

Штребелевы дифференциалы на семействах гиперэллиптических кривых

И. В. АРТАМКИН

*Московский государственный институт
радиотехники, электроники и автоматики*

Ю. А. ЛЕВИЦКАЯ

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*

Г. Б. ШАБАТ

Российский государственный гуманитарный университет

УДК 512.7+515.162

Ключевые слова: штребелевы дифференциалы, гиперэллиптические кривые.

Аннотация

Работа посвящена построению штребелевых пар на семействах гиперэллиптических кривых. Дано полное доказательство штребелевости построенных дифференциалов и указана связь введённых конструкций с традиционными объектами комплексной алгебраической геометрии.

Abstract

I. V. Artamkin, Yu. A. Levitskaya, G. B. Shabat, Strebel differentials on families of hyperelliptic curves, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 6, pp. 121–130.

Our paper is devoted to Strebel pairs on families of hyperelliptic curves. We provide a complete proof of the fact that constructed differentials are Strebel and point out the connections between the introduced constructions and classical objects of complex algebraic geometry.

1. Введение

Работа посвящена штребелевым парам (по аналогии с *парами Белого* мы называем *штребелевыми парами* пары, состоящие из римановой поверхности и штребелева дифференциала на ней) на семействах гиперэллиптических кривых. Эти семейства построены в работе [2], где приводится и набросок доказательства их штребелевости. В настоящей работе мы даём полное доказательство и указываем на связь наших конструкций с традиционными объектами комплексной алгебраической геометрии.

Квадратичные дифференциалы на римановых поверхностях могут рассматриваться как комплексно-аналитические аналоги римановых метрик. Эту аналогию

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 6, с. 121–130.

© 2007 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

можно понимать буквально: если квадратичный дифференциал в области действия некоторой локальной координаты z имеет вид $f(dz)^2$, то в этой же области корректно определена метрика $ds^2 = |f| dz d\bar{z}$, являющаяся римановой вне нулей и полюсов дифференциала; определён также элемент площади $-i dz \wedge d\bar{z}$. Однако более интересен подход, связанный с рассмотрением *всех* метрик на данной римановой поверхности. Он может быть сопоставлен с развившейся в последние десятилетия XX века физической *теорией струн*. Легко формулируются вариационные задачи, аналогичные задачам теории струн; при этом бесконечномерное и труднодоступное пространство метрик на данной поверхности заменяется на конечномерные пространства квадратичных дифференциалов с контролируемыми особенностями.

Одна из таких задач была поставлена и решена математиками задолго до появления теории струн. Эта задача ставится следующим образом (см. [7]). Пусть задана риманова поверхность, и пусть некоторым гомологическим классам простых замкнутых кривых на ней приписаны положительные вещественные числа. Рассмотрим множество регулярных квадратичных дифференциалов, в метриках которых любые замкнутые кривые выделенных гомологических классов не короче соответствующих чисел. Требуется найти в этом множестве дифференциал, определяющий наименьшую площадь всей поверхности. Решение этой задачи доставляется *штребелевыми* дифференциалами (более распространённое определение приведено ниже).

Сформулированная задача, как и несколько аналогичных ей, полностью решена в работах Тайхмюллера, Дженкинса, Штребеля и др. Однако все эти решения получены в рамках теоретико-функциональных подходов и являются *теоремами существования*. Алгебро-геометрическая и арифметическая природа получаемых штребелевых дифференциалов не рассматривалась, нетривиальные примеры не приводились; вероятно, первый конкретный пример был построен Н. Я. Амбург в [1] (построенная ей пара была определена над квадратичным полем $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$).

2. Определения и предварительные сведения

Пусть X — компактная риманова поверхность рода g . Обозначим буквой Ω пучок голоморфных 1-форм на X .

Определение 2.1. *Квадратичный дифференциал* η на X — это сечение тензорного квадрата $\Omega^{\otimes 2}$ кокасательного расслоения X .

Иначе говоря, если в некоторой области U поверхности X выбрана локальная координата $z: U \hookrightarrow \mathbb{C}$, то квадратичный дифференциал в этой области имеет вид $\eta = f(dz)^2$, где $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Если $z_1: U_1 \hookrightarrow \mathbb{C}$ — другая локальная координата, то на U_1 дифференциал имеет вид $\eta = f_1(dz_1)^2$, причём на $U \cap U_1$ функции f и f_1 связаны соотношением $f = f_1 \cdot \left(\frac{dz_1}{dz}\right)^2$.

