z^2 - 1904z - 48iz\sqrt{7} + 1029 + 49i\sqrt{7})(112z - 119 + 5i\sqrt{7})^2}$$

**Набор валентностей  $\langle 7, 1 | 3, 3, 1, 1 \rangle$**

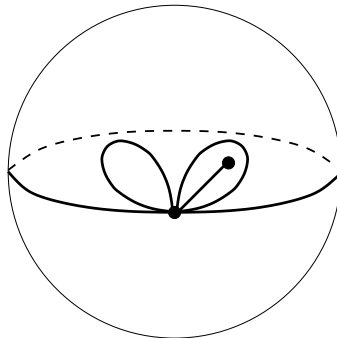


Рис. 49.  $S(71 | 3311)$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов. Двойственный рисунок:  $S(3311 | 71)$ , см. рис. 126 на с. 107.

Функция Белого:  $\beta = -1728 \frac{z}{(1+z^2-5z)^3(49-13z+z^2)}$

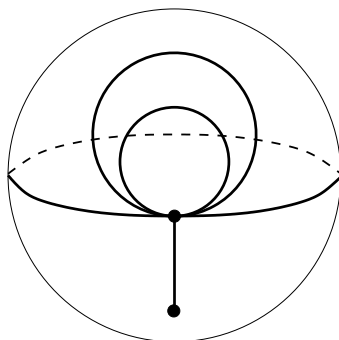
**Набор валентностей  $\langle 7, 1 \mid 3, 2, 2, 1 \rangle$** 

Рис. 50.  $S(71 \mid 3221)$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(3221 \mid 71)$ , см. рис. 129 на с. 109.

$$\text{Функция Белого: } \beta = -\frac{1}{256} \frac{z^7(-48+z)}{(z+1)(7z^2+28z+24)^2}$$

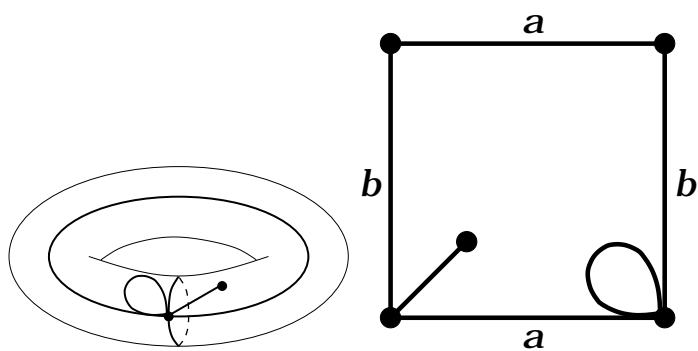
**Набор валентностей  $\langle 7, 1 \mid 7, 1 \rangle$** 

Рис. 51.  $T(71 \mid 71)A_+$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $T(71 \mid 71)A_-$ , см. рис. 52 на с. 67



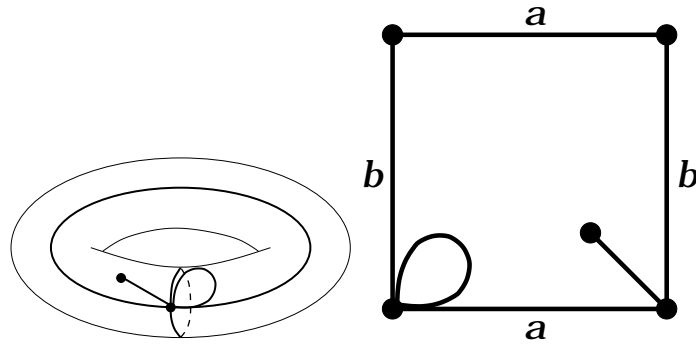


Рис. 52.  $T(71 | 71)A_-$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $T(71 | 71)A_+$ , см. рис. 51 на с. 66

Для рисунков  $T(71 | 71)A_+$  и  $T(71 | 71)A_-$  функция Белого имеет вид

$$\beta = -\frac{(\nu + 3)}{8(32x - 51 - 7\nu)} \times$$

$$\times (-2\nu y x^3 + 10y x^3 + 56x^4 - 64y x^2 - 14\nu x^3 - 266x^3 + 116y x +$$

$$+ 12\nu y x + 504x^2 + 56\nu x^2 - 11\nu y - 73y - 454x - 82\nu x + 171 + 41\nu)$$

на кривой вида

$$X: y^2 = -\frac{1}{32}(5 + \nu)(16x^3 + 4\nu x^2 - 52x^2 - 4\nu x + 68x + \nu - 37),$$

В этом случае

$$n_0 = \frac{(13 + 7\nu)(x + 3)(x - 1)^7}{8(32x - 51 - 7\nu)},$$

$$n_1 = \frac{(13 + 7\nu)(8x^4 - 16x^3 - 16x^2 + 80x - 59 - 7\nu)^2}{512(32x - 51 - 7\nu)}.$$

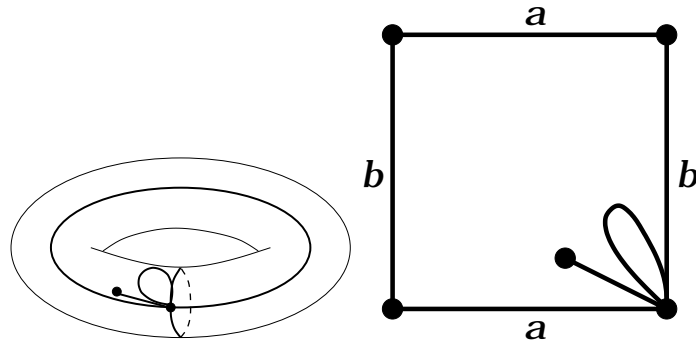


Рис. 53.  $T(71 | 71)B_+$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.  
Рисунок является самодвойственным

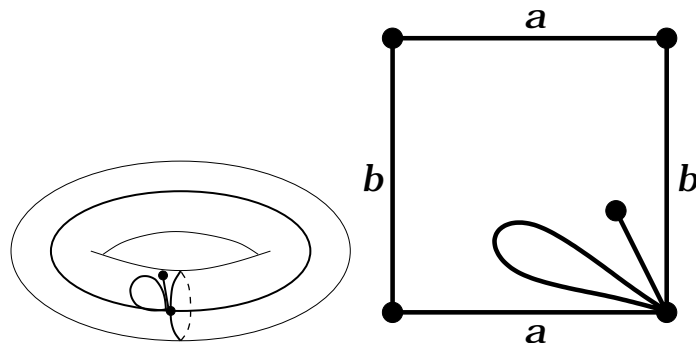


Рис. 54.  $T(71 | 71)B_-$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.  
Рисунок является самодвойственным

Для рисунка  $T(71 | 71)B_+$  функция Белого на кривой

$$X: -x^4 - \frac{11}{7}i\sqrt{7}x^3 - \frac{11}{7}x^3 + \frac{519}{98}x^2 - \frac{153}{98}i\sqrt{7}x^2 + \frac{51}{49}i\sqrt{7}x + \frac{869}{343}x + y^2 - 1 = 0$$

имеет вид

$$\beta = -\frac{343}{33554432} \frac{(-91i\sqrt{7}+87)(98x^2+21x+21i\sqrt{7}x+2)(14x^2+7x+7i\sqrt{7}x-2)^2y}{x} +$$

$$+ \frac{1}{8388608x} (-91i\sqrt{7}+87)(1647086x^8 + 3294172x^7 + 3294172i\sqrt{7}x^7 -$$

$$- 15764966x^6 + 4941258i\sqrt{7}x^6 - 4705960i\sqrt{7}x^5 - 17882648x^5 -$$

$$- 3882417i\sqrt{7}x^4 + 5260591x^4 + 672280i\sqrt{7}x^3 + 2554664x^3 - 321734x^2 +$$

$$+ 100842i\sqrt{7}x^2 + 2044i\sqrt{7}x + 1532x + 686).$$

В этом случае

$$n_0 = 1, \quad n_1 = -\frac{343}{33554432} \frac{(-91i\sqrt{7} + 87)(14x^2 + 7x + 7i\sqrt{7}x - 2)^4}{x}.$$

Для рисунка  $T(71 | 71)B_-$  функция Белого на кривой

$$X: -x^4 + \frac{11}{7}i\sqrt{7}x^3 - \frac{11}{7}x^3 + \frac{519}{98}x^2 + \frac{153}{98}i\sqrt{7}x^2 - \frac{51}{49}i\sqrt{7}x + \frac{869}{343}x + y^2 - 1 = 0$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \beta = & -\frac{343}{33554432} \frac{(91i\sqrt{7} + 87)(98x^2 + 21x - 21i\sqrt{7}x + 2)(14x^2 + 7x - 7i\sqrt{7}x - 2)^2 y}{x} + \\ & + \frac{1}{8388608x} (91i\sqrt{7} + 87)(1647086x^8 + 3294172x^7 - 3294172i\sqrt{7}x^7 - \\ & - 15764966x^6 - 4941258i\sqrt{7}x^6 + 4705960i\sqrt{7}x^5 - 17882648x^5 + \\ & + 3882417i\sqrt{7}x^4 + 5260591x^4 - 672280i\sqrt{7}x^3 + 2554664x^3 - 321734x^2 - \\ & - 100842i\sqrt{7}x^2 - 2044i\sqrt{7}x + 1532x + 686). \end{aligned}$$

В этом случае

$$n_0 = 1, \quad n_1 = \frac{343}{33554432} \frac{(91i\sqrt{7} + 87)(14x^2 + 7x - 7i\sqrt{7}x - 2)^4}{x}.$$

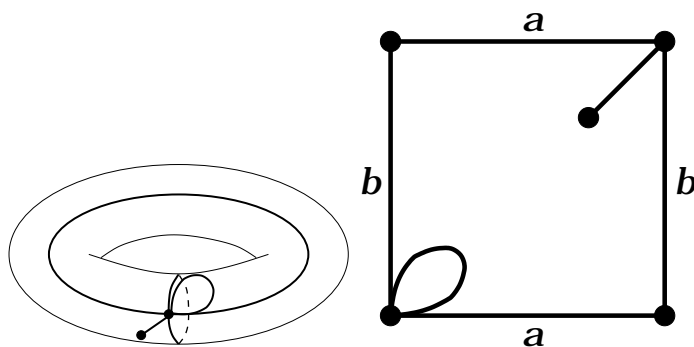


Рис. 55.  $T(71 | 71)C$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.

Рисунок является самодвойственным. Функция Белого имеет вид  $\beta = \frac{1}{128} \frac{x^3(7x + y)}{x - 1}$

на кривой  $X: y^2 = 4x^3 + 13x^2 + 32x$ . В этом случае  $n_0 = -\frac{1}{4096} \frac{x^7(x - 8)}{x - 1}$ ,

$$n_1 = -\frac{1}{4096} \frac{(x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 32x + 64)^2}{x - 1}$$

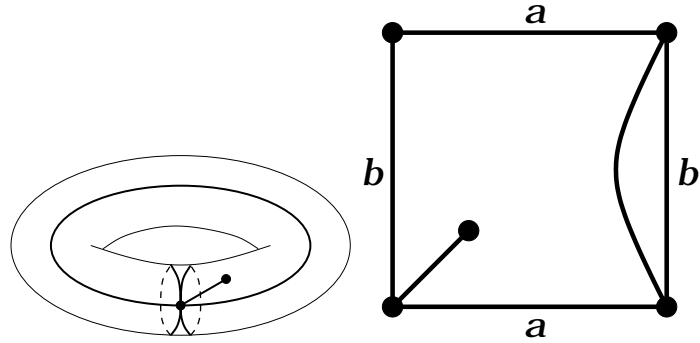
**Набор валентностей  $\langle 7, 1 \mid 6, 2 \rangle$** 

Рис. 56.  $T(71|62)_+$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $T(62|71)_+$ , см. рис. 64 на с. 74

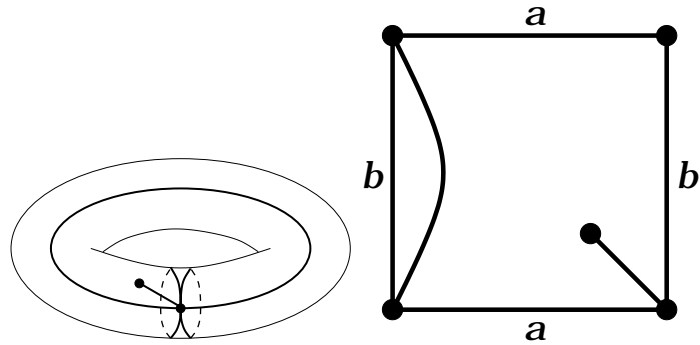


Рис. 57.  $T(71|62)_-$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $T(62|71)_-$ , см. рис. 65 на с. 75

