

Комбинаторика трёхвалентных ленточных графов с двумя гранями*

И. В. АРТАМКИН

Московский государственный институт
радиотехники, электроники и автоматики

УДК 512.7+515.162

Ключевые слова: тривалентные ленточные графы, детские рисунки с двумя гранями.

Аннотация

В заметке обсуждается комбинаторика тривалентных ленточных графов (детских рисунков) с двумя гранями.

Abstract

I. V. Artamkin, Combinatorics of trivalent ribbon graphs with two faces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 6, pp. 113–120.

In this article, the combinatorics of trivalent ribbon graphs (*dessins d'enfants*) with two faces is under consideration.

В этой заметке обсуждается комбинаторика ленточных графов с двумя гранями. Все необходимые определения можно найти в [2].

Рассмотрим множество $\mathcal{D}ess_{g,2}$ трёхвалентных ленточных графов D рода g с множеством вершин V , множеством рёбер E и множеством граней $F = \{X, Y\}$. Такие графы имеют $4g$ вершин и $6g$ рёбер. Рассмотрим также множество $F_{1,2}$ $(1,2)$ -флагов, т. е. пар (e, C) , где $e \in E$, $C \in F$, причём грань C содержит ребро e . Имеются проекции множества $F_{1,2}$ на E и F :

$$\pi_1: F_{1,2} \rightarrow E, \quad \pi_2: F_{1,2} \rightarrow F.$$

Множество рёбер E графа $D \in \mathcal{D}ess_{g,2}$ естественно разбивается на два подмножества:

$$E_1 = \{e \in E, \text{ для которых } |\pi_1^{-1}(e)| = 1\} -$$

множество рёбер, по обе стороны от которых лежит одна и та же грань, и

$$E_2 = \{e \in E, \text{ для которых } |\pi_1^{-1}(e)| = 2\} -$$

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 07-01-92211-НЦНИЛ-а и 07-01-00441-а.

множество рёбер, разделяющих две разные грани. Рёбра из E_1 будем называть *внутренними*, а ребра из E_2 — *разделяющими*. Внутренние рёбра, в свою очередь, подразделяются на два подмножества:

$$E_X = \{e \in E_1, \pi_1^{-1}(e) = X\}, \quad E_Y = \{e \in E_1, \pi_1^{-1}(e) = Y\}.$$

Обозначим

$$k = |E_2|, \quad l_X = |E_X|, \quad l_Y = |E_Y|, \quad (1)$$

так что $k + l_X + l_Y = 6g$. Обозначим

$$l = \min(l_X, l_Y), \quad q = |l_X - l_Y|, \quad 2M = 6g - 2l, \quad (2)$$

тогда, очевидно, $q = 2M - k$.

Опишем множество U_g пар целых чисел (l, k) , отвечающих ленточным графам из $\mathcal{D}_{ess, g, 2}$.

Предложение 1. Область U_g ленточных графов задаётся на плоскости (l, k) , $k \geq 0$, $l \geq 0$, следующими неравенствами:

- 1) $k \leq 4g$;
- 2) $k \leq 6g - 2l$;
- 3) $k \geq \kappa(l)$,

где $\kappa(l)$ — целочисленная периодическая при $l > 0$ функция с периодом 6, определяемая следующим образом:

$$\kappa(0) = 1, \quad \kappa(1) = 4, \quad \kappa(l) = 7 - l, \quad l = 2, 3, 4, 5, \quad \kappa(6) = 5.$$

Таким образом, область ленточных графов U_g представляет собой трапецию, ограниченную сверху прямой $k = 4g$, с боков — прямыми $l = 0$ и $k = 6g - 2l$, а снизу — ломаной $k = \kappa(l)$ (рис. 1).

Наибольшее возможное значение l в области U_g равно $3g - 1$ для чётных значений рода и $3g - 2$ для нечётных.