Утверждение 2.2 [3]. Любой ненулевой голоморфный квадратичный дифференциал на поверхности рода g имеет с учётом кратности $4g - 4$ нуля.

Фиксируем на поверхности X точку P_0 , в которой квадратичный дифференциал η не обращается в ноль. Пусть точка $P \in X$ и гладкий путь, соединяющий P_0 и P , также лежат вне множества нулей дифференциала η . Тогда можно выбрать одно из двух значений определённого в окрестности пути абелева дифференциала $\sqrt{\eta}$ и рассмотреть функцию $I(P) := \int_{P_0}^P \sqrt{\eta}$. Эта функция определена локально, с точностью до знака и аддитивной константы, однако слоение, задаваемое линиями уровня её мнимой части $\text{Im } I(P)$, глобально определено на X вне множества нулей дифференциала η . Это слоение называется *горизонтальным слоением*, определённым квадратичным дифференциалом η .

Определение 2.3. *Горизонтальным слоем*, определённым квадратичным дифференциалом η , называется любой слой соответствующего горизонтального слоения.

Горизонтальные слои выходят из k -кратного нуля квадратичного дифференциала в $k + 2$ направлениях. Вне нулей квадратичного дифференциала горизонтальные траектории локально выглядят как непересекающиеся замкнутые кривые.

Определение 2.4. *Сепаратрисой* (или критической кривой) называется горизонтальная кривая, один из концов которой является нулём дифференциала.

Определение 2.5. Квадратичный дифференциал η называется *штребелевым*, если объединение его сепаратрис и нулей компактно.

Определение 2.6. *Штребелевой парой* называется пара (X, η) , состоящая из поверхности X и штребелева дифференциала η на ней.

В случае штребелева дифференциала сепаратрисы начинаются и заканчиваются в нулях дифференциала. Поэтому можно говорить о *критическом графе* (или *графе сепаратрис*) штребелева дифференциала.

Штребелев дифференциал η задаёт на поверхности X «почти риманову» метрику следующим образом: если U — некоторая область на X , в которой штребелев дифференциал имеет вид $\eta|_U = f(dz)^2$, то метрика в этой области задаётся формулой $ds^2|_U = |f| dz d\bar{z}$. Эта метрика является римановой везде, кроме нулей дифференциала η .

Утверждение 2.7 [7]. Сепаратрисы штребелева дифференциала в метрике, задаваемой штребелевым дифференциалом, разбивают поверхность на прямые метрические цилиндры.

Из этого утверждения следует, что на дополнении в X к множеству нулей и сепаратрис дифференциала можно задать набор карт, в каждой из которых можно выбрать такую локальную координату z , что штребелев дифференциал имеет вид $(dz)^2$.

3. Конструкция семейства штробелевых пар

Обозначим для $p \in \mathbb{R}$ через \check{X}_p аффинную кривую (как это принято в современной литературе, кривую над полем комплексных чисел мы иногда называем *кривой*, а иногда — *римановой поверхностью*) рода g , задаваемую уравнением

$$y^2 = x^{2g+2} - 2px^{g+1} - 1,$$

а через X_p — её полную гладкую модель. Рассмотрим на этой кривой квадратичный дифференциал

$$\eta = x^{g-1} \left(\frac{dx}{y} \right)^2 = \frac{x^{g-1}(dx)^2}{x^{2g+2} - 2px^{g+1} - 1}.$$

Теорема 3.1. Пусть g — чётное натуральное число. Для любого $p \in \mathbb{R}$ квадратичный дифференциал $\eta = x^{g-1} \left(\frac{dx}{y} \right)^2$ является штробелевым на поверхности X_p .

Доказательство. Воспользуемся следующим критерием штробелевости дифференциала.