Для рисунков  $T(71|62)_+$  и  $T(71|62)_-$  функции Белого имеют вид

$$\beta = -\frac{2}{49(-112x - 147 + 81\nu)^2} (784x^5 + 19404\nu y x^3 + 12348y x^3 + 15435x^4 + 567\nu x^4 + 54684\nu y x^2 + 188748y x^2 + 80892x^3 - 6804\nu x^3 + 48384\nu y x + 338688y x - 40824\nu x^2 + 146664x^2 + 13608\nu y + 140616y + 104976x - 45360\nu x - 13608\nu + 25272)$$

на кривых вида

$$X: y^2 = -\frac{(35 + 9\nu)}{87808} (2x + 1)(14x^2 + 18\nu x + 42x + 9\nu + 189),$$

где  $\nu = \pm i\sqrt{7}$ . В этом случае

$$n_0 = \frac{4}{49} \frac{(x-24)x^7}{(-112x-147+81\nu)^2},$$

$$n_1 = \frac{1}{49} \frac{(2x^4 - 24x^3 - 144x^2 - 944x - 1077 + 567\nu)^2}{(-112x-147+81\nu)^2}.$$

**Набор валентностей  $\langle 7, 1 \mid 5, 3 \rangle$**

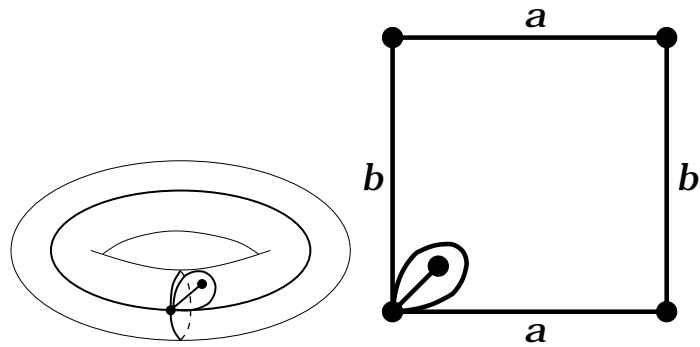


Рис. 58.  $T(71 \mid 53)A$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $T(53 \mid 71)A$ , см. рис. 82 на с. 84

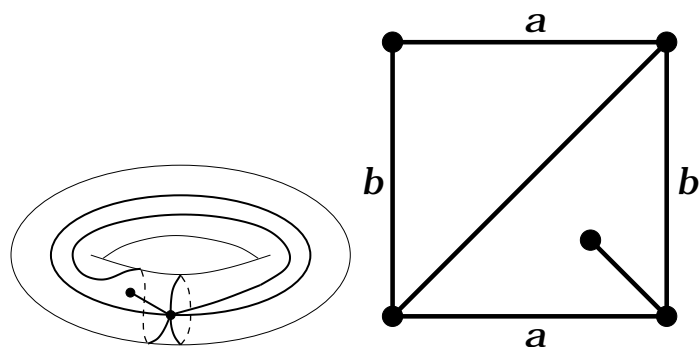


Рис. 59.  $T(71 \mid 53)B$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $T(53 \mid 71)B$ , см. рис. 83 на с. 85

Для рисунков  $T(71|53)A$  и  $T(71|53)B$  функции Белого имеют вид

$$\begin{aligned} \beta = & \frac{(78133 + 7625\nu)}{8232} (169344x^5 + 17640yx^3 - 47250\nu x^4 - 489510x^4 - \\ & - 5250\nu yx^2 - 7350yx^2 + 1269324x^3 + 94500\nu x^3 + 12250\nu yx - \\ & - 54950yx - 3537716x^2 + 94500\nu x^2 + 45885y - 7125\nu y - \\ & - 301000\nu x + 4558440x - 1978857 + 160125\nu) \end{aligned}$$

на кривых

$$\begin{aligned} X: y^2 = & \frac{1}{350} (2688x^3 - 10388x^2 + 100\nu x^2 - 500\nu x + \\ & + 15972x + 1275\nu - 17247)(12x - 13). \end{aligned}$$

Здесь  $\nu = \pm\sqrt{105}$ , тогда

$$\begin{aligned} n_0 = & \frac{1944(78133 + 7625\nu)}{343} (x + 3)(x - 1)^7, \\ n_1 = & \frac{78133 + 7625\nu}{131712} (864x^4 - 1728x^3 - 1728x^2 + 5504x - 11895 + 875\nu)^2. \end{aligned}$$

### Набор валентностей $\langle 7, 1 | 4, 4 \rangle$

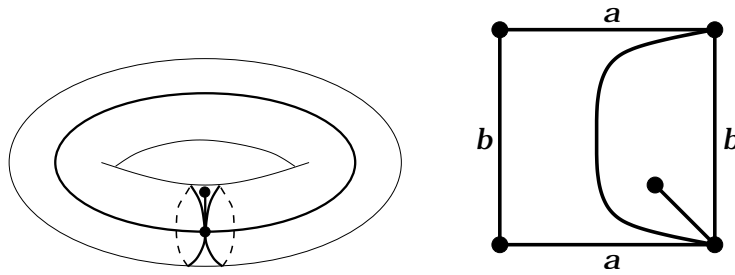


Рис. 60.  $T(71|44)$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов. Двойственный рисунок:  $T(44|71)$ , см. рис. 100 на с. 94.

$$\text{Функция Белого } \beta = \frac{128}{343} (294x^4 - 28yx^2 + 154x^3 - 7yx + 77x^2 - 2y + 13x + 2)$$

на кривой  $X: y^2 = 112x^4 + 56x^3 + 37x^2 + 6x + 1$ .

$$\text{Тогда } n_0 = -\frac{65536}{343} (x - 2)x^7, \quad n_1 = -\frac{1}{343} (256x^4 - 256x^3 - 128x^2 - 128x - 13)^2$$

**7.3. Набор валентностей  $\langle 6, 2 \mid * \rangle$** 

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr}(H^6) \text{Tr}(H^2) \rangle &= 6 \cdot 2 \left( \frac{5}{2} N^4 + 5N^2 \right) = \\ &= 6 \cdot 2 \left( \left( 2 + \frac{1}{2} \right) N^4 + \left( 4 + 2 \left( \frac{1}{2} \right) \right) N^2 \right). \end{aligned}$$

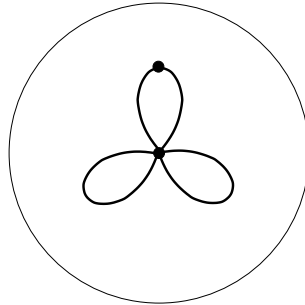
**Набор валентностей  $\langle 6, 2 \mid 4, 2, 1, 1 \rangle$** 

Рис. 61.  $S(62 \mid 4211)$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(4211 \mid 62)$ , см. рис. 118 на с. 103.

$$\text{Функция Белого: } \beta = -\frac{1}{108} \frac{z^6(z-4)^2}{(z^2+2z+3)(z-3)^2}$$

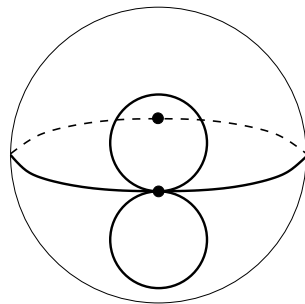
**Набор валентностей  $\langle 6, 2 \mid 3, 3, 1, 1 \rangle$** 

Рис. 62.  $S(62 \mid 3311)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $S(3311 \mid 62)$ , см. рис. 127 на с. 108.  
 Функция Белого:  $\beta = -64 \frac{z^6}{(-1+3z)(3z+1)(z-1)^3(z+1)^3}$

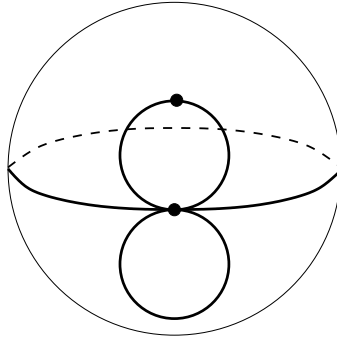
**Набор валентностей  $\langle 6, 2 \mid 3, 2, 2, 1 \rangle$** 

Рис. 63.  $S(62 \mid 3221)$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(3221 \mid 62)$ , см. рис. 130 на с. 109.

$$\text{Функция Белого: } \beta = -4 \frac{z^6(z-2)^2}{(4z+1)(-1-2z+2z^2)^2}$$

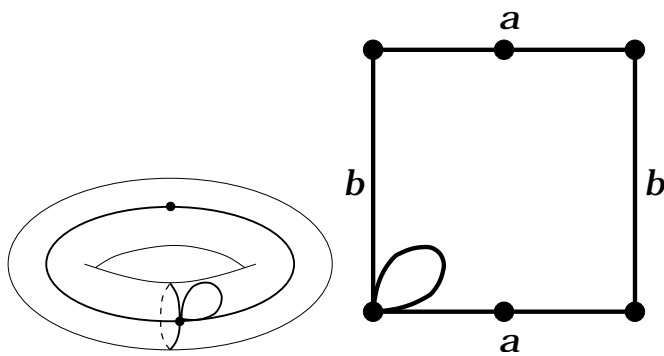
**Набор валентностей  $\langle 6, 2 \mid 7, 1 \rangle$** 

Рис. 64.  $T(62 \mid 71)_+$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $T(71 \mid 62)_+$ , см. рис. 56 на с. 70



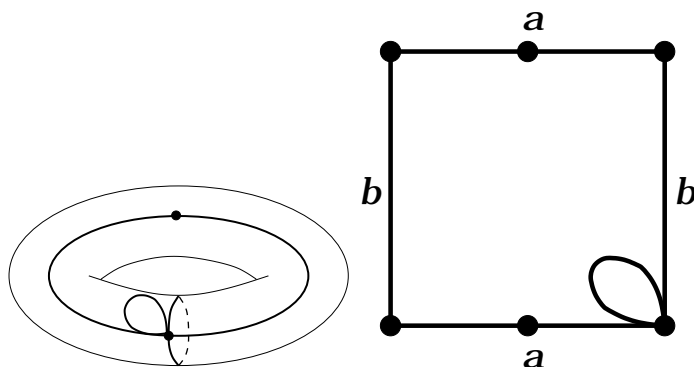


Рис. 65.  $T(62|71)_-$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $T(71|62)_-$ , см. рис. 57 на с. 70

Функции Белого рисунков  $T(62|71)_+$  и  $T(62|71)_-$  имеют вид

$$\beta = \frac{11\nu + 7}{224(x - 24)x^7} (-686x^5 + 1078\nu x^5 + 197568yx^3 + 20727\nu x^4 - \\
 - 18963x^4 + 691488yx^2 - 211680\nu yx^2 + 117180\nu x^3 - 5292x^3 + \\
 + 762048yx - 423360\nu yx + 237384\nu x^2 + 264600x^2 - 181440\nu y + \\
 + 254016y + 344736x + 184032\nu x + 46656\nu + 108864)$$

на кривых

$$X: y^2 = -\frac{35 + 9\nu}{87808} (2x + 1)(14x^2 + 18\nu x + 42x + 9\nu + 189),$$

где  $\nu = \pm i\sqrt{7}$ . Для этих рисунков

$$n_0 = \frac{49}{4} \frac{(-112x - 147 + 81\nu)^2}{(x - 24)x^7}, \\
 n_1 = \frac{1}{4} \frac{(2x^4 - 24x^3 - 144x^2 - 944x - 1077 + 567\nu)^2}{(x - 24)x^7}.$$

**Набор валентностей  $\langle 6, 2 \mid 6, 2 \rangle$**

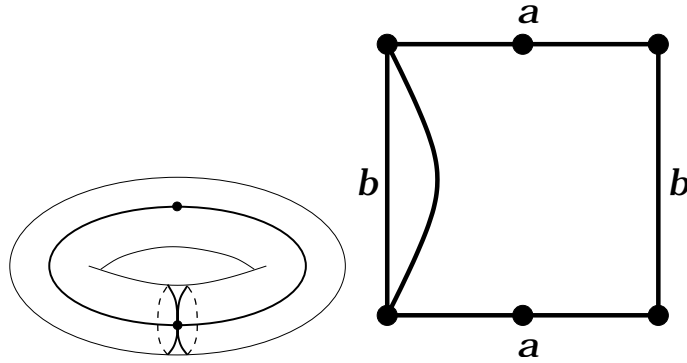


Рис. 66.  $T(62 \mid 62)_2$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ . Этот рисунок является самодвойственным.