Докажем предложение 1. Очевидно, в каждой вершине может сходить лишь чётное число разделяющих рёбер, т. е. два или ноль, поэтому разделяющие рёбра образуют цикл (или несколько циклов). Следовательно, число внутренних рёбер не превосходит числа вершин, т. е. $4g$, что доказывает необходимость первого неравенства предложения 1. Необходимость второго неравенства также очевидна, поскольку всего имеется k разделяющих и по крайней мере $2l$ внутренних рёбер.

Опишем теперь ленточные графы, соответствующие нижней границе области U_g — точкам графика функции κ . Эти ленточные графы мы будем склеивать из ленточных графов с *полурёбрами*, т. е. с рёбрами, один конец которых заканчивается, как и положено, в вершине, а другой остаётся свободным для последующей склейки с таким же свободным концом другого полурёбра (это же или другого ленточного графа). На всякий случай приведём формальное

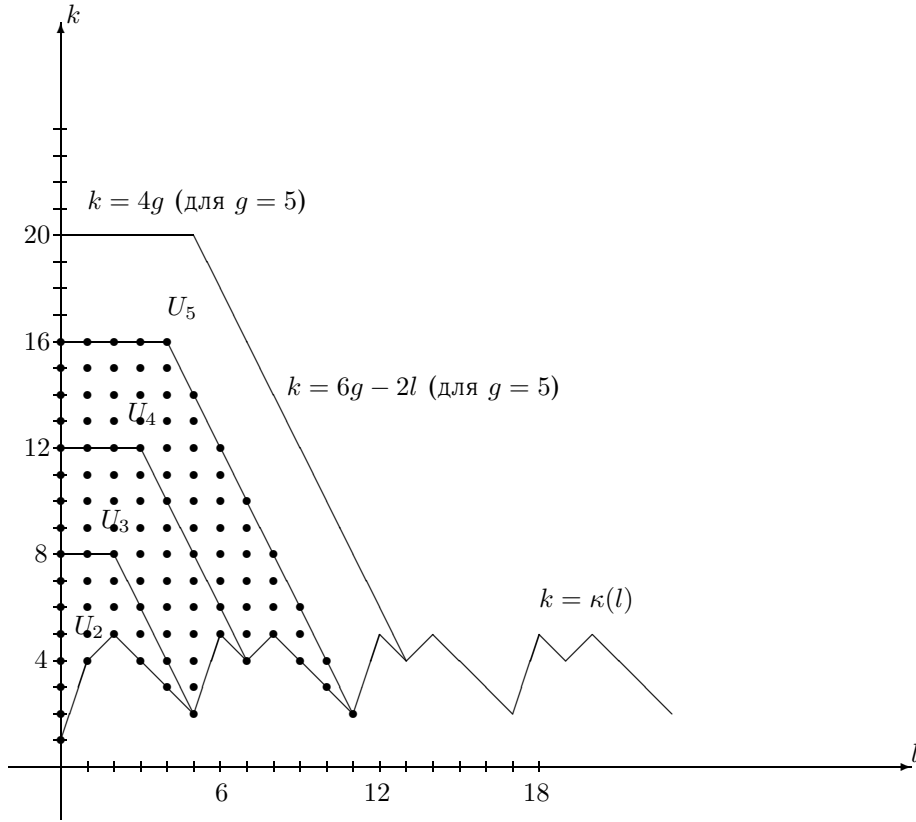


Рис. 1. Области U_g для $g = 2, 3, 4, 5$. На рисунке отмечены все целые точки области U_4

определение. Ленточный граф с полурёбрами Γ задаётся следующим набором данных: $(V, \vec{E}, i, \vec{E}_-, s, \sigma)$, где

- 1) V — множество вершин ленточного графа Γ ;
- 2) \vec{E} — множество ориентированных рёбер ленточного графа Γ ;
- 3) $i: \vec{E} \rightarrow \vec{E}$ — инволюция смены ориентации (не имеющая неподвижных точек);
- 4) \vec{E}_- — множество исходящих ориентированных рёбер ленточного графа Γ ; требуется, чтобы $\vec{E} = \vec{E}_- \cup i(\vec{E}_-)$, (т. е. каждое ориентированное ребро является входящим или исходящим);
- 5) $s: \vec{E}_- \rightarrow V$ — сюръективное отображение, ставящее в соответствие каждому исходящему ребру его начало;
- 6) σ — фиксация циклического порядка на множестве $s^{-1}(v)$ рёбер, исходящих из каждой вершины $v \in V$.