Лемма 3.2. Пусть на поверхности X задан квадратичный дифференциал η с множеством нулей $\{A_1, \dots, A_n\}$ кратностей k_1, \dots, k_n . Пусть на этой поверхности дана конечная система таких начинающихся и кончающихся в нулях дифференциала непересекающихся гладких вещественных кривых, что все интегралы $\int \sqrt{\eta}$ вещественны вдоль этих кривых (точнее, $\text{Im} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\eta} = 0$ для любого отрезка $[x_1; x_2]$ такой кривой). Пусть из каждого нуля A_i выходят ровно $k_i + 2$ таких кривых. Тогда дифференциал η штробелев.

Доказательство. По существу, эта лемма является лишь переформулировкой определений. Действительно, из вещественности написанных интегралов следует, что данные кривые являются горизонтальными слоями дифференциала. Из того, что они начинаются и заканчиваются в его нулях, следует, что это сепаратрисы. Так как из нуля порядка k выходят ровно $k + 2$ сепаратрисы, других сепаратрис нет. Следовательно, всё представленное семейство является в точности множеством сепаратрис дифференциала, поэтому это множество компактно и дифференциал штробелев. \square

Введём некоторые обозначения. Обозначим через C_{\pm} «бесконечные» точки кривой \check{X}_p , т. е. такие точки, что $\check{X}_p = X_p \setminus \{C_{\pm}\}$. Введём также точки A_{\pm} , определяемые равенствами $x(A_{\pm}) = 0$, $y(A_{\pm}) = \pm i$. Тогда x — рациональная функция на X_p с полюсами в C_{\pm} и нулями A_{\pm} .

Корнями функции $f(x) := y^2 = x^{2g+2} - 2px^{g+1} - 1$ будут две серии по $g + 1$ комплексному числу, составляющие множество ${}^{g+1}\sqrt{p \pm \sqrt{p^2 + 1}}$.

Утверждение 3.3. Дифференциал η регулярен и имеет четыре нуля в точках A_{\pm} и C_{\pm} порядков $g - 1$. Имеет место дивизориальное соотношение

$$(\eta) = (g - 1)(A_+ + A_- + C_+ + C_-).$$

Доказательство. Нужно проверить регулярность дифференциала η в корнях многочлена $x^{2g+2} - 2px^{g+1} - 1$ и на бесконечности.

Для того чтобы проверить регулярность на бесконечности, перейдём в карты в окрестностях C_{\pm} с локальной координатой $z := \frac{1}{x}$. В этой координате

$$\eta = \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{g-1} (d\frac{1}{z})^2}{\left(\frac{1}{z}\right)^{2g+2} - 2p\left(\frac{1}{z}\right)^{g+1} - 1} = \frac{z^{g+3} (dz)^2}{(1 - 2pz^{g+1} - z^{2g+2})z^4} = \frac{z^{g-1} (dz)^2}{1 - 2pz^{g+1} - z^{2g+2}}.$$

Отсюда следует, что дифференциал в обеих бесконечных точках регулярен и, более того, имеет ноль порядка $g - 1$.

В окрестностях нулей многочлена $x^{2g+2} - 2px^{g+1} - 1$ можно взять локальную координату y . Можно проверить, что в этой координате дифференциал имеет вид

$$\eta = \frac{2}{g+1} (y^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} (dy)^2.$$

Следовательно, и в точках, в которых $y = 0$, дифференциал η регулярен.

Поскольку регулярный квадратичный дифференциал имеет на поверхности рода g с учётом кратности $4g - 4$ нуля, а мы уже указали 4 нуля дифференциала η кратности $g - 1$, других нулей у него нет. Поэтому верны выписанные дивизориальные соотношения. Утверждение доказано. \square

Задание поверхности уравнением $y^2 = f(x)$ определяет двулистное накрытие римановой сферы $X_p \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}): (x, y) \mapsto x$, разветвлённое в корнях многочлена f (ветвления на бесконечности нет, так как f имеет чётную степень. Это позволяет отождествить поверхность с двумя «листами» комплексной плоскости, склеенными так, что при однократном обходе любой из точек ветвления мы попадаем на другой лист.

