Девятирёберные плоские деревья. Каталог

Ю. Ю. КОЧЕТКОВ
Московский институт электроники и математики

УДК 511.6+519.17

Ключевые слова: плоские деревья, поле определения.

Аннотация

Для всех попарно неизотопных плоских деревьев с девятью рёбрами найдены их поля определения и вычислены обобщённые многочлены Чебышёва.

Abstract

Yu. Yu. Kochetkov, Plane trees with nine edges. Catalog, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 6, pp. 159—195.

Generalized Chebyshev polynomials and definition fields are computed for all pairwise nonisotopic plane trees with nine edges.

1. Введение

Многочлены Чебышёва и поля определения плоских деревьев с числом рёбер не больше восьми описаны в каталоге [1]. Здесь аналогичная работа будет проделана для плоских деревьев с девятью рёбрами. Полное исследование деревьев с десятью рёбрами — это трудная задача, и вряд ли кто-нибудь возьмётся за её решение в ближайшее время.

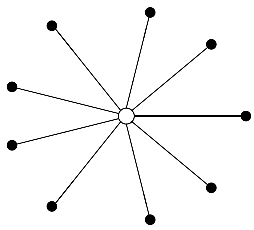
Мы будем считать, что плоское дерево задано вместе со своей бинарной структурой, т. е. с раскраской вершин в два цвета: белый и чёрный. Сумма валентностей белых (и чёрных) вершин равна 9, т. е. список валентностей белых (и чёрных) вершин является разбиением числа 9. Не каждая пара разбиений числа 9 может быть реализована как пара разбиений, заданных деревом с девятью рёбрами. Так как переход к противоположной раскраске не меняет поля определения (и многочлена Чебышёва), мы будем считать, что разбиение, заданное белыми вершинами, лексикографически не меньше разбиения, заданного чёрными вершинами. Совокупность деревьев с одними и теми же наборами как белых, так и чёрных валентностей мы будем называть *типом*. Тип мы будем описывать формулой вида $\langle i_1, \ldots, i_k \mid j_1, \ldots, j_l \rangle$, где $i_1, \ldots, i_k$ $(j_1, \ldots, j_l)$ — разбиение числа 9, заданное валентностями белых (соответственно чёрных) вершин, причём $i_1 \geqslant \ldots \geqslant i_k$ и $j_1 \geqslant \ldots \geqslant j_l$. Всего реализуется 52 пары разбиений, т. е. совокупность плоских деревьев с девятью рёбрами является объединением 52 типов.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 6, с. 159—195.

Следует упомянуть, что рисунки — это схемы деревьев, а не их «истинные формы».

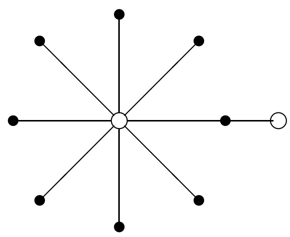
2. Каталог

1: $\langle 9 \mid 1,1,1,1,1,1,1,1,1\rangle$. Этот тип содержит только одно дерево (будем называть его «ёжик»):



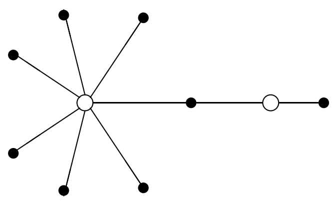
Многочлен $p(z)=z^9$ является многочленом Чебышёва этого дерева.

2: $\langle 8,1 \mid 2,1,1,1,1,1,1,1\rangle$. Этот тип содержит только одно дерево:



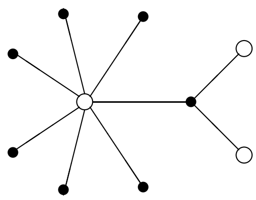
Пусть белая вершина валентности 8 находится в точке 0, а белая вершина валентности 1 — в точке 1. Тогда многочлен $p(z)=z^8(z-1)$ является многочленом Чебышёва этого дерева. При этом чёрная вершина валентности 2 находится в точке $z=8/9$.