Отметим, что если $\vec{E} = \vec{E}_-$, то Γ является обычным ленточным графом, каждое ребро которого имеет два конца.

Сначала рассмотрим два трёхвалентных ленточных графа (без полурёбер) с одной гранью D_1 и D_2 рода $h_1 > 0$ и $h_2 > 0$, имеющие соответственно $4h_i - 2$ вершины и $6h_i - 3$ ребра. Рассмотрим также двухвалентный ленточный граф B_m с m вершинами и m рёбрами (т. е., попросту говоря, окружность с m поставленными на ней вершинами). Сделаем теперь все вершины B_m трёхвалентными, добавив в каждую из них по полуребру так, чтобы m_1 полурёбер выходило в одну грань ленточного графа B_m , а $m_2 = m - m_1$ — в другую. Обозначим полученный ленточный граф с полурёбрами B_{m_1, m_2} . С ленточными графами D_1 и D_2 будем производить одну из следующих операций:

- 1) $p_1(D_i)$ — добавление в середину произвольного ребра D_i вершины с выходящим из неё полуребром;
- 2) $p_2(D_i)$ — размыкание произвольного ребра D_i в два полуребра;
- 3) $p_3(D_i)$ — удаление произвольной вершины ленточного графа D_i , при этом три входящих в неё ребра становятся полурёбрами;
- 4) $p_4(D_i)$ — удаление из D_i произвольного ребра (не петли) вместе с обоими его концами, при этом четыре других входящих в эти вершины ребра становятся полурёбрами.

Будем склеивать полученные таким образом полурёбра ленточного графа D_1 с полурёбрами B_{m_1, m_2} , направленными в одну сторону, а полурёбра ленточного графа D_2 — с полурёбрами B_{m_1, m_2} , направленными в другую сторону; такую склейку будем обозначать знаком $+$. Тогда точкам $(l, \kappa(l))$ отвечают следующие ленточные графы ($0 < l \leq l_{\max}$, $h_1 = [l/6] + 1$):

- 1) $p_1(p_1(D_1)) + (B_{1,1} \sqcup B_{1,1}) + p_1(p_1(D_2))$ соответствует значению $l = 6h_1 + 1$, $\kappa(l) = 4$ ($h_2 = g - h_1 - 1$; для $l = 1$ вместо приклеивания графа D_1 нужно просто склеить одну пару полурёбер, выходящих из двух экземпляров $B_{1,1}$);
- 2) $p_4(D_1) + B_{4,1} + p_1(D_2)$ соответствует значению $l = 6h_1 - 4$, $\kappa(l) = 5$ ($h_2 = g - h_1$);
- 3) $p_3(D_1) + B_{3,1} + p_1(D_2)$ соответствует значению $l = 6h_1 - 3$, $\kappa(l) = 4$ ($h_2 = g - h_1$);
- 4) $p_2(D_1) + B_{2,1} + p_1(D_2)$ соответствует значению $l = 6h_1 - 2$, $\kappa(l) = 3$ ($h_2 = g - h_1$);
- 5) $p_1(D_1) + B_{1,1} + p_1(D_2)$ соответствует значению $l = 6h_1 - 1$, $\kappa(l) = 2$ ($h_2 = g - h_1$);
- 6) $p_2(p_1(D_1)) + (B_{2,1} \sqcup B_{1,1}) + p_1(p_1(D_2))$ соответствует значению $l = 6h_1$, $\kappa(l) = 5$ ($h_2 = g - h_1 - 1$).