Пара Белого:  $\left( X: y^2 = x(x+8)(x-1), \beta = \frac{1}{64} \frac{x^3(x+8)}{x-1} \right)$

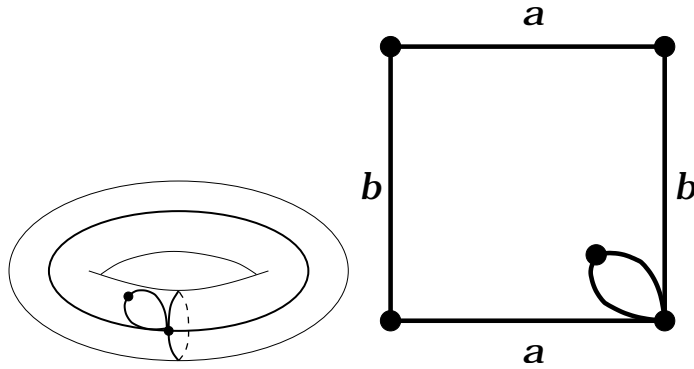


Рис. 67.  $T(62 \mid 62)_1$ . Этот рисунок не имеет нетривиальных автоморфизмов.

Рисунок является самодвойственным.

Функция Белого на кривой  $X: y^2 = 4(x-2)(x^2+2x+73)$  имеет вид

$$\beta = -\frac{1}{432} \frac{(18x^3 - 810x^2 + 9342x - 5382)y}{(4x - 89)^2} - \frac{1}{432} \frac{4x^5 - 103x^4 - 1172x^3 + 28030x^2 + 126536x - 295247}{(4x - 89)^2}. \text{ Тогда}$$

$$n_0 = \frac{1}{186624} \frac{(x-29)^2(x-5)^6}{(4x-89)^2}, \quad n_1 = \frac{1}{186624} \frac{(x^4 - 44x^3 + 510x^2 - 572x + 35161)^2}{(4x-89)^2}$$

**Набор валентностей  $\langle 6, 2 \mid 5, 3 \rangle$**

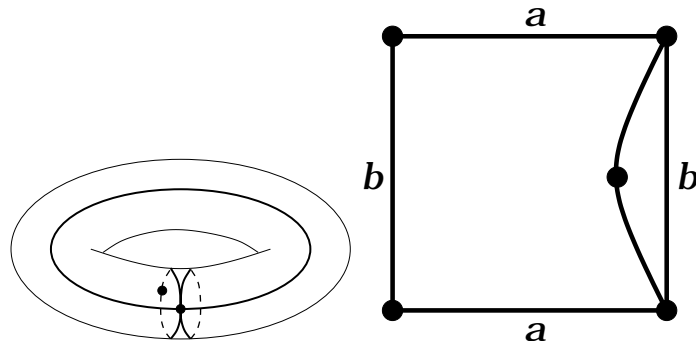


Рис. 68.  $T(62 \mid 53)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $T(53 \mid 62)$ , см. рис. 84 на с. 86. Функция Белого имеет вид

$$\beta = \frac{1}{162} \left( x^5 + yx^3 + \frac{65}{8}x^4 + 6yx^2 + x^3 - 64x^2 - 16y - 16x + 80 \right)$$

на кривой  $X: y^2 = \frac{1}{4}(x-1)(4x+5)(x^2+4x-20)$ .

В этом случае  $n_0 = \frac{1}{20736}(x+8)^2x^6$ ,  $n_1 = \frac{1}{20736}(x^4+8x^3-128x-16)^2$

**Набор валентностей  $\langle 6, 2 \mid 4, 4 \rangle$**

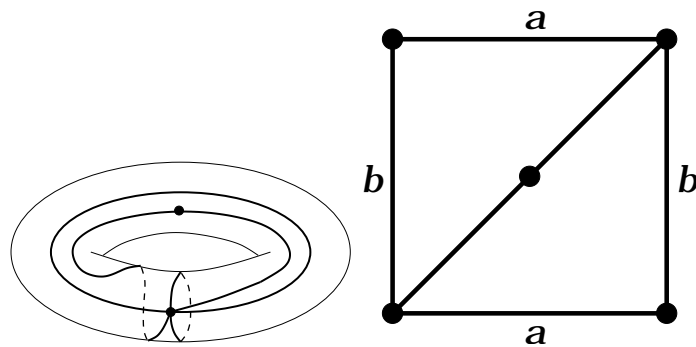


Рис. 69.  $T(62 \mid 44)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $T(44 \mid 62)$ , см. рис. 101 на с. 95.

Пара Белого:  $\left( X: y^2 = (x-2)(4x^2+4x+3)x, \beta = -\frac{16}{27}x^3(x-2) \right)$

#### 7.4. Набор валентностей $\langle 6, 1, 1 \mid * \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr}(H^6) \text{Tr}^2(H) \rangle &= 6 \cdot 2! \left( 5N^3 + \frac{5}{2}N \right) = \\ &= 6 \cdot 2! \left( \left( 4 + 2 \left( \frac{1}{2} \right) \right) N^3 + \left( 2 + \frac{1}{2} \right) N \right). \end{aligned}$$

#### Набор валентностей $\langle 6, 1, 1 \mid 6, 1, 1 \rangle$

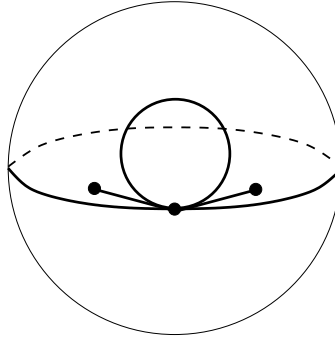


Рис. 70.  $S(611 \mid 611)_2$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ . Этот рисунок является самодвойственным. Функция Белого:  $\beta = -4 \frac{(z^2 - 2)z^6}{4z^2 + 1}$

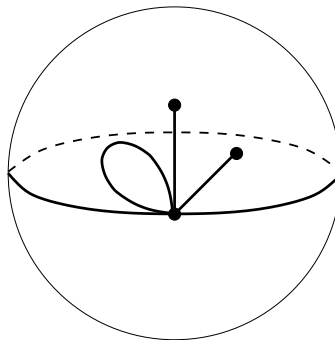


Рис. 71.  $S(611 \mid 611)_1$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов. Рисунок является самодвойственным. Функция Белого:  $\beta = -\frac{27}{4} \frac{(3z^2 + 6z + 7)z^6}{21z^2 - 12z + 4}$

**Набор валентностей  $\langle 6, 1, 1 \mid 5, 2, 1 \rangle$**

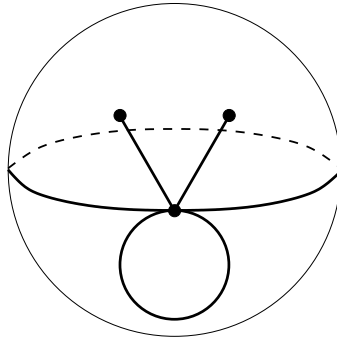


Рис. 72.  $S(611 \mid 521)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(521 \mid 611)$ , см. рис. 86 на с. 87.

$$\text{Функция Белого: } \beta = 4 \frac{z^6(9z^2 + 24z + 70)}{(4z - 1)(14z - 5)^2}$$

**Набор валентностей  $\langle 6, 1, 1 \mid 4, 3, 1 \rangle$**

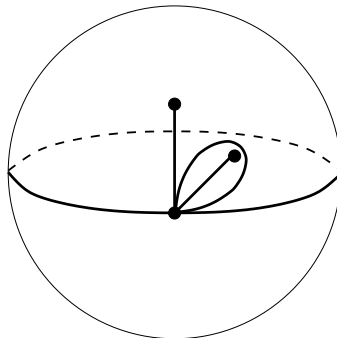
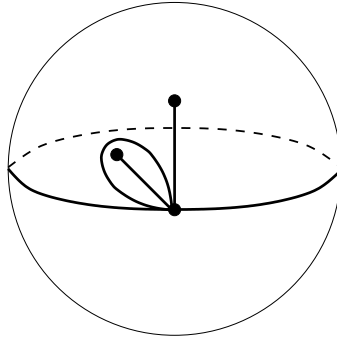
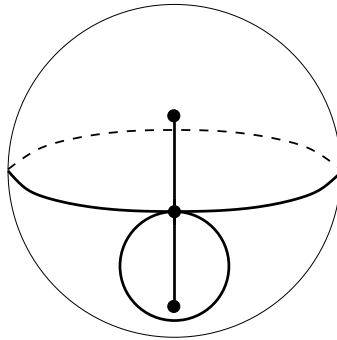


Рис. 73.  $(S(611 \mid 431))_+$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $(S(431 \mid 611))_+$ , см. рис. 104 на с. 96.

$$\text{Функция Белого: } \beta = 12 \frac{(-6z^2 + 20i\sqrt{3}z - 12z - 19i\sqrt{3} + 17)z^6}{(-747 + 1763i\sqrt{3})(3z + 2i\sqrt{3} + 3)(z - 1)^3}$$

Рис. 74.  $(S(611 | 431))_-$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.Двойственный рисунок:  $(S(431 | 611))_-$ , см. рис. 105 на с. 97.

$$\text{Функция Белого: } \beta = -12 \frac{(6z^2 + 20i\sqrt{3}z + 12z - 19i\sqrt{3} - 17)z^6}{(1763i\sqrt{3} + 747)(-3z - 3 + 2i\sqrt{3})(z - 1)^3}$$

**Набор валентностей  $\langle 6, 1, 1 | 3, 3, 2 \rangle$** Рис. 75.  $S(611 | 332)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .Двойственный рисунок:  $S(332 | 611)$ , см. рис. 122 на с. 105.

$$\text{Функция Белого: } \beta = -4 \frac{z^6(9z^2 + 2)}{(4z^2 + 1)^3}$$

**Набор валентностей  $\langle 6, 1, 1 \mid 8 \rangle$**

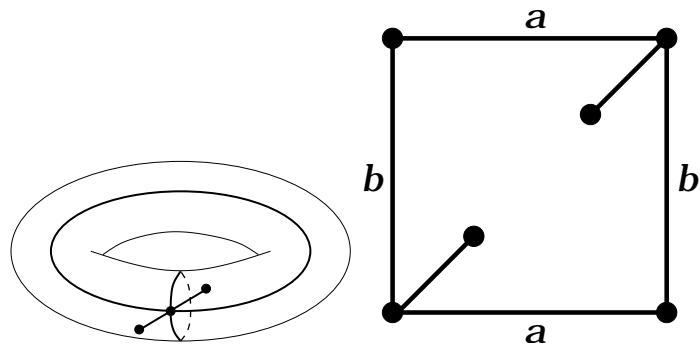


Рис. 76.  $T(611 \mid 8)_2$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $T(8 \mid 611)_2$ , см. рис. 31 на с. 56.  
 Пара Белого:  $\left( X : y^2 = x \left( x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{16} \right), \beta = -\frac{256}{27}x^3(x-1) \right)$

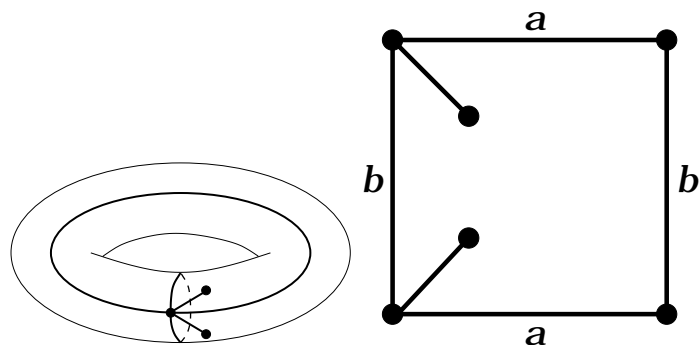


Рис. 77.  $T(611 \mid 8)_{1A}$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $T(8 \mid 611)_{1A}$ , см. рис. 32 на с. 57

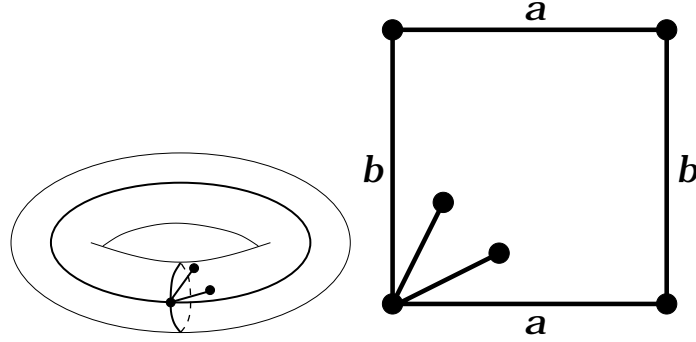


Рис. 78.  $T(611|8)_1B$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
Двойственный рисунок:  $T(8|611)_1B$ , см. рис. 33 на с. 57

