

Геометрия плоских деревьев*

Ю. Ю. КОЧЕТКОВ

Московский институт электроники и математики

УДК 511.6+515.162

Ключевые слова: плоские деревья, истинная форма.

Аннотация

Рассматривается «истинная форма» плоских деревьев, т. е. геометрия множеств $p^{-1}[0, 1]$, где p — обобщённый многочлен Чебышёва. Изучены и систематизированы эмпирические данные.

Abstract

Yu. Yu. Kochetkov, Geometry of plane trees, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 6, pp. 149—158.

“True form” of plane trees, i.e., the geometry of sets $p^{-1}[0, 1]$, where p is a Chebyshev polynomial, is considered. Empiric data about true form are studied and systematized.

1. Введение

Многочлен $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ называется обобщённым многочленом Чебышёва, если он имеет ровно два критических значения — 0 и 1 (допуская неточность, в дальнейшем обобщённые многочлены Чебышёва мы будем называть просто многочленами Чебышёва). Если $p(z)$ — многочлен Чебышёва, то множество $p^{-1}[0, 1]$ является плоским связным деревом [4]. Вершины дерева — это прообразы точек 0 и 1, а валентности вершин — кратности соответствующих критических точек (вершина v валентности 1 — это не критическая точка многочлена $p(z)$, такая что $p(v) \in \{0, 1\}$). Обратно, для любого плоского связного дерева T найдётся многочлен Чебышёва $p(z)$, определённый с точностью до линейной замены переменной, такой что дерево $p^{-1}[0, 1]$ изотопно T . Из этого следует, что каждое плоское связное дерево имеет «истинную форму» — форму дерева $p^{-1}[0, 1]$ для соответствующего многочлена Чебышёва; если деревья $p^{-1}[0, 1]$ и $q^{-1}[0, 1]$ изотопны, то одно может быть получено из другого сдвигом, поворотом и растяжением.

Кроме очевидного факта, что рёбра, выходящие из вершины валентности k (дерева в истинной форме), делят полный угол на k равных частей, об истинной форме деревьев известно мало. В каталоге [3] представлена (построенная

* Работа была поддержана РФФИ, проект № 04-01-00647.

на компьютере) истинная форма всех деревьев с числом рёбер не больше 8. В [2] доказаны некоторые утверждения об истинной форме деревьев диаметра 4 и центральной валентности 4. В [1] изучена истинная форма одного класса деревьев, называемых «пропеллерами». Техника работ [1, 2] вряд ли может быть применена в более сложных случаях.

В данной работе рассматриваются любопытные примеры и формулируются эмпирические правила для описания истинной формы деревьев.

2. Геометрия рёбер плоского дерева

Рассмотрим дерево $T = p^{-1}[0, 1]$, где $p(z)$ — многочлен Чебышёва. Если e — ребро дерева T , соединяющее вершины v_1 и v_2 , то e — гладкая кривая, причём e лежит на особой алгебраической кривой $\text{Im } p(z) = 0$. Нас будет интересовать характер отклонения ребра (кривой) e от отрезка $[v_1, v_2]$.

Пример. Пусть $T = p^{-1}[0, 1]$ (рис. 1), где $p(z) = 4z^3 - 3z^4$ (особыми точками p являются точки 0 и 1, причём $p(0) = 0$, $p(1) = 1$).

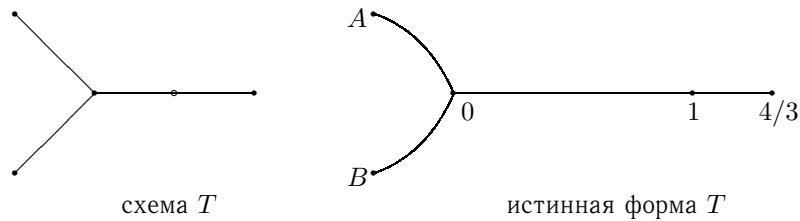


Рис. 1

Здесь $A, B = (-1 \pm \sqrt{2}i)/3$. Ребро OA выпукло вверх, ребро OB — вниз. Так как $T \subset \{z: \text{Im } p(z) = 0\}$, то анализ геометрии дерева сводится к изучению алгебраической кривой $\text{Im}(4z^3 - 3z^4) = 0$, т. е. $3x^2 - y^2 - 3x^3 + 3xy^2 = 0$.