3: $\langle 7,2 \mid 2,1,1,1,1,1,1,1\rangle$. Этот тип содержит только одно дерево:



Пусть белая вершина валентности 7 находится в точке 0, а белая вершина валентности 2 — в точке 1. Тогда многочлен $p(z) = z^7(z-1)^2$ является многочленом Чебышёва этого дерева. При этом чёрная вершина валентности 2 находится в точке $z = 7/9$.

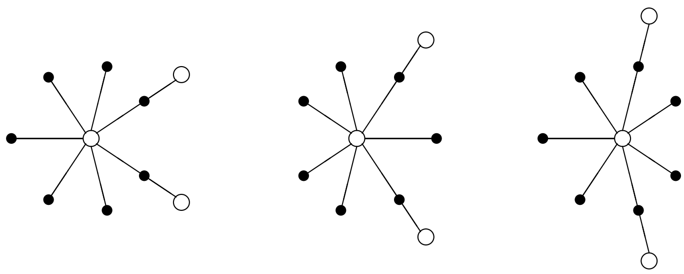
4: $\langle 7,1,1 \mid 3,1,1,1,1,1,1\rangle$. Этот тип содержит только одно дерево:



Пусть белая вершина валентности 7 находится в точке 0, а чёрная вершина валентности 3 — в точке 1. Тогда многочлен Чебышёва имеет вид

$$p(z) = \int z^6(z-1)^2\,dz = \frac{28z^9 - 63z^8 + 36z^7}{252}.$$

5: $\langle 7,1,1|2,2,1,1,1,1,1,1\rangle$. Этот тип содержит три дерева:



Пусть белая вершина валентности 7 находится в точке 0, а чёрные вершины валентности 2 находятся в точках—корнях многочлена z^2-2z+a (a вещественно). Тогда многочлен Чебышёва имеет вид

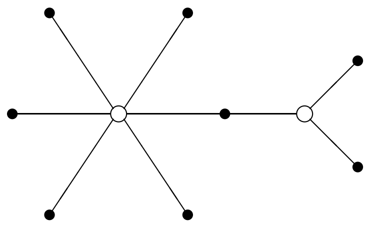
$$p(z) = \int z^6(z^2-2z+a)\,dz = \frac{28z^9 - 63z^8 + 36az^7}{252}.$$

Значения $p(z)$ в чёрных вершинах валентности 2 совпадают, следовательно, остаток от деления $p(z)$ на многочлен z^2-2z+a имеет степень 0 по z. Это даёт нам условие на a:

$$a^3 - 30a^2 + 120a - 112 = 0.$$

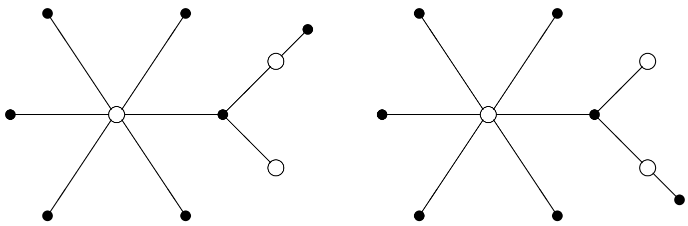
Так как этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, три дерева рассматриваемого типа образуют одну орбиту Галуа.

6: $\langle \mathbf{6, 3 \mid 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1} \rangle$. Этот тип содержит только одно дерево:



Пусть белая вершина валентности 6 находится в точке 0, а белая вершина валентности 3 — в точке 1. Тогда многочлен $p(z) = z^6(z-1)^3$ является многочленом Чебышёва этого дерева. При этом чёрная вершина валентности 2 находится в точке $2/3$.