Функция Белого рисунка  $T(611|8)_1A$  имеет вид

$$\beta = -\frac{1}{22769316864}(-835 - 872\sqrt{2})(x^4 - 16yx^2 + 24\sqrt{2}yx^2 - 648x^3 + \\ + 272\sqrt{2}x^3 - 4032\sqrt{2}yx + 4224yx - 19296\sqrt{2}x^2 + 34200x^2 + \\ + 30240\sqrt{2}y - 50112y - 818208x + 706752\sqrt{2}x - 1088640\sqrt{2} + 1708560)$$

на кривой

$$X: y^2 = -x^3 + 20x^2 - 8\sqrt{2}x^2 + 1104\sqrt{2}x - 132x.$$

Функция Белого рисунка  $T(611|8)_1B$  имеет вид

$$\beta = -\frac{1}{22769316864}(-835 + 872\sqrt{2})(x^4 - 16yx^2 - 24\sqrt{2}yx^2 - 648x^3 - \\ - 272\sqrt{2}x^3 + 4032\sqrt{2}yx + 4224yx + 19296\sqrt{2}x^2 + 34200x^2 - \\ - 30240\sqrt{2}y - 50112y - 818208x - 706752\sqrt{2}x + 1088640\sqrt{2} + 1708560)$$

на кривой

$$X: y^2 = -x^3 + 20x^2 + 8\sqrt{2}x^2 - 1104\sqrt{2}x - 132x.$$

Тогда

$$n_0 = -\frac{-2217993 - 1456240\nu}{518441790453234794496}(x^2 + 76x - 152\nu x + 44100 - 19600\nu) \times \\ \times (x + 6 - 12\nu)^6,$$

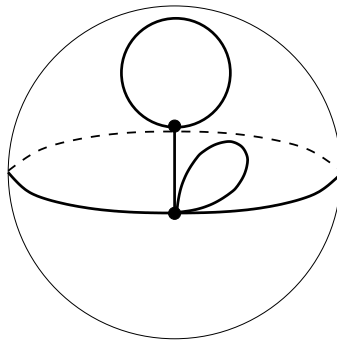
$$n_1 = -\frac{-2217993 - 1456240\nu}{518441790453234794496}(x^4 + 56x^3 - 112\nu x^3 + \\ + 22680x^2 - 10080\nu x^2 - 756000x + 665280\nu x + 24794640 - 25197696\nu)^2.$$

Здесь  $\nu^2 = 2$ , причём  $\nu > 0$  соответствует случаю  $A$  и  $\nu < 0$  соответствует случаю  $B$ .

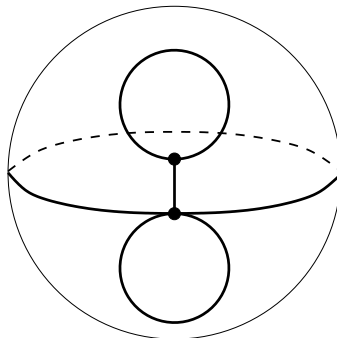


**7.5. Набор валентностей  $\langle 5, 3 \mid * \rangle$** 

$$\langle \text{Tr}(H^5) \text{Tr}(H^3) \rangle = 5 \cdot 3(3N^4 + 4N^2).$$

**Набор валентностей  $\langle 5, 3 \mid 5, 1, 1, 1 \rangle$** Рис. 79.  $S(53 \mid 5111)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.Двойственный рисунок:  $S(5111 \mid 53)$ , см. рис. 96 на с. 92.

$$\text{Функция Белого: } \beta = \frac{1}{4} \frac{(z-4)^3 z^5}{6z^3 - 22z^2 - 12z - 9}$$

**Набор валентностей  $\langle 5, 3 \mid 4, 2, 1, 1 \rangle$** Рис. 80.  $S(53 \mid 4211)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.Двойственный рисунок:  $S(4211 \mid 53)$ , см. рис. 119 на с. 104.

$$\text{Функция Белого: } \beta = \frac{1}{4} \frac{(-1+8z)^3}{(3+z)^2 z^4 (9z^2 + 42z - 5)}$$

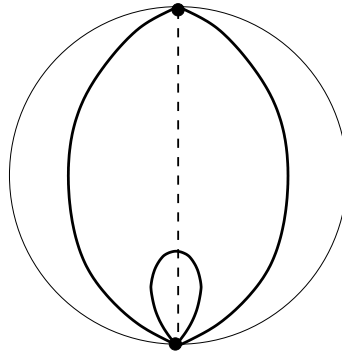
**Набор валентностей  $\langle 5, 3 \mid 3, 2, 2, 1 \rangle$** 

Рис. 81.  $S(53 \mid 3221)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(3221 \mid 53)$ , см. рис. 131 на с. 110.

$$\text{Функция Белого: } \beta = 4 \frac{(3z + 4)^3 z^5}{(1 + 7z)(3z + 1)^3 (z^2 + 1)^2}$$

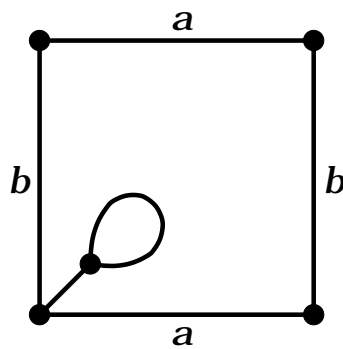
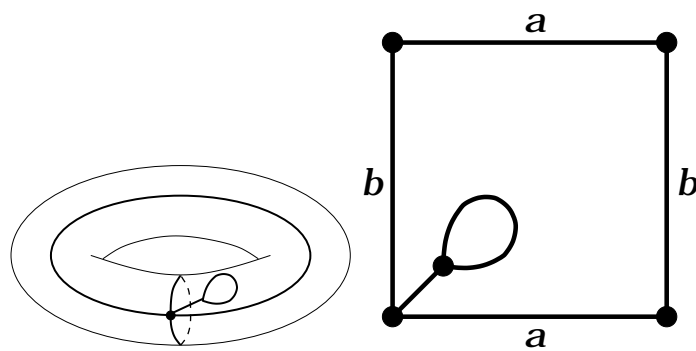
**Набор валентностей  $\langle 5, 3 \mid 7, 1 \rangle$** 

Рис. 82.  $T(53 \mid 71)A$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $T(71 \mid 53)A$ , см. рис. 58 на с. 71

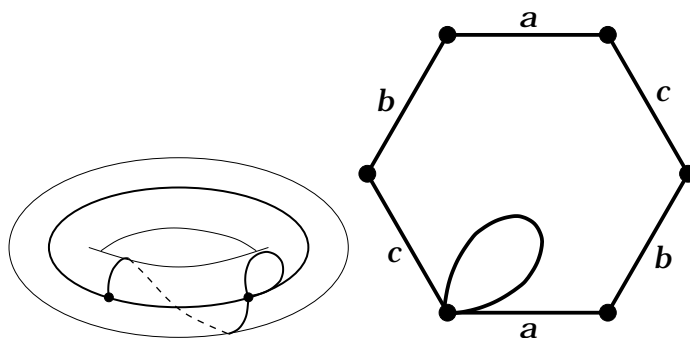


Рис. 83.  $T(53 | 71)B$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
Двойственный рисунок:  $T(71 | 53)B$ , см. рис. 59 на с. 71

Функции Белого рисунков  $T(53 | 71)A$  и  $T(53 | 71)B$  имеют вид

$$\beta = \frac{135\nu + 1379}{2730105000(64x - 105 + 45\nu)} (297675\nu y x^3 - 4456305 y x^3 + 49546350 x^4 - \\ - 201285\nu y x^2 + 25806879 y x^2 - 151587135 x^3 - 14586075\nu x^3 - 8511615\nu y x + \\ + 173009165 y x + 24310125\nu x^2 - 1233745275 x^2 - 54618075\nu y + 59676225 y - \\ - 4281377625 x + 1348801875\nu x + 972759375\nu - 25761054375)$$

на кривых

$$X: y^2 = \frac{225(675\nu + 5033)}{45019072} \times \\ \times (-420x^3 + 119x^2 + 405\nu x^2 - 21210x + 630\nu x - 176400 + 18900\nu),$$

где  $\nu^2 = 105$ . Тогда

$$n_0 = \frac{343(17983 + 1755\nu)}{15552000} \frac{(x + 5)^3(x - 3)^5}{64x - 105 + 45\nu}, \\ n_1 = \frac{7(17983 + 1755\nu)}{62208000} \frac{(14x^4 - 420x^2 + 560x - 60825 + 6075\nu)^2}{64x - 105 + 45\nu}.$$

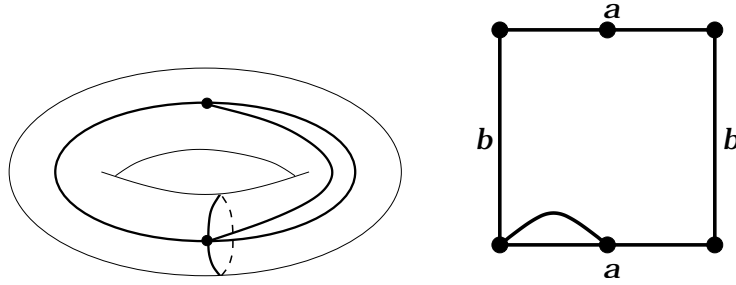
**Набор валентностей  $\langle 5, 3 \mid 6, 2 \rangle$** 

Рис. 84.  $T(53 \mid 62)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов. Двойственный рисунок:  $T(62 \mid 53)$ , см. рис. 68 на с. 77. Функция Белого  $\beta$  на кривой

$$X: y^2 = \frac{1}{4}(x-1)(4x+5)(x^2+4x-20) \text{ имеет вид}$$

$$\beta = 1296(8yx^3 + 48yx^2 - 128y + 8x^5 + 65x^4 + 8x^3 - 512x^2 - 128x + 640)^{-1}.$$

Здесь  $n_0 = 20736 \frac{1}{(x+8)^2 x^6}$ ,  $n_1 = \frac{(x^4 + 8x^3 - 128x - 16)^2}{(x+8)^2 x^6}$

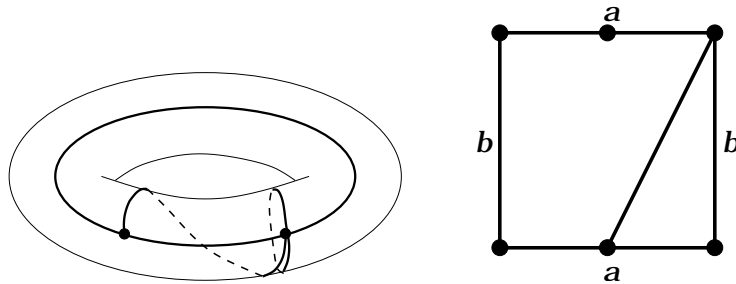
**Набор валентностей  $\langle 5, 3 \mid 5, 3 \rangle$** 

Рис. 85.  $T(53 \mid 53)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.