Пример показывает, что изучение выпуклости рёбер конкретного дерева, многочлен Чебышёва которого известен, — это обычная задача на исследование неявной функции. Значительно более трудной является аналогичная задача для классов деревьев или для деревьев, многочлены Чебышёва которых неизвестны.

Пример. Рассмотрим деревья следующего вида (рис. 2).

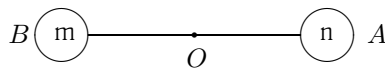


Рис. 2

Здесь A — вершина валентности n , B — вершина валентности m , O — вершина валентности 2, а остальные вершины имеют валентность 1. Многочлен Чебышёва такого дерева есть $p(z) = (1-z)^n(1+nz/m)^m$. Вершина A находится в точке 1, вершина B — в точке $-m/n$, а вершина O — в начале координат.

Если $f(z) = F(x, y) + iG(x, y)$ — голоморфная функция, то точки перегиба кривой $G(x, y) = 0$ принадлежат множеству

$$\{z = x + iy: G''_{xx}(G'_y)^2 - 2G''_{xy}G'_xG'_y + G''_{yy}(G'_x)^2 = 0\} = \{z: \text{Im}(1/f')' = 0\}.$$

Для нашего дерева

$$p'(z) = p(z) \left(-\frac{n}{1-z} + \frac{mn}{m+nz} \right) = p(z) \frac{n(m+n)z}{(z-1)(m+nz)}$$

и

$$\left(\frac{1}{p'} \right)' = \frac{1}{n(m+n)} \frac{n(1-m-n)z^2 + m}{z^2 p(z)} = \frac{1-m-n}{(m+n)p(z)} + \frac{m}{n(m+n)z^2 p(z)}.$$

Так как $p(z) \in \{0, 1\}$, если z лежит на ребре, то

$$\{z: \text{Im}(1/p')' = 0\} = \{z: \text{Im}(1/z^2) = 0\},$$

т. е. z либо вещественное число, либо чисто мнимое. Если z — чисто мнимое число, то $|p(z)| > 1$, следовательно, z не может лежать на ребре дерева. А если z вещественно, то всё ребро лежит на оси OX . Другими словами, у деревьев такого типа на рёбрах нет точек перегиба.

При $m = n = 4$ наше дерево выглядит так, как изображено на рис. 3.

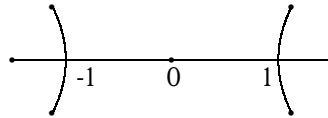


Рис. 3

Вершины валентности 1 расположены в точках $\pm\sqrt{2}$ и $\pm 1,1 \pm 0,45$.

Пример. Рассмотрим дерево T на рис. 4.

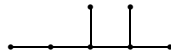


Рис. 4

Его многочлен Чебышёва есть

$$p(z) = (1 + (1 + 2i)z)(1 + (1 - i)z)^2(1 - z)^3.$$

Несложные вычисления позволяют найти истинную форму T (рис. 5). Здесь $A = (-1 + 2i)/5$, $B = -(1 + i)/2$. Отклонение ребра, соединяющего точки 0 и 1, от оси OX приблизительно равно 0,02.

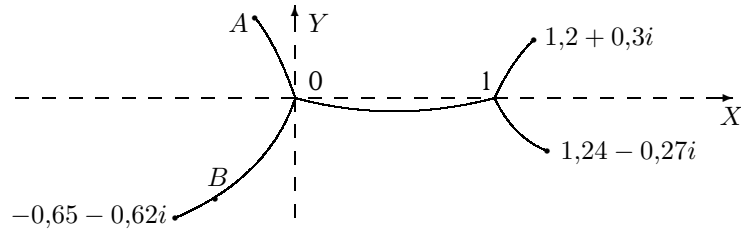


Рис. 5

Анализ примеров позволяет сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза (первый вариант). Пусть v — вершина дерева T валентности не меньше 3. Пусть e_1, e_2, \dots — рёбра, выходящие из v , перечисленные в порядке обхода против часовой стрелки и соединяющие v с вершинами v_1, v_2, \dots . Тогда если валентность вершины v_1 больше валентности вершины v_3 , то ребро e_2 выпукло в сторону вершины v_1 , а если валентность вершины v_1 меньше валентности вершины v_3 , то ребро e_2 выпукло в сторону v_3 .