7: $\langle \mathbf{6, 2, 1 \mid 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1} \rangle$. Этот тип содержит два дерева, зеркально симметричные друг другу:



Пусть белая вершина валентности 6 находится в точке 0, чёрная вершина валентности 3 — в точке 1, а белая вершина валентности 2 — в точке a. Тогда многочлен Чебышёва имеет вид

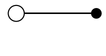
$$p(z) = \int z^5(z-1)^2(z-a)\,dz = \frac{z^6(56z^3 - 63az^2 - 126z^2 + 144az + 72z - 84a)}{504}.$$

Условие $p(0) = p(a)$ даёт нам уравнение на a:

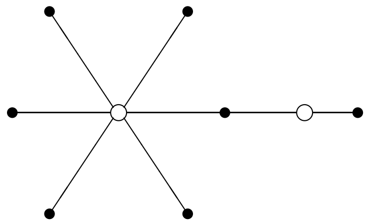
$$7a^2 - 18a + 12 = 0.$$

Так как многочлен $7a^2 - 18a + 12$ неприводим над $\mathbb{Q}$, два дерева типа образуют одну орбиту Галуа.

8: $\langle \mathbf{6, 2, 1 \mid 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1} \rangle$. Этот тип содержит шесть деревьев, которые получаются присоединением чёрной вершины-«хвостика»

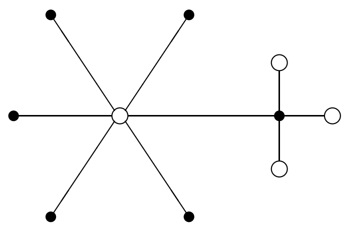


к одной из шести одновалентных чёрных вершин восьмирёберного дерева



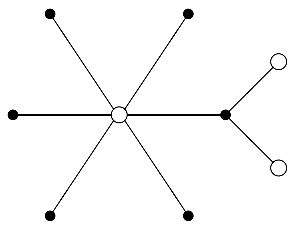
Пусть белая вершина валентности 6 находится в точке 0, белая вершина валентности 2 — в точке 1, а белая вершина валентности 1 — в точке a. Тогда многочлен
$$p(z) = z^6(z-1)^2(z-a)$$
является многочленом Чебышёва дерева из нашего типа. Положим
$$q(z) = \frac{p'(z)}{z^5(z-1)} = 9z^2 - 7z - 8az + 6a.$$
Чёрные вершины валентности 2 находятся в корнях многочлена $q(z)$. Остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $q(z)$ имеет степень 0 по z. Это условие даёт нам уравнение на a:
$$(64a^2-104a+49)(8192a^6+1536^5a-3120a^4-5503a^3-5811a^2-4557a-2401)=0.$$
Первый множитель степени 2 — это дискриминант многочлена $9z^2-7z-8az+6a$, который не равен нулю по условию. Второй множитель степени 6 описывает деревья нашего типа. Так как этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, шесть деревьев рассматриваемого типа образуют одну орбиту Галуа. Группой Галуа этого многочлена степени 6 является симметрическая группа S_6.

9: $\langle \mathbf{6,1,1,1 \mid 4,1,1,1,1,1} \rangle$. Этот тип содержит только одно дерево:



Пусть белая вершина валентности 6 находится в точке 0, а чёрная вершина валентности 4 — в точке 1. Тогда многочлен Чебышёва этого дерева имеет вид
$$p(z) = \int z^5(z-1)^3\,dz = \frac{56z^9 - 189z^8 + 216z^7 - 84z^6}{504}.$$

10: $\langle \mathbf{6,1,1,1 \mid 3,2,1,1,1,1} \rangle$. Этот тип содержит пять деревьев, которые получаются присоединением «хвостика» к одной из пяти одновалентных чёрных вершин восьмирёберного дерева



Пусть белая вершина валентности 6 находится в точке 0, чёрная вершина валентности 3 — в точке 1, а чёрная вершина валентности 2 — в точке a. Тогда многочлен Чебышёва имеет вид

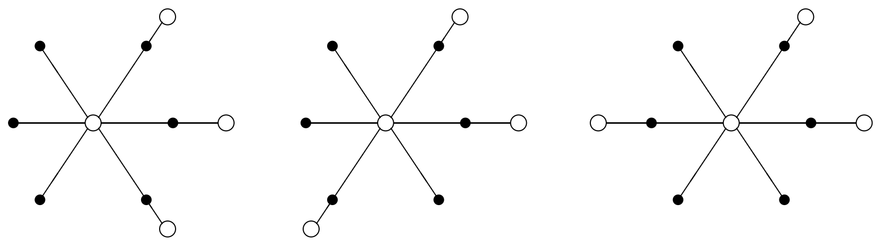
$$p(z) = \int z^5(z-1)^2(z-a)\,dz = \frac{z^6(53z^3 - 63az^2 - 126z^2 + 144az + 72z - 84a)}{504}.$$