Рассмотрим на x -плоскости лучи

$$L_k := \left\{ x \in \mathbb{C} \mid x = te^{\frac{2i\pi k}{g+1}}, t \in \left[{}^{g+1}\sqrt{\sqrt{p^2 + 1} + p}; \infty \right) \right\}$$

и отрезки

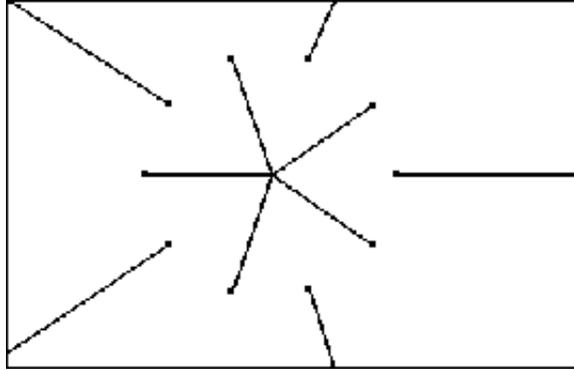
$$M_k := \left[0; e^{\frac{i\pi(2k+1)}{g+1}} {}^{g+1}\sqrt{\sqrt{p^2 + 1} - p} \right]$$

(рис. 1). Наша цель — доказать, что эти множества являются проекциями сепаратрис дифференциала на x -плоскость.

Проекции сепаратрис нашего квадратичного дифференциала на x -плоскость суть множества точек $P \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих уравнению

$$\operatorname{Im} \int_A^P \sqrt{\frac{x^{g-1}}{x^{2g+2} - 2px^{g+1} - 1}} dx = 0,$$

где A — один из нулей дифференциала.

Рис. 1. Граф сепаратрис в карте с локальной координатой x

Утверждение 3.4. Для любого $k \in \{1, \dots, g+1\}$ и любых $x_1, x_2 \in L_k$ или $x_1, x_2 \in M_k$ интегралы

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{x^{g-1}}{x^{2g+2} - 2px^{g+1} - 1}} dx$$

вещественны (независимо от выбора ветви корня). Иначе говоря, вещественны интегралы $\int \sqrt{\eta}$ по любому дугам, проектирующимся в компоненты объединения отрезков M_k и $L_k \cup \infty$.

Доказательство. Покажем, что на нужных интервалах эти интегралы в соответствующих координатах представляются интегралами от вещественнозначных функций.

Действительно, точки на отрезках M_k имеют вид

$$x = te^{i\alpha}, \quad \text{где } \alpha = \frac{\pi(2k+1)}{g+1}, \quad t \in \left[0; \sqrt[g+1]{\sqrt{p^2+1}-p}\right],$$

а на лучах L_k — вид

$$x = te^{i\alpha}, \quad \text{где } \alpha = \frac{2\pi k}{g+1}, \quad t \in \left[\sqrt[g+1]{\sqrt{p^2+1}+p}, \infty\right).$$

Поэтому в первом случае в очевидных обозначениях

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{x^{g-1}}{x^{2g+2} - 2px^{g+1} - 1}} dx &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{t^{g-1} e^{(g-1)i\alpha}} e^{i\alpha} dt}{\sqrt{t^{2g+2} e^{(2g+2)i\alpha} - 2pt^{g+1} e^{(g+1)i\alpha} - 1}} = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{g+1}{2}i\alpha} \frac{\sqrt{t^{g-1}} dt}{\sqrt{t^{2g+2} e^{(2g+2)i\alpha} - 2pt^{g+1} e^{(g+1)i\alpha} - 1}} \stackrel{\frac{g+1}{2}i\alpha = \pi(k+\frac{1}{2})i}{=} \end{aligned}$$

$$= (-1)^k i \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{t^{g-1}} dt}{\sqrt{t^{2g+2} + 2pt^{g+1} - 1}} = (-1)^{k+1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{t^{g-1}} dt}{\sqrt{-t^{2g+2} - 2pt^{g+1} + 1}}.$$

Из того, что квадратный трёхчлен $-u^2 - 2pu + 1$ имеет корни $-p \pm \sqrt{p^2 + 1}$, следует, что при $u \in [0, -p + \sqrt{p^2 + 1}]$ этот квадратный трёхчлен принимает положительные значения. Так как переменная интегрирования t лежит на отрезке $[t_1, t_2]$, где $t_1, t_2 \in [0; {}^{g+1}\sqrt{-p + \sqrt{p^2 + 1}}]$, число $1 - 2pt^{g+1} - t^{2g+2}$ вещественно и положительно. Поэтому функция под знаком интеграла в пределах интегрирования вещественна.