Пример. На рис. 6 слева изображена схема дерева, а справа — эскиз истинной формы.

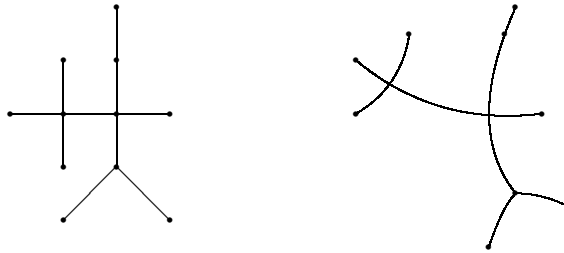


Рис. 6

Следующие примеры показывают, что гипотеза нуждается в уточнении.

Пример. Рассмотрим дерево T на рис. 7.

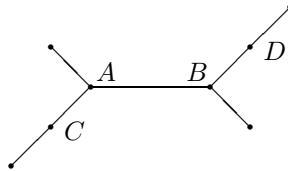


Рис. 7

Гипотеза говорит, что ребро AB должно быть выпукло в сторону вершины C (если мы рассматриваем его как выходящее из A) и в сторону вершины D

(если мы рассматриваем его как выходящее из B). Это подсказывает, что на этом ребре есть перегиб. Это и в самом деле так: истинная форма дерева T изображена на рис. 8. Отклонение ребра AB от отрезка $[AB]$ порядка 1 %.

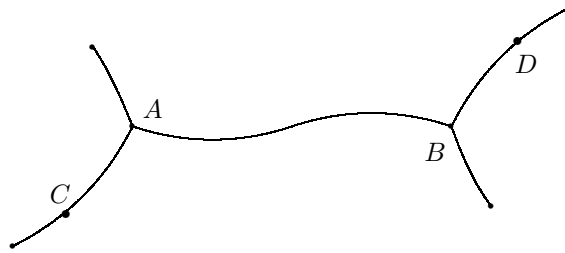


Рис. 8

Пример. Рассмотрим дерево T на рис. 9.

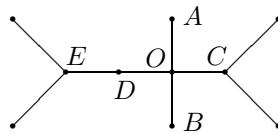


Рис. 9

Так как вершина C имеет валентность 3, а вершина D — 2, то рёбра OA и OB должны быть выпуклы в сторону вершины C . Но в действительности картина иная (рис. 10).

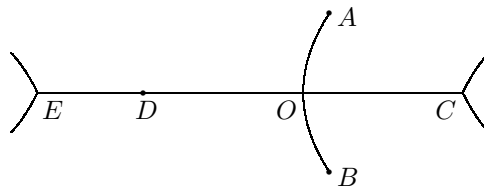


Рис. 10

Здесь вершина O находится в начале координат, вершина E — в точке -1 , $C \approx 0,6$, $D \approx -0,6$, $A, B \approx 0,01 \pm 0,3i$.

Этот пример показывает, что в формулировке гипотезы должна учитываться не валентность вершин v_1 и v_3 , а «массивность» поддеревьев T_1 и T_3 , где T_1 — это связная компонента графа $T \setminus \{e_1\}$, содержащая вершину v_1 , а T_3 — связная компонента графа $T \setminus \{e_3\}$, содержащая вершину v_3 . На справедливость такого подхода указывают два следующих примера.

Пример. На рис. 11 показана схема дерева слева и эскиз его истинной формы справа.

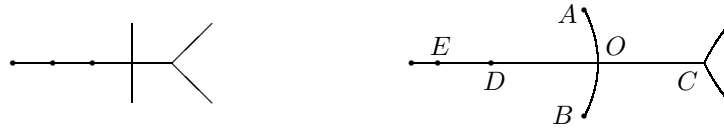


Рис. 11

Здесь вершина O находится в начале координат, $C \approx 0,8$, $D \approx -0,7$, $E = -1$, $A, B \approx -0,003 \pm 0,46 i$.

Пример. На рис. 12 показана схема дерева слева и эскиз его истинной формы справа.