Условие $p(1) = p(a)$ даёт нам уравнение на a:

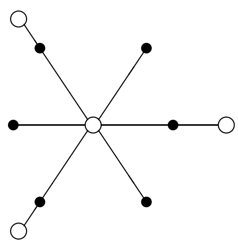
$$7a^5 + 10a^4 + 10a^3 + 8a^2 + 5a + 2 = 0.$$

Так как этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, деревья нашего типа образуют одну орбиту Галуа. Группа Галуа многочлена $7a^5 + 10a^4 + 10a^3 + 8a^2 + 5a + 2$ — это симметрическая группа S_5.

11: $\langle 6, 1, 1, 1 \mid 2, 2, 2, 1, 1, 1 \rangle$. Этот тип содержит четыре дерева, которые получаются присоединением трёх «хвостиков» к трём *разным* чёрным одновалентным вершинам шестирёберного «ёжика». Три из из этих деревьев таковы:



Четвёртое дерево $\mathbb{Z}_3$-симметрично:



Пусть белая вершина валентности 6 находится в точке 0, а чёрные вершины валентности 2 находятся в точках—корнях многочлена $z^3 + az^2 + az + b$ (такой выбор многочлена третьей степени не меняет поля определения дерева). Тогда многочлен Чебышёва имеет вид

$$p(z) = \int z^5(z^3 + az^2 + az + b)\,dz = \frac{z^6(56z^3 + 63az^2 + 82az + 84b)}{504}.$$

Остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен z^3+az^2+az+b должен иметь степень 0, что даёт нам два условия на a и b. Исключая b, получаем уравнение на a:

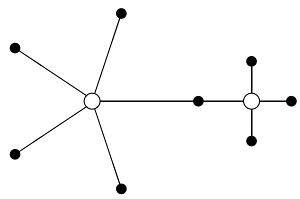
$$a(a-3)(49a^3-126a^2+123a-96)(49a^5-252a^4+138a^3+1740a^2-5031a+4800) = 0.$$

Корень $a = 0$ отвечает $\mathbb{Z}_3$-симметричному дереву. Если $a = 3$, то $b = 1$, и мы получаем дерево, у которого чёрные вершины валентности 2 совпали, т. е. дерево типа $\langle 6,1,1,1 \mid 4,1,1,1,1,1\rangle$. Корни многочлена пятой степени отвечают обращению в нуль дискриминанта многочлена $z^3 + az^2 + az + b$, т. е. случаю совпадения двух чёрных вершин валентности 2.

Корни многочлена третьей степени описывают три несимметричных дерева. Этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, т. е. эти три дерева образуют одну орбиту Галуа. Группа Галуа этого многочлена есть S_3.

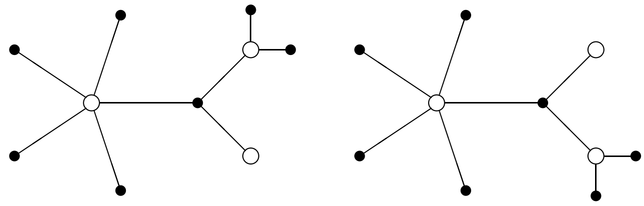
Таким образом, тип $\langle 6,1,1,1 \mid 2,2,2,1,1,1\rangle$ есть объединение двух орбит Галуа кардинальности 3 и 1.

12: $\boldsymbol{\langle 5,4 \mid 2,1,1,1,1,1,1,1\rangle}$. Этот тип содержит только одно дерево:



Пусть белая вершина валентности 5 находится в точке 0, а белая вершина валентности 4 — в точке 1. Тогда многочлен $p(z) = z^5(z-1)^4$ является многочленом Чебышёва этого дерева. При этом чёрная вершина валентности 2 находится в точке 5/9.