Рисунок является самодвойственным.

$$\text{Функция Белого: } \beta = -\frac{26}{25}x^2 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{24}{25}x - \frac{8}{25}y + \frac{59}{50}x^3 + \frac{25}{16}x^4 + \frac{8}{25}yx + yx^2 + \frac{1}{2}yx^3 + \frac{8}{25}$$

$$\text{на кривой } X: y^2 = \frac{1}{4}(x-1)(13x^2 + 12x + 4x^3 - 4).$$

$$\text{Здесь } n_0 = \frac{1}{6400}(9x+16)^3 x^5, n_1 = \frac{1}{6400}(27x^4 + 72x^3 + 32x^2 - 128x - 48)^2$$

**7.6. Набор валентностей  $\langle 5, 2, 1 \mid * \rangle$** 

$$\langle \text{Tr}(H^5) \text{Tr}(H^2) \text{Tr}(H) \rangle = 5 \cdot 2(6N^3 + 3N).$$

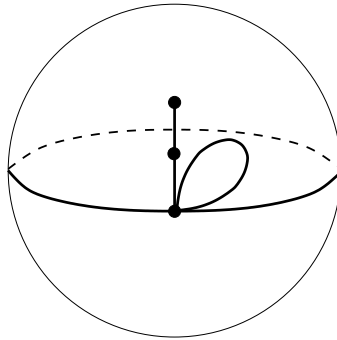
**Набор валентностей  $\langle 5, 2, 1 \mid 6, 1, 1 \rangle$** 

Рис. 86.  $S(521 \mid 611)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(611 \mid 521)$ , см. рис. 72 на с. 79.

$$\text{Функция Белого: } \beta = -\frac{1}{4} \frac{(5z - 14)^2 (z - 4) z^5}{70z^2 + 24z + 9}$$

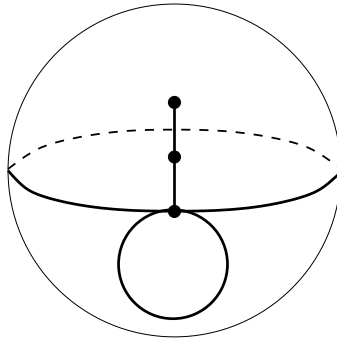
**Набор валентностей  $\langle 5, 2, 1 \mid 5, 2, 1 \rangle$** 

Рис. 87.  $S(521 \mid 521)_A$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Рисунок является самодвойственным. Функция Белого имеет вид

$$\beta = 16 \frac{(391 + 550\nu + 455\nu^2)(z + 2\nu)(z + 1)^2 z^5}{(16z - \nu + 7\nu^2 - 4)(-8z + 3\nu + 3\nu^2 - 4)^2},$$

где  $7\nu^3 + 2\nu^2 - \nu - 4 = 0$ ,  $\nu > 0$

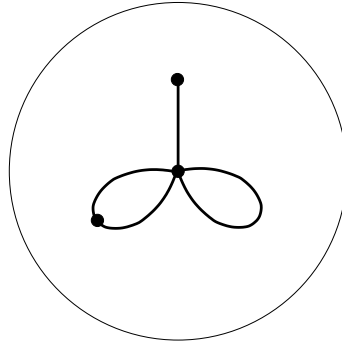


Рис. 88.  $S(521 | 521)B_+$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
Рисунок является самодвойственным.

$$\text{Функция Белого: } \beta = 16 \frac{(391 + 550\nu + 455\nu^2)(z + 2\nu)(z + 1)^2 z^5}{(16z - \nu + 7\nu^2 - 4)(-8z + 3\nu + 3\nu^2 - 4)^2},$$

где  $7\nu^3 + 2\nu^2 - \nu - 4 = 0$ ,  $\text{Im } \nu < 0$

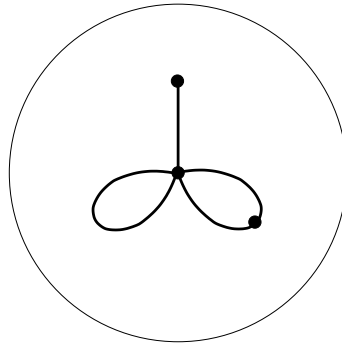


Рис. 89.  $S(521 | 521)B_-$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
Рисунок является самодвойственным.

$$\text{Функция Белого: } \beta = 16 \frac{(391 + 550\nu + 455\nu^2)(z + 2\nu)(z + 1)^2 z^5}{(16z - \nu + 7\nu^2 - 4)(-8z + 3\nu + 3\nu^2 - 4)^2},$$

где  $7\nu^3 + 2\nu^2 - \nu - 4 = 0$ ,  $\text{Im } \nu > 0$

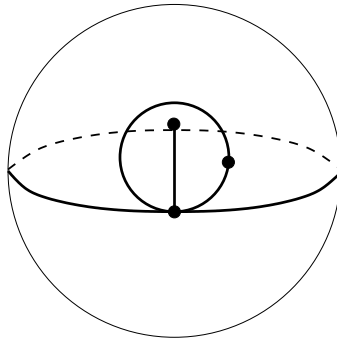
**Набор валентностей  $\langle 5, 2, 1 \mid 4, 3, 1 \rangle$** 

Рис. 90.  $S(521 \mid 431)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(431 \mid 521)$ , см. рис. 106 на с. 97.

$$\text{Функция Белого: } \beta = -16 \frac{z^5(z+3)(6z-7)^2}{(15z-4)(7z-4)^3}$$

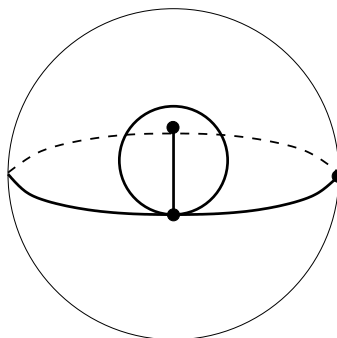
**Набор валентностей  $\langle 5, 2, 1 \mid 3, 3, 2 \rangle$** 

Рис. 91.  $S(521 \mid 332)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(332 \mid 521)$ , см. рис. 123 на с. 106.

$$\text{Функция Белого: } \beta = \frac{27}{4} \frac{z^5(7z+2)^2(11z-4)}{(6z^2-1)^3(4z+1)^2}$$

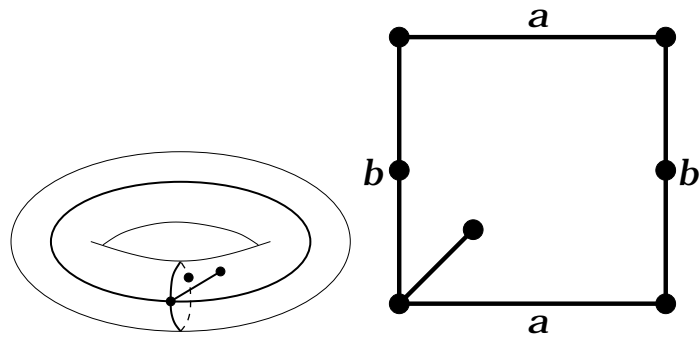
Набор валентностей  $\langle 5, 2, 1 \mid 8 \rangle$ 

Рис. 92.  $T(521 \mid 8)A_+$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $T(8 \mid 521)A_+$ , см. рис. 34 на с. 58

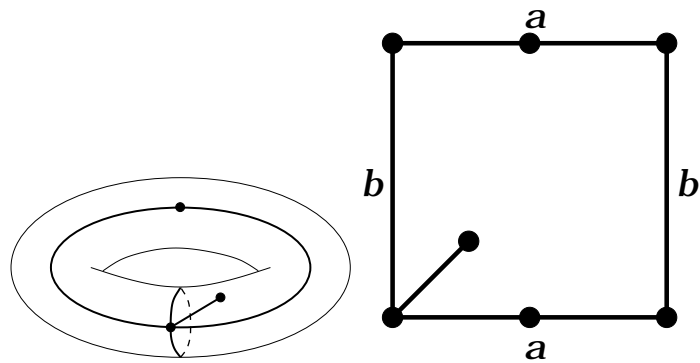


Рис. 93.  $T(521 \mid 8)A_-$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $T(8 \mid 521)A_-$ , см. рис. 35 на с. 58



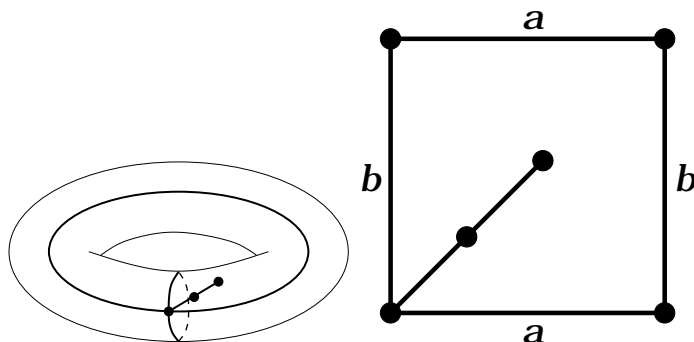


Рис. 94.  $T(521|8)B$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
Двойственный рисунок:  $T(8|521)B$ , см. рис. 36 на с. 59

Функции Белого рисунков  $T(521|8)A_+$ ,  $T(521|8)A_-$  и  $T(521|8)B$  имеют вид

$$\beta = \frac{1}{735306250}(552\nu^2 - 617\nu + 68)(42875x^4 + 1756160\nu yx^2 - 860160\nu^2 yx^2 - \\ - 4543840yx^2 + 3959200\nu x^3 - 10346175x^3 - 1926400\nu^2 x^3 + 31782912\nu^2 yx - \\ - 63438592\nu yx + 168996968yx + 18916352\nu^2 x^2 - 37781632\nu x^2 + \\ + 100206428x^2 - 257512128y - 48381952\nu^2 y + 96684032\nu y - 62101504\nu^2 x - \\ - 330259656x + 123960064\nu x + 48381952\nu^2 - 96684032\nu + 257512128)$$

на кривых

$$X: y^2 = -\frac{(17\nu^2 + 8 - 42\nu)}{960400} \times \\ \times (19600x^2 + 55552\nu x - 18432\nu^2 x - 88408x + 338963 - 130592\nu + 65792\nu^2)(x - 1).$$

Здесь  $256\nu^3 - 544\nu^2 + 1427\nu - 172 = 0$ , причём вещественный корень соответствует случаю  $B$ . Тогда

$$n_0 = -\frac{-1974439\nu + 8411384\nu^2 + 115196}{3460321800250000000}(1225x + 90376 - 34944\nu + 16384\nu^2) \times \\ \times (1225x + 56519 - 19936\nu + 10496\nu^2)^2 x^5,$$

$$n_1 = -\frac{-1974439\nu + 8411384\nu^2 + 115196}{1851229791846400000000}(313600x^4 + 26036992x^3 - \\ - 9576448\nu x^3 + 4784128\nu^2 x^3 + 307426304x^2 - 114917376\nu x^2 + \\ + 57409536\nu^2 x^2 - 1834522624x + 689504256\nu x - 344457216\nu^2 x + \\ + 6757769763 - 2539197472\nu + 1270132992\nu^2)^2.$$

### 7.7. Набор валентностей $\langle 5, 1, 1, 1 \mid * \rangle$

$$\langle \text{Tr}(H^5) \text{Tr}^3(H) \rangle = 5 \cdot 3!(2N^2).$$

#### Набор валентностей $\langle 5, 1, 1, 1 \mid 7, 1 \rangle$

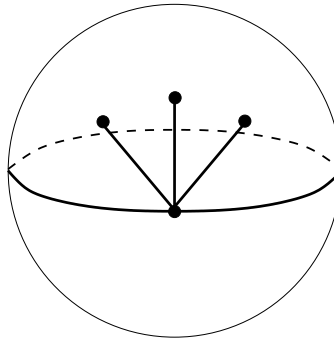


Рис. 95.  $S(5111 \mid 71)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.

Двойственный рисунок:  $S(71 \mid 5111)$ , см. рис. 46 на с. 64.

$$\text{Функция Белого: } \beta = \frac{1}{16384} \frac{z^5(1225z^3 - 3216z^2 + 2912z - 896)}{(z-1)^7}$$

#### Набор валентностей $\langle 5, 1, 1, 1 \mid 5, 3 \rangle$

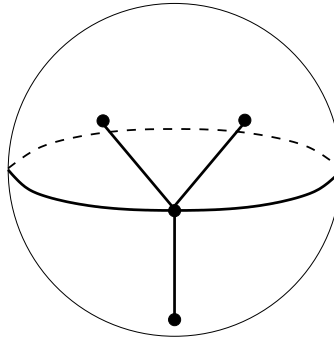


Рис. 96.  $S(5111 \mid 53)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.