Значение $l = 0$ особое: ленточный граф $B_{0,1} + p_1(D_2)$ с $h_2 = g$ соответствует значению $\kappa(0) = 1$.

Необходимость условия $k \geq \kappa(l)$ проверяется теперь простым перебором: если разрезание поверхности по разделяющим рёбрам даёт в результате две

римановы поверхности рода $h_1 > 0$ и $h_2 > 0$ с s дырками каждая, такие что $h_1 + h_2 + s - 1 = g$, то $k \geq 2s$, а поскольку $\kappa(l) \leq 5$, достаточно разобрать случаи $s = 1$ и $s = 2$, что, по существу, уже сделано.

Осталось проверить, что все остальные точки области U_g также реализуются ленточными графами. Мы получим эти графы, применяя последовательность флипов к уже построенным ленточным графам. Напомним, что флипом в ребре e трёхвалентного ленточного графа D называется ленточный граф D' , полученный из D стягиванием ребра e и последующим раздутием полученной четырёхвалентной вершины в две трёхвалентные, соединённые ребром e' .

Назовём внутреннее ребро нашего графа D m -внутренним, $m = 0, 1, 2$, если m его концов принадлежат противоположной грани (рис. 2).

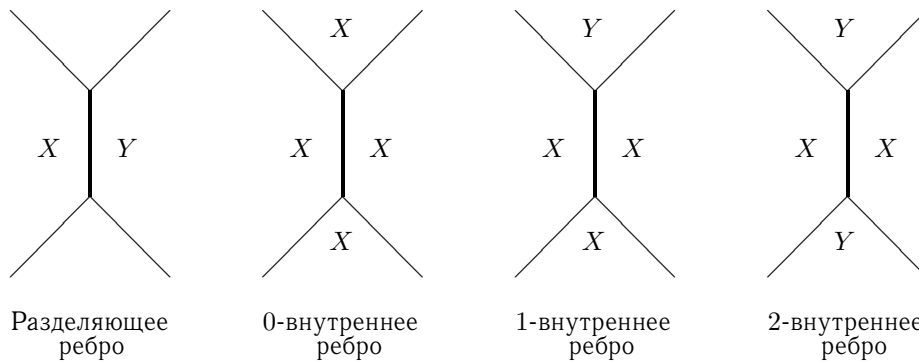


Рис. 2. Разделяющее ребро и внутренние рёбра

Нетрудно видеть, что при флипе в 1-внутреннем ребре e грани X ребро e' становится уже граничным, так что такой флип на единицу увеличивает k и на столько же уменьшает l_X . Наоборот, флип в 2-внутреннем ребре e грани X делает ребро e' 2-внутренним ребром противоположной грани, так что такой флип не изменяет k , а на единицу уменьшает l_X и на столько же увеличивает l_Y .

Пусть теперь D — трёхвалентный ленточный граф, соответствующий точке $(l, \kappa(l))$. Предположим для определённости, что $l_X = l$. Делая последовательно флипы в 1-внутренних рёбрах грани Y , будем получать ленточные графы, соответствующие последовательно возрастающим на единицу значениям k с тем же значением l , по крайней мере до тех пор, пока $l_X < l_Y$. Если же в некоторый момент окажется, что $l_X = l_Y$, это будет означать, что $k + 2l = 6g$, т. е. мы вышли на наклонную верхнюю границу области U_g . Если же после некоторого флипа все ещё сохраняется неравенство $l_X < l_Y$, а у грани Y больше не осталось 1-внутренних рёбер, то это означает, что все внутренние рёбра грани Y являются 2-внутренними. (Легко видеть, что наличие у грани 0-внутренних рёбер влечёт наличие у неё и 1-внутренних рёбер.) В таком случае после $l_Y - l$ флипов в 2-внутренних рёбрах грани Y , не меняющих, как мы видели, значения k , грани как бы поменяются местами: теперь $l_X > l_Y = l$, причём все внутренние

рёбра грани Y являются 2-внутренними. Если у грани X ещё остаются 1-внутренние рёбра, мы можем продолжить процесс повышения k до тех пор, пока все внутренние рёбра грани X не станут также 2-внутренними. В этом случае мы придём к ленточному графу, все внутренние рёбра которого являются 2-внутренними, что, конечно, означает, что $k = 4g$, т. е. мы опять-таки попали на верхнюю границу области U_g . Предложение 1 доказано.