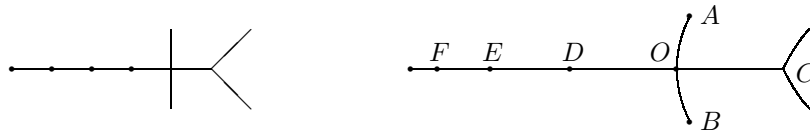


Рис. 12

Здесь вершина O находится в начале координат, $F \approx -1,3$, $E = -1$, $D \approx -0,66$, $C \approx 0,66$, $A, B \approx 0,01 \pm 0,4 i$.

Гипотеза (второй вариант). Пусть v — вершина дерева T валентности не меньше 3. Пусть e_1, e_2, \dots — рёбра, выходящие из v , перечисленные в порядке обхода против часовой стрелки и соединяющие v с вершинами v_1, v_2, \dots . Поставим вершине v_i в соответствие поддерево T_i — компоненту связности графа $T \setminus \{e_i\}$, содержащую вершину v_i . Тогда, если (интуитивно понимаемая) «массивность» поддерева T_1 больше «массивности» поддерева T_3 , то ребро e_2 выпукло в сторону вершины v_1 (в некоторой окрестности вершины v), а если «массивность» поддерева T_3 больше «массивности» поддерева T_1 , то ребро e_2 выпукло в сторону вершины v_3 (в некоторой окрестности вершины v).

Замечание 1. Окрестность, о которой идёт речь в гипотезе — это не «малая окрестность».

Замечание 2. Если T_1 и T_2 — симметричные деревья, то их «массивность» можно сравнить следующим образом. Рассмотрим дерево, изображённое на рис. 13.

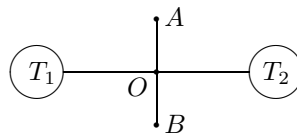


Рис. 13

Найдём его многочлен Чебышёва и вычислим положение вершин A , B и O . Если рёбра AO и BO отклонены в сторону дерева T_2 , то дерево T_1 массивнее (и наоборот).

Второй вариант также требует уточнений. Это показывают два следующих примера.

Пример. Рассмотрим дерево, изображённое на рис. 14.

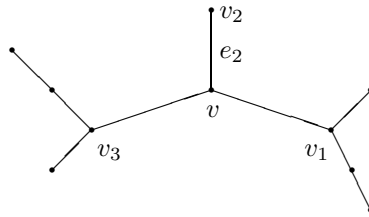


Рис. 14

Здесь массивность поддеревьев T_1 и T_3 одинакова. Но вычисления показывают, что ребро e_2 выпукло в сторону вершины v_3 (что интуитивно кажется очевидным).

Пример. В этом более сложном примере рассмотрим дерево на рис. 15. Так как (однорёберное) поддерево T_3 массивнее (нульрёберного) поддерева T_1 , то ребро e_2 выпукло в сторону вершины v_3 . Оказывается, вершина v_5 валентности 3 влияет не только на соседние рёбра e_1 и e_4 , но и на ребро e_2 , которое имеет перегиб в точке w (рис. 16). Отношение расстояния от v до w к расстоянию от v до v_2 порядка 10^{-3} , т. е. влияние вершины v_5 на ребро e_2 ощутимо лишь в *малой окрестности* вершины v . Следует отметить, что такой эффект является достаточно общим.

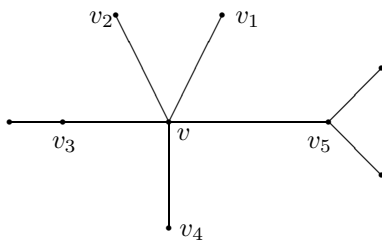


Рис. 15

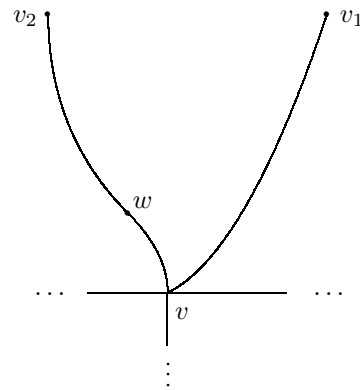


Рис. 16

3. Отклонение рёбер и предельное поведение

Пусть ребро e соединяет вершины v и u дерева T . Насколько ребро e может отличаться от отрезка $[vu]$? Прямые вычисления для деревьев с малым числом рёбер показывают, что это отклонение не превышает нескольких процентов, т. е. рёбра дерева в истинной форме — это почти отрезки прямых.