Двойственный рисунок:  $S(53 \mid 5111)$ , см. рис. 79 на с. 83.

$$\text{Функция Белого: } \beta = 4 \frac{z^5(9z^3 + 12z^2 + 22z - 6)}{(4z-1)^3}$$

**7.8. Набор валентностей  $\langle 4, 4 \mid * \rangle$** 

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr}^2(H^4) \rangle &= 4^2 \cdot 2! \left( \frac{9}{8} N^4 + \frac{15}{8} N^2 \right) = \\ &= 4^2 \cdot 2! \left( \left( 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) N^4 + \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) N^2 \right). \end{aligned}$$

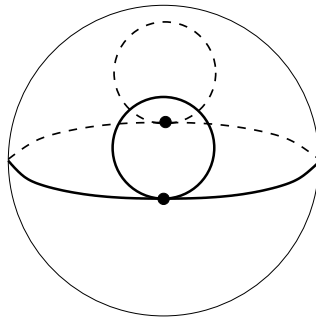
**Набор валентностей  $\langle 4, 4 \mid 4, 2, 1, 1 \rangle$** 

Рис. 97.  $S(44 \mid 4211)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $S(4211 \mid 44)$ , см. рис. 120 на с. 104. Функция Белого:  $\beta = \frac{1}{4} \frac{(z^2 + 1)^4}{z^4(2z^2 + 1)}$

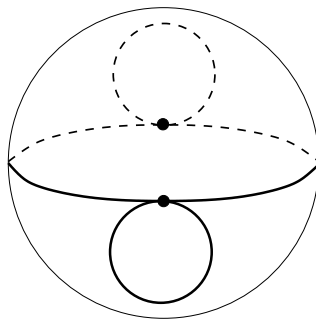
**Набор валентностей  $\langle 4, 4 \mid 3, 3, 1, 1 \rangle$** 

Рис. 98.  $S(44 \mid 3311)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $S(3311 \mid 44)$ , см. рис. 128 на с. 108.  
 Функция Белого:  $\beta = -432 \frac{z^4}{(2z^2 + 10z - 1)(2z^2 + 2z - 1)^3}$

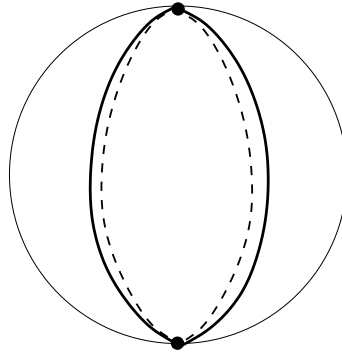
**Набор валентностей  $\langle 4, 4 \mid 2, 2, 2, 2 \rangle$** 

Рис. 99.  $S(44 \mid 2222)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $S(2222 \mid 44)$ , см. рис. 133 на с. 111. Функция Белого:  $\beta = 4 \frac{z^4}{(z^4 + 1)^2}$

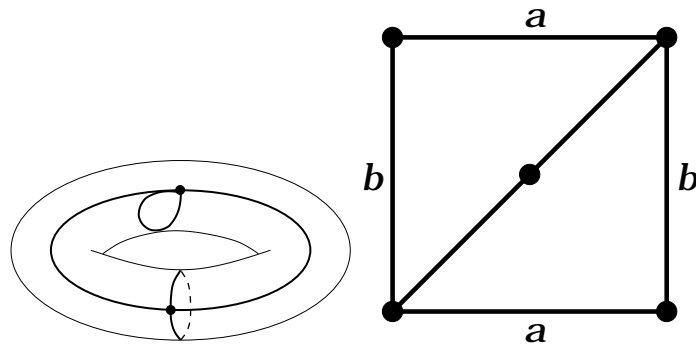
**Набор валентностей  $\langle 4, 4 \mid 7, 1 \rangle$** 

Рис. 100.  $T(44 \mid 71)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $T(71 \mid 44)$ , см. рис. 60 на с. 72. Функция Белого:  

$$\beta = -\frac{1}{512x}(-343yx^3 + 2401x^4 - 931yx^2 + 9604x^3 - 581yx + 11662x^2 - y + 3860x - 7)$$
 на кривой  $X: y^2 = (4x + 7)(7x^2 + 18x + 7)$ . В этом случае  $n_0 = -\frac{343}{65536} \frac{(7x^2 + 14x + 3)^4}{x}$ ,  

$$n_1 = -\frac{7}{65536} \frac{(343x^4 + 1372x^3 + 1666x^2 + 588x - 65)^2}{x}$$

**Набор валентностей  $\langle 4, 4 \mid 6, 2 \rangle$**

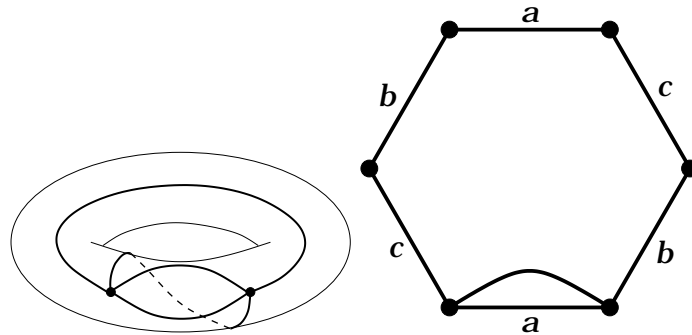


Рис. 101.  $T(44 \mid 62)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .

Двойственный рисунок:  $T(62 \mid 44)$ , см. рис. 69 на с. 77.

Пара Белого:  $\left( X : y^2 = (x-1)(3x^2 + 8x + 16), \beta = \frac{27}{256} \frac{x^4}{x-1} \right)$

**Набор валентностей  $\langle 4, 4 \mid 4, 4 \rangle$**

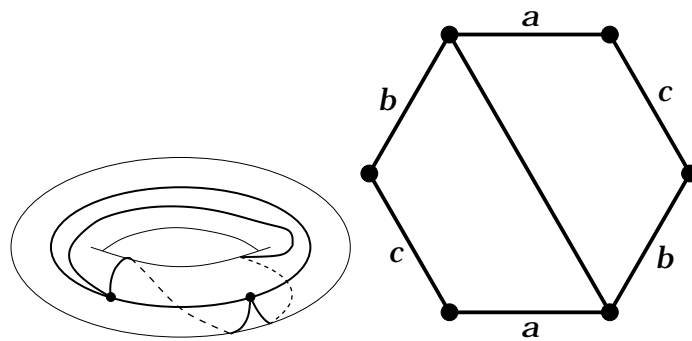


Рис. 102.  $T(44 \mid 44)_8$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ .

Этот рисунок является самодвойственным.

Пара Белого:  $(X : y^2 = x^4 - 1, \beta = x^4)$

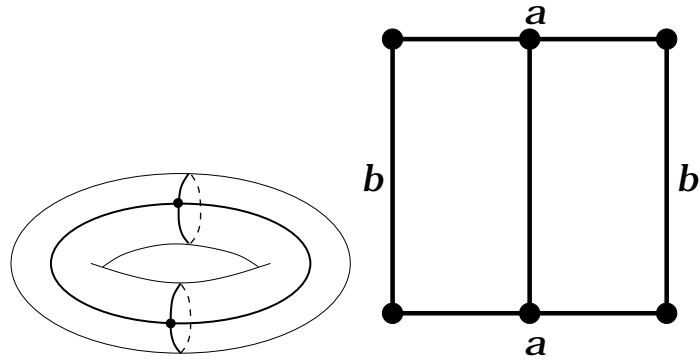


Рис. 103.  $T(44 | 44)_4$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ .  
 Этот рисунок является самодвойственным.  
 Пара Белого:  $(X: y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - 2), \beta = (x^2 - 1)^2)$

**7.9. Набор валентностей  $\langle 4, 3, 1 | * \rangle$**

$$\langle \text{Tr}(H^4) \text{Tr}(H^3) \text{Tr}(H) \rangle = 4 \cdot 3(6N^3 + 2N).$$

**Набор валентностей  $\langle 4, 3, 1 | 6, 1, 1 \rangle$**

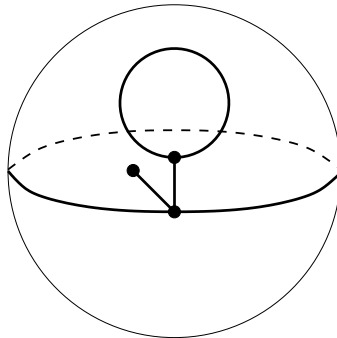


Рис. 104.  $S(431 | 611)_+$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(611 | 431)_+$ , см. рис. 73 на с. 79.

Функция Белого: 
$$\beta = -\frac{49}{4} \frac{(87i\sqrt{3} + 211)(z - 1)^3(-7z - 3 + 2i\sqrt{3})z^4}{686z^2 - 672z + 56i\sqrt{3}z - 57i\sqrt{3} - 51}$$

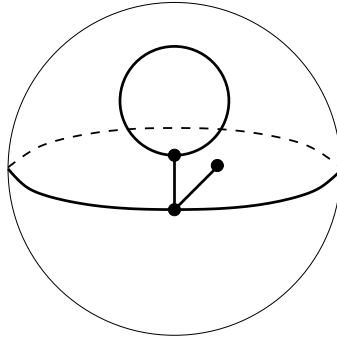


Рис. 105.  $S(431 | 611)_-$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(611 | 431)_-$ , см. рис. 74 на с. 80.

$$\text{Функция Белого: } \beta = \frac{49 (87i\sqrt{3} - 211)(z - 1)^3(7z + 3 + 2i\sqrt{3})z^4}{4 - 686z^2 + 56i\sqrt{3}z + 672z + 51 - 57i\sqrt{3}}$$

**Набор валентностей  $\langle 4, 3, 1 | 5, 2, 1 \rangle$**

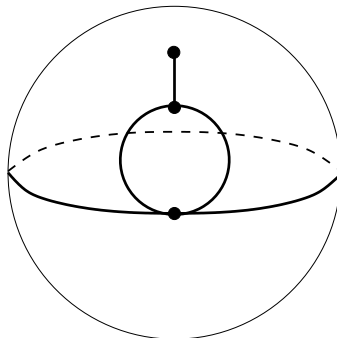


Рис. 106.  $S(431 | 521)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(521 | 431)$ , см. рис. 90 на с. 89.

$$\text{Функция Белого: } \beta = -\frac{1}{16} \frac{(4z - 7)^3(4z - 15)z^4}{(3z + 1)(7z - 6)^2}$$

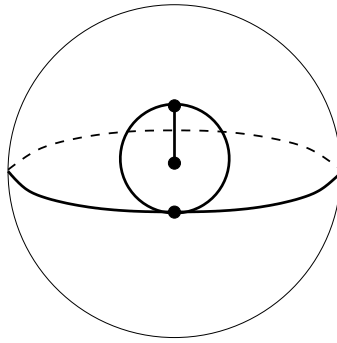
**Набор валентностей  $\langle 4, 3, 1 \mid 4, 3, 1 \rangle$** 

Рис. 107.  $S(431 \mid 431)A$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
Рисунок является самодвойственным.

$$\text{Функция Белого: } \beta = \frac{1}{3294172} \frac{(835 + 872\sqrt{2})(-z + 8 + 5\sqrt{2})(-z - 8 + 9\sqrt{2})^3 z^4}{(-z - 11 + 8\sqrt{2})(z - 1)^3}$$

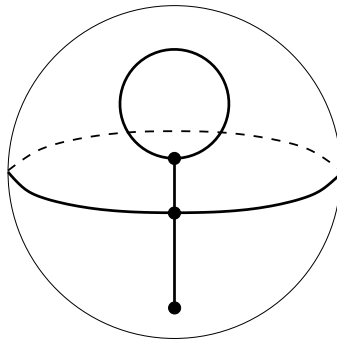


Рис. 108.  $S(431 \mid 431)B$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
Рисунок является самодвойственным.

$$\text{Функция Белого: } \beta = \frac{1}{3294172} \frac{(-835 + 872\sqrt{2})(z - 8 + 5\sqrt{2})(z + 8 + 9\sqrt{2})^3 z^4}{(z + 11 + 8\sqrt{2})(z - 1)^3}$$



**Набор валентностей  $\langle 4, 3, 1 \mid 4, 2, 2 \rangle$**

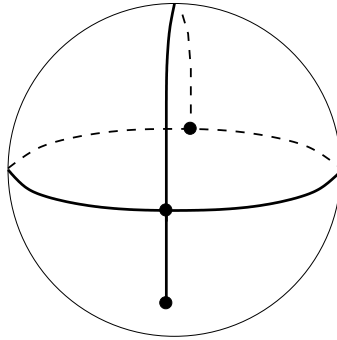


Рис. 109.  $S(431 \mid 422)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(422 \mid 431)$ , см. рис. 112 на с. 100.