Интересно, что описанная стратификация множества $\mathcal{D}ess_{g,2}$ позволяет получить для таких трёхвалентных ленточных графов с двумя гранями множество соотношений, подобных соотношениям Концевича [1]. Для того чтобы написать соотношение Концевича, зафиксируем следующие обозначения. Для трёхвалентного ленточного графа $D \in \mathcal{D}ess_{g,\gamma}$ рода g обозначим множество его вершин через V , множество его рёбер через E и множество его граней через F , $\gamma = |F|$. Рассмотрим симметрическую рациональную функцию от переменных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\gamma$

$$K(D) = S\left(\prod_{e \in E} \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}\right), \quad (3)$$

где переменные λ_i и λ_j соответствуют граням, содержащим ребро e (возможно, $i = j$), а S — символ симметризации по переменным $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\gamma$. Оказывается, что функция

$$\mathcal{K}_{g,\gamma} = \sum_{D \in \mathcal{D}ess_{g,\gamma}} C(D)K(D),$$

где $C(D) = 1/|\text{Aut } D|$, является линейной комбинацией обратных мономов, т. е.

$$\mathcal{K}_{g,\gamma} = \sum A_{n_1, \dots, n_\gamma} \frac{1}{\lambda_1^{n_1} \dots \lambda_\gamma^{n_\gamma}}. \quad (4)$$

В обсуждаемом здесь случае $\gamma = 2$ нетрудно проверить, что это утверждение выполняется для достаточно большого количества различных наборов положительных рациональных чисел $C(D)$. Очевидно, всевозможные такие наборы рациональных коэффициентов образуют выпуклый рациональный конус.

Предложение 2. Для трёхвалентных ленточных графов с двумя гранями всевозможные наборы рациональных коэффициентов $C(D)$, для которых выполняется (4), образуют выпуклый рациональный конус размерности не менее $g(4g - 7)$.

Для доказательства введём новые переменные $x = 1/\lambda_1$ и $y = 1/\lambda_2$, соответствующие граням X и Y . В этих обозначениях формула (3) переписется следующим образом:

$$K(D) = \frac{1}{2^{6g-k}} (xy)^l \cdot \frac{(xy)^k}{(x+y)^k} (x^{2M-k} + y^{2M-k}) = \frac{1}{2^{6g-k}} R_{l,k}(x, y),$$

где числа k, l, M определены в (1) и (2),

$$R_{l,k}(x, y) = \frac{(xy)^{k+l}}{(x+y)^k} (x^{2M-k} + y^{2M-k}).$$

Нетрудно проверить следующие свойства функций $R_{l,k}$.

Предложение 3.

1. $R_{l,k} + R_{l+1,k} + R_{l,k-1} = R_{l+1,k-2}$.
2. $R_{l,k} = R_{6g-k-l,k}$.
3. $R_{l,k}$ является многочленом при $k \leq 1$.

Итерируя равенство 1 для последовательных пар значений k , нетрудно получить аналогичное равенство для любых $2m$ последовательных значений k .