Во втором случае (на луче L_k) интеграл принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{i\pi k} \frac{\sqrt{t^{g-1}} dt}{\sqrt{t^{2g+2} - 2pt^{g+1} - 1}} = (-1)^k \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{t^{g-1}} dt}{\sqrt{t^{2g+2} - 2pt^{g+1} - 1}}.$$

Квадратный трёхчлен $u^2 - 2pu - 1$ имеет корни $p \pm \sqrt{p^2 + 1}$ и при $u \in [p + \sqrt{p^2 + 1}, \infty)$ принимает положительные значения. Так как переменная интегрирования t лежит на отрезке $[t_1, t_2]$, где $t_1, t_2 \in [{}^{g+1}\sqrt{p + \sqrt{p^2 + 1}}, \infty]$, число $t^{2g+2} - 2pt^{g+1} - 1$ вещественно и положительно. Поэтому функция под знаком интеграла в пределах интегрирования вещественна. Утверждение доказано. \square

Следствие 3.5. Кривые $\{P \in X \mid x(P) \in L_k\} \cup \{C_{\pm}\}$ и $\{P \in X \mid x(P) \in M_k\}$, где $k = 1, \dots, g + 1$, являются сепаратрисами дифференциала η .

Доказательство. Это утверждение очевидным образом вытекает из определения сепаратрис и предыдущего утверждения. \square

Поскольку все нули дифференциала η суть A_{\pm} , C_{\pm} и эти нули имеют кратности $g - 1$, предъявленная система кривых подпадает под условие леммы. Следовательно, дифференциал η штрелелев. \square

4. Параметры цилиндров

Ограничимся случаем чётного рода.

Утверждение 4.1. Дополнение в поверхности X_p чётного рода g к объединению всех сепаратрис состоит из одного прямого цилиндра в метрике, определённой штрелелевым дифференциалом η . Высота и основание этого цилиндра равны соответственно

$$h = \frac{1}{g+1} \int_0^{\sqrt{p^2+1+p}} \sqrt{\frac{1}{x(1+2px-x^2)}} dx, \quad l = 2 \int_{\sqrt{p^2+1+p}}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{x(x^2-2px-1)}} dx.$$

Доказательство. Наша поверхность является римановой поверхностью корня $y = \sqrt{f(x)}$, её естественная реализация — склейка двух копий римановой сферы $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, разрезанных по описанным выше проекциям сепаратрис.

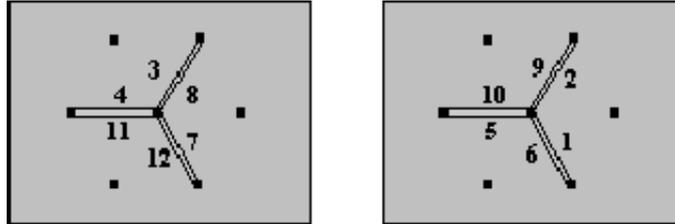


Рис. 2. Граф сепаратрис для рода 2

Пронумеруем отрезки сепаратрис, выходящих из нулей A_{\pm} , в порядке их следования при разрезании. Горизонтальный слой дифференциала η , проходящий через точку $x = 1 + \delta$, $y = \varepsilon$, при малых вещественных параметрах $\varepsilon, \delta > 0$ будет находиться в малой окрестности пронумерованных сепаратрис в порядке возрастания номеров. Эти горизонтальные слои при $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$ будут стремиться к одному из оснований цилиндра. Второе основание будут составлять разрезы по сепаратрисам, соединяющим нули C_{\pm} .