Функция Белого:  $\beta = -4 \frac{(z+1)^4 z^3 (z+4)}{(6z^2 + 4z + 1)^2}$

**Набор валентностей  $\langle 4, 3, 1 \mid 8 \rangle$**

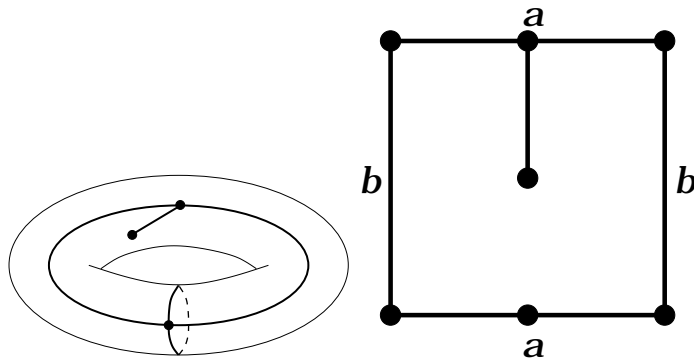


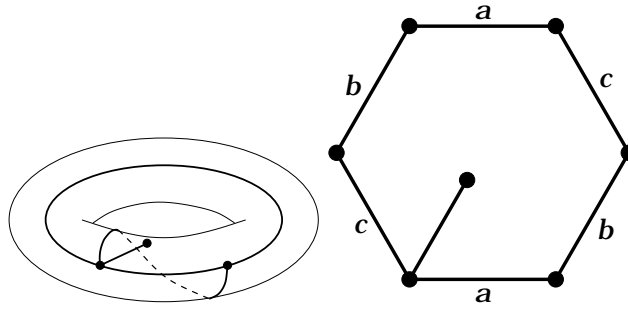
Рис. 110.  $T(431 \mid 8)A$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $T(8 \mid 431)A$ , см. рис. 37 на с. 60. Функция Белого:

$$\beta = -\frac{256}{85766121} (5488x^4 + 14112yx^2 - 26264x^3 + 37548yx - 202741x^2 + 3240y - 73368x - 3240)$$

на кривой  $X: y^2 = \frac{1}{81}(1-x)(448x^2 + 1872x + 81)$ . В этом случае

$$n_0 = \frac{65536}{62523502209} (4x + 45)(4x + 21)^3 x^4,$$

$$n_1 = \frac{(4096x^4 + 55296x^3 + 158976x^2 + 55296x - 247617)^2}{62523502209}$$

Рис. 111.  $T(431 | 8)B$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.Двойственный рисунок:  $T(8 | 431)B$ , см. рис. 38 на с. 60.

$$\text{Функция Белого: } \beta = -\frac{9}{4}x^4 + 3yx^2 - 8x^3 + \frac{8}{3}yx - \frac{77}{9}x^2 + \frac{2}{3}y - \frac{40}{9}x - \frac{8}{9}$$

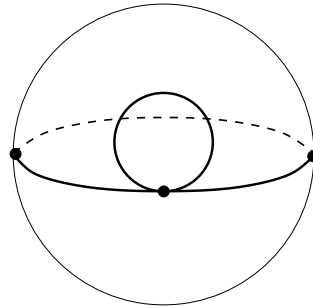
$$\text{на кривой } X: y^2 = \frac{4}{9}(x+1)(9x^2 + 4x + 4).$$

$$\text{В этом случае } n_0 = \frac{3}{16}(x-2)(3x+2)^3x^4, \quad n_1 = \frac{1}{144}(27x^4 - 36x^2 - 32x - 20)^2$$

### 7.10. Набор валентностей $\langle 4, 2, 2 | * \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr}(H^4) \text{Tr}^2(H^2) \rangle &= 4 \cdot 2^2 \cdot 2! \left( \frac{3}{2}N^3 + \frac{3}{4}N \right) = \\ &= 4 \cdot 2^2 \cdot 2! \left( \left(1 + \frac{1}{2}\right)N^3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)N \right). \end{aligned}$$

### Набор валентностей $\langle 4, 2, 2 | 4, 3, 1 \rangle$

Рис. 112.  $S(422 | 431)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.Двойственный рисунок:  $S(431 | 422)$ , см. рис. 109 на с. 99.

$$\text{Функция Белого: } \beta = -\frac{1}{4} \frac{(z^2 + 4z + 6)^2 z^4}{(z+1)^4(4z+1)}$$

**Набор валентностей  $\langle 4, 2, 2 \mid 4, 2, 2 \rangle$**

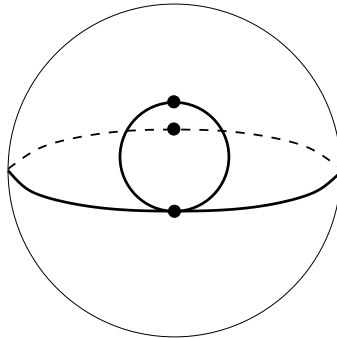


Рис. 113.  $S(422 \mid 422)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .

Рисунок является самодвойственным.

Функция Белого: 
$$\beta = -\frac{1}{4} \frac{(z^2 - 2)^2 z^4}{(z - 1)^2 (z + 1)^2}$$

**Набор валентностей  $\langle 4, 2, 2 \mid 8 \rangle$**

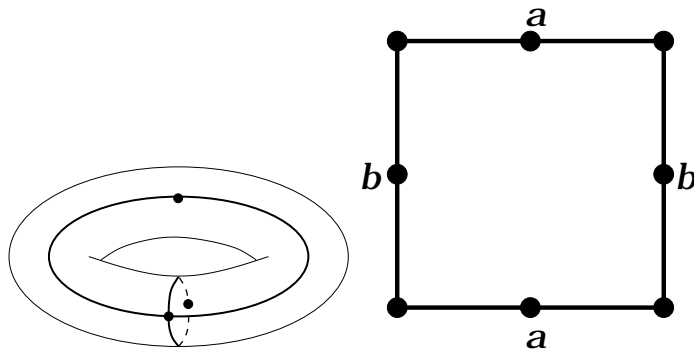


Рис. 114.  $T(422 \mid 8)_4$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_4$ .

Рисунок является самодвойственным.

Пара Белого:  $(X: y^2 = x(x - 1)(x + 1), \beta = -4x^2(x - 1)(x + 1))$

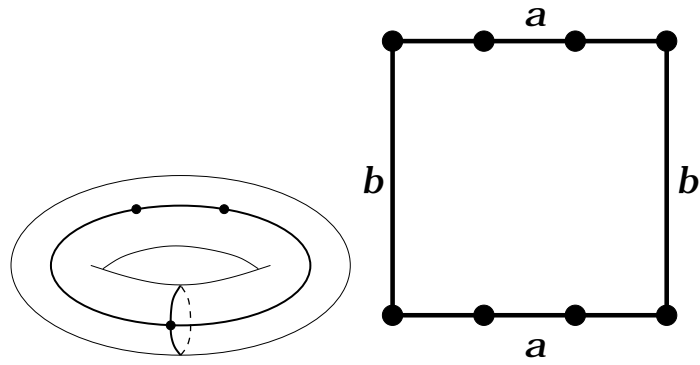


Рис. 115.  $T(422|8)_2$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Рисунок является самодвойственным.  
 Пара Белого:  $(X: y^2 = (x^2 - 2x - 1)x, \beta = (x - 2)^2 x^2)$

### 7.11. Набор валентностей $\langle 4, 2, 1, 1 | * \rangle$

$$\langle \text{Tr}(H^4) \text{Tr}(H^2) \text{Tr}^2(H) \rangle = 4 \cdot 2 \cdot 2! \left( \frac{9}{2} N^2 \right) = 4 \cdot 2 \cdot 2! \left( \left( 4 + \frac{1}{2} \right) N^2 \right).$$

### Набор валентностей $\langle 4, 2, 1, 1 | 7, 1 \rangle$

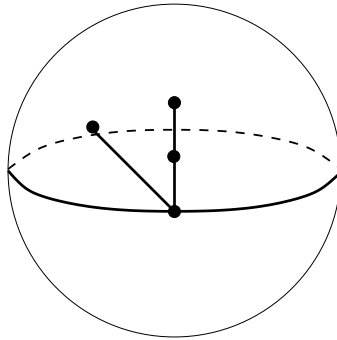


Рис. 116.  $S(4211|71)_+$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(71|4211)_+$ , см. рис. 47 на с. 64.  
 Функция Белого:  $\beta = \frac{(49z^2 - 90z - 2i\sqrt{7}z + 42 + 2i\sqrt{7})(128z + 5i\sqrt{7} - 119)^2 z^4}{512(16377 + 181i\sqrt{7})(z - 1)^7}$

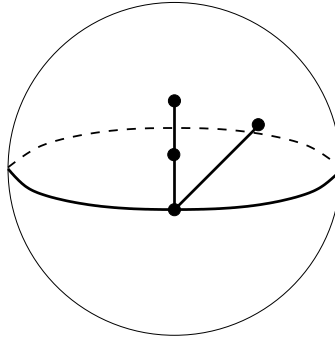


Рис. 117.  $S(4211 | 71)_-$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(71 | 4211)_-$ , см. рис. 48 на с. 65.  
 Функция Белого:  $\beta = \frac{(49z^2 - 90z + 2i\sqrt{7}z + 42 - 2i\sqrt{7})(128z - 5i\sqrt{7} - 119)^2 z^4}{512(16377 - 181i\sqrt{7})(z - 1)^7}$

**Набор валентностей  $\langle 4, 2, 1, 1 | 6, 2 \rangle$**

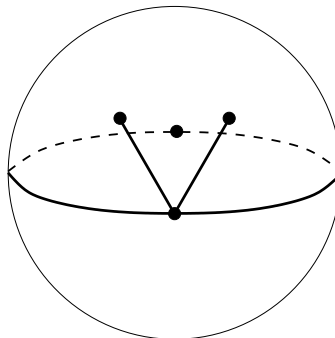


Рис. 118.  $S(4211 | 62)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(62 | 4211)$ , см. рис. 61 на с. 73.  
 Функция Белого:  $\beta = -108 \frac{z^4(1 + 2z + 3z^2)(-1 + 3z)^2}{(-1 + 4z)^2}$

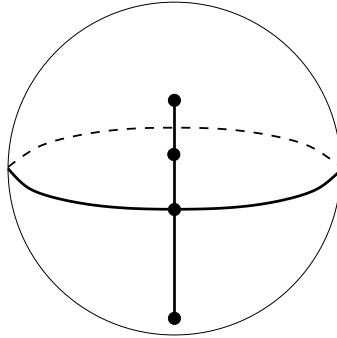
**Набор валентностей  $\langle 4, 2, 1, 1 \mid 5, 3 \rangle$** 

Рис. 119.  $S(4211 \mid 53)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(53 \mid 4211)$ , см. рис. 80 на с. 83.

$$\text{Функция Белого: } \beta = 4 \frac{(3z + 1)^2(-9 - 42z + 5z^2)}{(z - 8)^3 z^5}$$

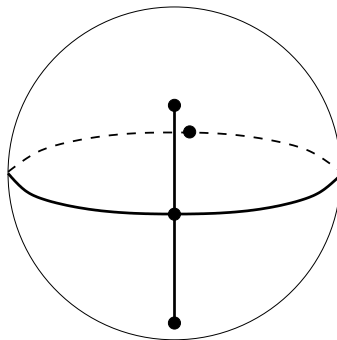
**Набор валентностей  $\langle 4, 2, 1, 1 \mid 4, 4 \rangle$** 

Рис. 120.  $S(4211 \mid 44)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $S(44 \mid 4211)$ , см. рис. 97 на с. 93.

$$\text{Функция Белого: } \beta = 4 \frac{z^2(z^2 + 2)}{(z^2 + 1)^4}$$

**7.12. Набор валентностей  $\langle 4, 1, 1, 1, 1 \mid 8 \rangle$**

$$\langle \text{Tr}(H^4) \text{Tr}^4(H) \rangle = 4 \cdot 4! \left( \frac{1}{4} N \right).$$

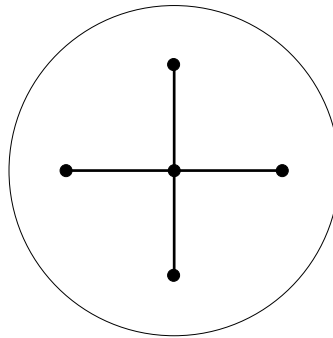


Рис. 121.  $S(41111 \mid 8)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_4$ .  
 Двойственный рисунок:  $S(8 \mid 41111)$ , см. рис. 28 на с. 55.  
 Функция Белого:  $\beta = -4z^4(z-1)(z+1)(z^2+1)$

**7.13. Набор валентностей  $\langle 3, 3, 2 \mid * \rangle$**

$$\langle \text{Tr}^2(H^3) \text{Tr}(H^2) \rangle = 3^2 \cdot 2 \cdot 2! \left( 2N^3 + \frac{1}{2} N \right) = 3^2 \cdot 2 \cdot 2! \left( \left( 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \right) N^3 + \frac{1}{2} N \right).$$