Пример. На рис. 17 слева изображена схема дерева, а справа — эскиз его истинной формы.

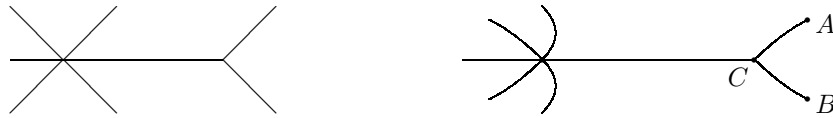


Рис. 17

Здесь вершина валентности 6 находится в начале координат, вершина C — в точке 1 , $A, B \approx 1,14 \pm 0,16i$. Величина отклонения ребра AC от отрезка $[AC]$ приблизительно равна $0,009$. Относительное отклонение составляет приблизительно $4,2\%$. Ребро AC выходит из вершины C под углом 60° к оси OX , а отрезок $[AC]$ образует с осью OX угол в приблизительно 45° . Максимальное отклонение достигается в малой окрестности вершины C .

Угол между ребром e , выходящим из вершины v , и отрезком $[vu]$ может быть довольно большим. Так, в предыдущем примере он примерно равен 15° . Для дерева на рис. 18, где кружок обозначает вершину валентности n (дерево имеет вершину валентности n , вершину валентности 4, а остальные вершины имеют валентность 1), этот угол приблизительно равен 21° . При $n = 12$ отклонение ребра DA от отрезка $[DA]$ составляет приблизительно 7% .

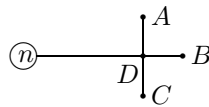


Рис. 18

Вопрос. Можно ли придумать конструкцию, дающую заметно большее отклонение и угловое отклонение?

Рассмотрим три дерева на рис. 19 (кружок обозначает вершину валентности n). При большом n угол между отрезком $[CA]$ и осью OX приблизительно равен 45° для левого дерева, 47° для среднего дерева и 50° для правого дерева.

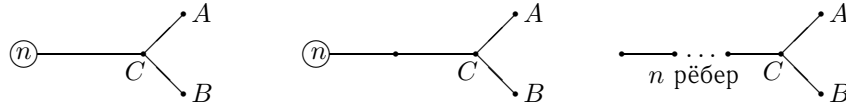


Рис. 19

Вопрос. Верно ли, что существует такое N , что для любого n у дерева вида

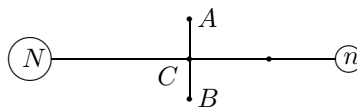


Рис. 20

рёбра CA и CB отклонены вправо?

Тот же вопрос можно задать и о дереве, изображённом на рис. 21.

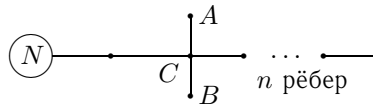


Рис. 21

Форма симметричных n -рёберных деревьев (рис. 22) при $n \rightarrow \infty$ была изучена в [1]. Это, конечно, очень простые деревья.

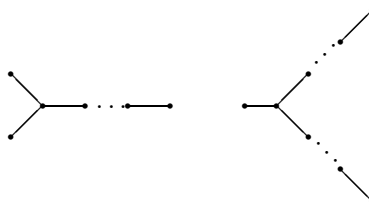


Рис. 22

Гораздо более интересен вопрос о форме дерева, изображённого на рис. 23, при числе рёбер, стремящемся к бесконечности.

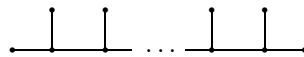


Рис. 23

Литература

- [1] Дрёмов В., Кочетков Ю. Ю. Геометрия деревьев и абелевы интегралы // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. — Ярославль, 2003. — С. 61–74.
- [2] Кочетков Ю. Ю. О геометрии одного класса плоских деревьев // Функц. анализ и его прил. — 1999. — Т. 33, № 4. — С. 78–81.
- [3] Bétréma J., Péré D., Zvonkin A. Plane Trees and Their Shabat Polynomials. Catalog. — Technical Report LaBRI No. 92-75. — Bordeaux, 1992.
- [4] Shabat G. B., Zvonkin A. K. Plane trees and algebraic numbers // Jerusalem Combinatorics '93 / H. Barcelo, G. Kalai, eds. — Amer. Math. Soc., 1994. — (Contemp. Math.; Vol. 178). — P. 233–275.