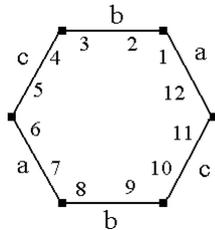


Рис. 3. Компонента связности графа сепаратрис

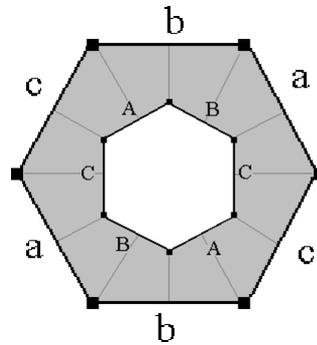


Рис. 4. Цилиндры для рода 2

Высоту этого цилиндра будет составлять вертикальное слоение дифференциала; это понятие определяется так же, как горизонтальное, с заменой Im на Re . Кривая на поверхности, проектирующаяся в отрезок $N := [0; {}^{g+1}\sqrt{\sqrt{p^2 + 1} + p}]$, является вертикальным слоем дифференциала η . Действительно, для $x_1, x_2 \in N$ имеем

$$\text{Im} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{-\eta} = \text{Im} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{x^{g-1}}{1 + 2px^{g+1} - x^{2g+2}}} dx = 0,$$

так как на N подынтегральное выражение вещественно. Поскольку указанная кривая (прообраз отрезка N) соединяет основания цилиндра, в силу ортогональности горизонтальных и вертикальных слоёв она является его высотой.

Высота h получившегося цилиндра равна

$$h = \int_0^{g+1\sqrt{p^2+1+p}} \sqrt{\frac{x^{g-1}}{1+2px^{g+1}-x^{2g+2}}} dx,$$

поскольку подкоренное выражения принимает на рассматриваемом промежутке лишь положительные вещественные значения. Аналогично для основания:

$$\begin{aligned} l &= \sum_{k=1}^{g+1} \int_{L_k} \sqrt{\eta} = \sum_{k=1}^{g+1} \int_{L_k} \sqrt{\frac{x^{g-1}}{x^{2g+2}-2px^{g+1}-1}} dx = \\ &= (g+1) \int_{g+1\sqrt{q+p}}^{\infty} \sqrt{\frac{x^{g-1}}{x^{2g+2}-2px^{g+1}-1}} dx. \end{aligned}$$

Утверждение доказано. \square

5. Заключительные замечания

1. Интегралы $\int \sqrt{\eta}$ вдоль сепаратрис выглядят как несколько неклассические объекты. Однако они превращаются в обычные абелевы интегралы первого рода при переходе к *римановой поверхности корня из квадратичного дифференциала*, введённой в [6] как подмножество кокасательного расслоения T^*X_p , определённое соотношением $\{\omega \mid \omega^2 = \eta\}$. В данном случае эта риманова поверхность, которую мы обозначим $X_p[\sqrt{\eta}]$, может быть задана уравнением

$$v^2 = u^{4g+4} - 2pu^{2g+2} - 1,$$

а проекция $\pi: X_p[\sqrt{\eta}] \rightarrow X_p$ определяется соотношениями $\pi^*x = u^2$, $\pi^*y = v$; при этом $\pi^*\eta = (2u^g \frac{du}{v})^2$.

2. Замена $\lambda = x^g$ сводит приведённые выше значения высоты и длины цилиндра к периодам эллиптической кривой, определяемой уравнением

$$\mu^2 = \lambda(\lambda^2 - 2p\lambda - 1).$$

Замена $z := u^{g+1}$ определяет накрытие кривой $X_p[\sqrt{\eta}]$ другой эллиптической кривой, определяемой уравнением

$$v^2 = z^4 - 2pz^2 - 1.$$

Соотношения $\lambda = z^2$, $\mu = vz$ определяют 2-изогению этих двух эллиптических кривых.

Литература

- [1] Амбург Н. Я. Пример регулярного штробелева дифференциала // Успехи мат. наук. — 2002. — Т. 57, № 5. — С. 149.
- [2] Артамкин И. В., Левицкая Ю. А., Шабат Г. Б. Примеры семейств штробелевых дифференциалов на гиперэллиптических кривых. — В печати.
- [3] Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. — М.: Мир, 1982.
- [4] Шабат Г. Б. Комплексный анализ и детские рисунки // Комплексный анализ в современной математике. — М.: Мир, 2001. — С. 253–264.
- [5] Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. — М.: Наука, 1972.
- [6] Douady A., Hubbard J. On the density of Strebel differentials // Invent. Math. — 1975. — Vol. 30. — P. 175–179.
- [7] Strebel K. Quadratic Differentials. — Berlin: Springer, 1984.