**Набор валентностей  $\langle 3, 3, 2 \mid 6, 1, 1 \rangle$**

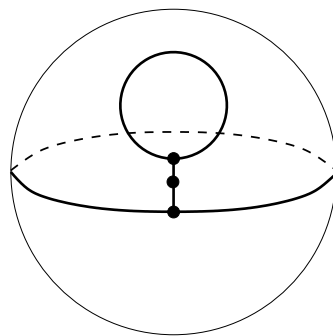
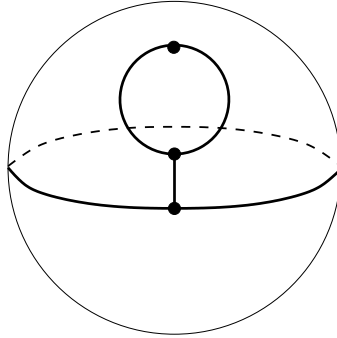
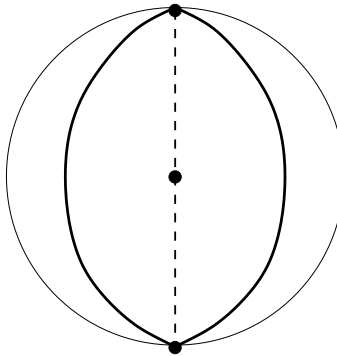


Рис. 122.  $S(332 \mid 611)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $S(611 \mid 332)$ , см. рис. 75 на с. 80. Функция Белого:  $\beta = -\frac{1}{4} \frac{(z^2+4)^3 z^2}{2z^2+9}$

**Набор валентностей  $\langle 3, 3, 2 \mid 5, 2, 1 \rangle$** Рис. 123.  $S(332 \mid 521)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.Двойственный рисунок:  $S(521 \mid 332)$ , см. рис. 91 на с. 89.

$$\text{Функция Белого: } \beta = \frac{4}{27} \frac{(z+4)^2(z^2-6)^3}{(2z+7)^2(4z-11)}$$

**Набор валентностей  $\langle 3, 3, 2 \mid 3, 3, 2 \rangle$** Рис. 124.  $S(332 \mid 332)$ . Набор валентностей  $(3, 3, 2 \mid 3, 3, 2)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .

$$\text{Этот рисунок самодвойственен. Функция Белого: } \beta = 64 \frac{z^2(z^2+1)^3}{(8z^2-1)^3}$$



**Набор валентностей  $\langle 3, 3, 2 \mid 8 \rangle$**

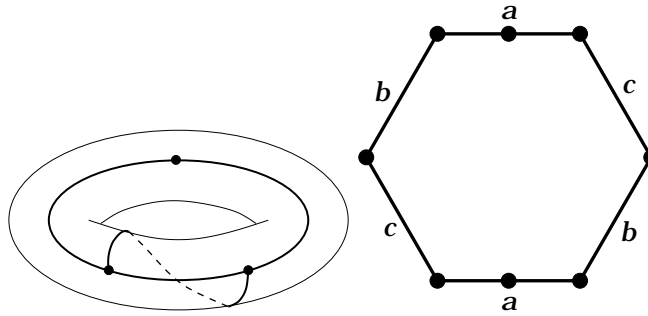


Рис. 125.  $T(332 \mid 8)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $T(8 \mid 332)$ , см. рис. 41 на с. 62.  
 Пара Белого:  $\left( X : y^2 = (x - 2)(4x^2 + 4x + 3), \beta = -\frac{16}{27}(x - 2)x^3 \right)$

**7.14. Набор валентностей  $\langle 3, 3, 1, 1 \mid * \rangle$**

$$\langle \text{Tr}^2(H^3) \text{Tr}^2(H) \rangle = 3^2 \cdot 2! \cdot 2!(2N^2) = 3^2 \cdot 2! \cdot 2! \left( \left( 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \right) N^2 \right).$$

**Набор валентностей  $\langle 3, 3, 1, 1 \mid 7, 1 \rangle$**

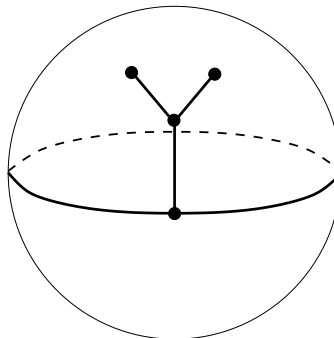


Рис. 126.  $S(3311 \mid 71)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(71 \mid 3311)$ , см. рис. 49 на с. 65.  
 Функция Белого:  $\beta = -\frac{1}{1728} \frac{(1 + z^2 - 5z)^3(49z^2 - 13z + 1)}{z^7}$

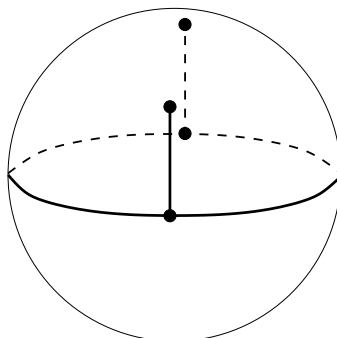
**Набор валентностей  $\langle 3, 3, 1, 1 \mid 6, 2 \rangle$** 

Рис. 127.  $S(3311 \mid 62)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $S(62 \mid 3311)$ , см. рис. 62 на с. 73.  
 Функция Белого:  $\beta = -\frac{1}{64} \frac{(z-3)(3+z)(z-1)^3(z+1)^3}{z^2}$

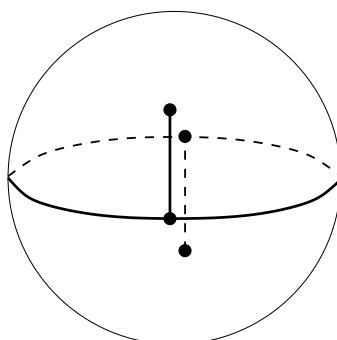
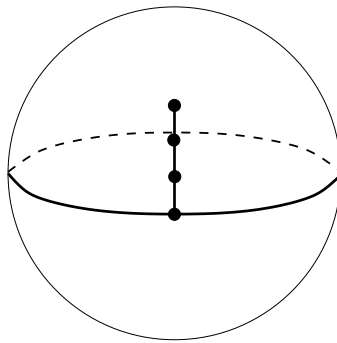
**Набор валентностей  $\langle 3, 3, 1, 1 \mid 4, 4 \rangle$** 

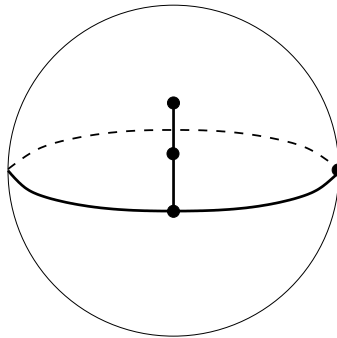
Рис. 128.  $S(3311 \mid 44)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $S(44 \mid 3311)$ , см. рис. 98 на с. 93.  
 Функция Белого:  $\beta = -\frac{1}{432} \frac{(z^2 - 10z - 2)(z^2 - 2z - 2)^3}{z^4}$

**7.15. Набор валентностей  $\langle 3, 2, 2, 1 \mid * \rangle$** 

$$\langle \text{Tr}(H^3) \text{Tr}^2(H^2) \text{Tr}(H) \rangle = 3 \cdot 2^2 \cdot 2!(3N^2).$$

**Набор валентностей  $\langle 3, 2, 2, 1 \mid 7, 1 \rangle$** Рис. 129.  $S(3221 \mid 71)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.Двойственный рисунок:  $S(71 \mid 3221)$ , см. рис. 50 на с. 66.

$$\text{Функция Белого: } \beta = 256 \frac{z^3(z+1)(7+28z+24z^2)^2}{48z-1}$$

**Набор валентностей  $\langle 3, 2, 2, 1 \mid 6, 2 \rangle$** Рис. 130.  $S(3221 \mid 62)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.Двойственный рисунок:  $S(62 \mid 3221)$ , см. рис. 63 на с. 74.

$$\text{Функция Белого: } \beta = -\frac{1}{4} \frac{z^3(4+z)(z^2+2z-2)^2}{(-1+2z)^2}$$

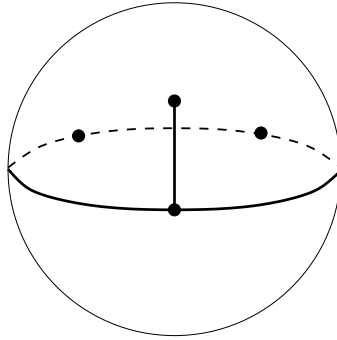
**Набор валентностей  $\langle 3, 2, 2, 1 \mid 5, 3 \rangle$** 

Рис. 131.  $S(3221 \mid 53)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(53 \mid 3221)$ , см. рис. 81 на с. 84.

$$\text{Функция Белого: } \beta = \frac{1}{4} \frac{(z+7)(3+z)^3(z^2+1)^2}{(3+4z)^3}$$

**7.16. Набор валентностей  $\langle 3, 2, 1, 1, 1 \mid 8 \rangle$** 

$$\langle \text{Tr}(H^3) \text{Tr}(H^2) \text{Tr}^3(H) \rangle = 3 \cdot 2 \cdot 3!(N).$$

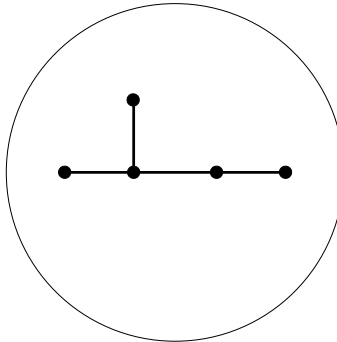


Рис. 132.  $S(32111 \mid 8)$ . У этого рисунка нет нетривиальных автоморфизмов.  
 Двойственный рисунок:  $S(8 \mid 32111)$ , см. рис. 29 на с. 55.

$$\text{Функция Белого: } \beta = -\frac{1024}{729} z^3 (z-1)(16z^2+8z+3)(4z-3)^2$$

**7.17. Набор валентностей  $\langle 2, 2, 2, 2 \mid 4, 4 \rangle$** 

$$\langle \text{Tr}^4(H^2) \rangle = 2^4 \cdot 4! \left( \frac{1}{8} N^2 \right).$$

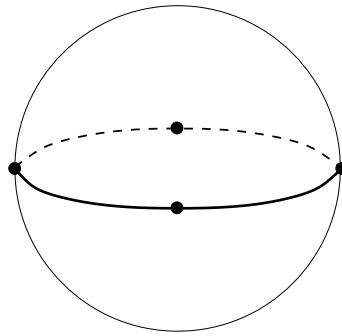


Рис. 133.  $S(2222 \mid 44)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $S(44 \mid 2222)$ , см. рис. 99 на с. 94. Функция Белого:  $\beta = \frac{(z^4 + 1)^2}{4z^4}$

**7.18. Набор валентностей  $\langle 2, 2, 2, 1, 1 \mid 8 \rangle$** 

$$\langle \text{Tr}^3(H^2) \text{Tr}^2(H) \rangle = 2^3 \cdot 3! \cdot 2! \left( \frac{1}{2} N \right).$$

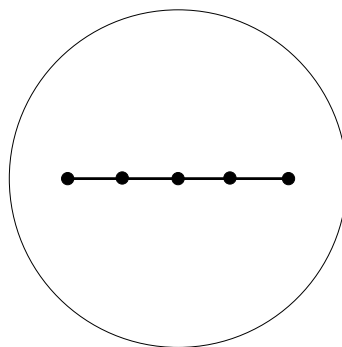


Рис. 134.  $S(22211 \mid 8)$ . Группа автоморфизмов:  $\mathbb{Z}_2$ .  
 Двойственный рисунок:  $S(8 \mid 22211)$ , см. рис. 30 на с. 56.  
 Функция Белого:  $\beta = -4z^2(z^2 - 2)(z - 1)^2(z + 1)^2$

## Литература

- [1] Alexandrov A., Mironov A., Morozov A. Partition functions of matrix models as the first special functions of string theory. I. Finite size Hermitean 1-matrix model // *Internat. J. Modern Phys. A.* — 2004. — Vol. 19. — P. 4127–4165. — [arXiv:hep-th/0310113](#).
- [2] Bétréma J., Péré D., Zvonkin A. Plane Trees and Their Shabat Polynomials. *Catalog.* — Technical Report LaBRI No. 92-75. — Bordeaux, 1992.
- [3] Chada S., Mahoux G., Mehta M. L. A method of integration over matrix variables. II // *J. Phys. A.* — 1981. — Vol. 14. — P. 589–586.
- [4] Di Francesco P., Itzykson C. A generating function for fatgraphs. — Preprint. — 1992.
- [5] Grothendieck A. Sketch of a programme (Esquisse d'un programme) // *Geometric Galois Actions* / L. Schneps, P. Lochak, eds. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 242). — Vol. 1: Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme. — P. 5–48; 243–283.
- [6] Lando S. K., Zvonkin A. K. *Graphs on Surfaces and Their Applications.* — Berlin: Springer, 2004. — (Encyclopedia of Mathematical Sciences; Vol. 141).