Следствие.

$$R_{l+1,2m} + \sum_{k=1}^{2m} R_{l,k} = R_{l+1,0}. \quad (5)$$

Для доказательства предложения 2 обозначим соотношение 1 предложения 3 через I_{lk} и определим *носитель* соотношения I_{lk} как

$$\text{supp } I_{lk} = \{(l, k), (l+1, k), (l, k-1), (l+1, k-2)\}.$$

Тогда любое такое соотношение I_{lk} , для которого $\text{supp } I_{lk} \subset U_g$, задаёт линейную вариацию коэффициентов $C(D)$. Остаётся только заметить, что любой конечный набор соотношений I_{lk} является линейно независимым. Действительно, если мы отметим все точки (l, k) носителей всех соотношений 1 предложения 3, входящих с ненулевыми коэффициентами в какую-нибудь линейную комбинацию, то самая правая нижняя отмеченная точка может принадлежать носителю только одного соотношения, которое, следовательно, может входить в равную нулю линейную комбинацию только с коэффициентом ноль. Противоречие. Оценка в предложении 2 есть просто размер такого прямоугольника, целиком помещающегося в область U_g , что $\text{supp } I_{lk} \subset U_g$ для любой точки (l, k) этого прямоугольника.

Дадим, наконец, независимое от [1] доказательство существования в нашем случае искомым коэффициентов, т. е. покажем, что существуют такие натуральные числа $C_{l,k}$, что функция

$$\sum_{(l,k) \in U_g} C_{l,k} R_{l,k}$$

является многочленом.

Для доказательства заметим сначала, что каждую из функций $R_{l,k}$, $0 \leq l \leq l_{\max}$, $1 \leq k < \kappa(l)$, можно выразить с натуральными коэффициентами через $R_{l,k}$ с $(l, k) \in U_g$. Это легко доказать по индукции: для $l = 0$ это автоматически верно, поскольку $\kappa(0) = 1$, а для перехода от l к $l+1$ функции $R_{l+1,k}$ вычисляются последовательно с помощью формулы 1 предложения 3 начиная с $k = \kappa(l) - 1$ до $k = 1$. При этом в последнем ряду ($l = l_{\max}$) для получения $R_{l_{\max}, \kappa(l_{\max})-1}$ потребуется функция $R_{l_{\max}, \kappa(l_{\max})+1}$, не попадающая в область U_g , однако равенство 2 предложения 3 даёт в этом случае $R_{l_{\max}, \kappa(l_{\max})+1} = R_{l_{\max}-1, \kappa(l_{\max})+1}$, причём $(l_{\max}-1, \kappa(l_{\max})+1) \in U_g$.

Таким образом, нам теперь достаточно доказать наше утверждение для области \bar{U}_g , ограниченной прямыми линиями: сверху прямой $k = 4g$, снизу — прямой $k = 1$, с боков — прямыми $l = 0$, $l = l_{\max}$ и $k = 6g - 2l$.

Теперь остаётся для каждого $l \leq l_{\max}$ применить к вертикальному ряду точек (l, k) , $k = 1, \dots, \min(4g, 6g - 2l)$ формулу (5). При этом, правда, при $l \geq g$ (т. е. на наклонной стороне трапеции \bar{U}_g) точка $(l+1, 6g-2l)$ не принадлежит области \bar{U}_g , но равенство 2 предложения 3 даёт в этом случае $R_{l+1, 6g-2l} = R_{l-1, 6g-2l}$, причём $(l-1, 6g-2l) \in \bar{U}_g$.

Отметим, что мы даже можем проследить за полученными коэффициентами $C_{l,k}$ при $k > 6$, которые не использовались для получения «недостающих» функций $R_{l,k}$ ниже графика функции κ : $C_{g-1, 4g} = 3$ (при $g > 2$), $C_{l, 4g} = 2$ при $1 < l < g-1$, $l = g$ и $C_{l-1, 6g-2l} = 2$ при $g < l < l_{\max} - 3$, остальные $C_{l,k}$ равны 1 ($k > 6$).

Литература

- [1] Kontsevich M. Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function // Comm. Math. Phys. — 1992. — Vol. 147, no. 1. — P. 1–23.
- [2] Lando S. K., Zvonkin A. K. Graphs on Surfaces and Their Applications. — Berlin: Springer, 2004. — (Encyclopedia of Mathematical Sciences; Vol. 141).