13: $\boldsymbol{\langle 5,3,1 \mid 3,1,1,1,1,1,1\rangle}$. Этот тип содержит два дерева:



Пусть белая вершина валентности 5 находится в точке 0, чёрная вершина валентности 3 — в точке 1, а белая вершина валентности 3 — в точке a. Тогда многочлен Чебышёва имеет вид

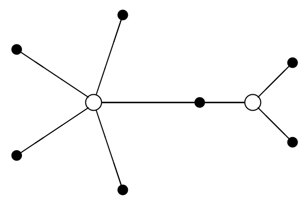
$$p(z) = \int z^4(z-1)^2(z-a)^2\,dz =$$
$$= \frac{z^5(140z^4-315az^3-315z^3+180a^2z^2+720az^2+180z^2-420a^2z-420az+252a^2)}{1260}.$$

Так как $p(a) = p(0) = 0$, мы получаем уравнение на a:

$$5a^2 - 15a + 15 = 0.$$

Так как этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, два дерева образуют одну орбиту Галуа.

14: $\langle \mathbf{5, 3, 1 \mid 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1} \rangle$. Этот тип содержит шесть деревьев, которые получаются присоединением «хвостика» к одной из шести чёрных одновалентных вершин восьмирёберного дерева



Пусть белая вершина валентности 5 находится в точке 0, белая вершина валентности 3 — в точке 1, а белая вершина валентности 0 — в точке a. Тогда многочлен

$$p(z) = z^5(z-1)^3(z-a)$$

является многочленом Чебышёва дерева из нашего типа. Положим

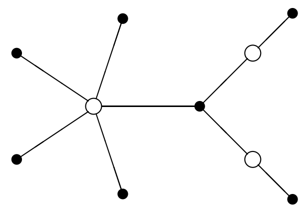
$$q(z) = \frac{p'(z)}{z^4(z-1)^2} = 9z^2 - 8az - 6z + 5a = 0.$$

Чёрные вершины валентности 2 — это корни многочлена $q(z)$. Так как остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $q(z)$ имеет степень 0 по z, мы получаем уравнение на a:

$$(16a^2 - 21a + 9) \times$$
$$\times (65536a^6 - 92160a^5 - 25056a^4 + 14229a^3 + 27459a^2 + 23328a + 11664) = 0.$$

Первый множитель — это дискриминант многочлена $9z^2 - 8az - 6z + 5a$ (он не равен нулю по условию). Второй множитель описывает деревья нашего типа. Так как он неприводим над $\mathbb{Q}$, шесть деревьев типа образуют одну орбиту Галуа. Порядок группы Галуа этого многочлен равен 72.

15: $\langle \mathbf{5, 2, 2 \mid 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1} \rangle$**.** Этот тип содержит только одно дерево:



Пусть белая вершина валентности 5 находится в точке 0, белые вершины валентности 2 — в точках—корнях многочлена $z^2 - 2z + a$, а чёрная вершина валентности 3 — в точке b. Тогда многочлен

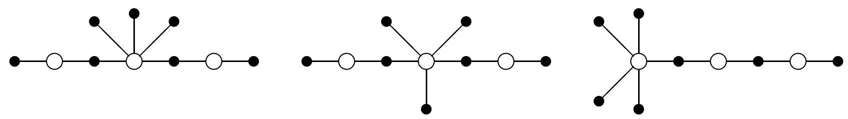
$$p(z) = z^5(z^2 - 2z + a)^2$$

является многочленом Чебышёва нашего дерева. Положим

$$q(z) = \frac{p'(z)}{z^4(z^2 - 2z + a)} = 9z^2 - 14z + 5a = 9(z - b)^2.$$

Многочлен $9z^2 - 14z + 5a$ является полным квадратом. Значит, $a = 49/45$ и $b = 7/9$.

16: $\langle \mathbf{5, 2, 2 \mid 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1} \rangle$**.** Этот тип содержит три дерева:



Многочлен Чебышёва мы ищем в том же виде, как и в предыдущем случае. Чёрные вершины валентности 2 находятся в точках—корнях многочлена

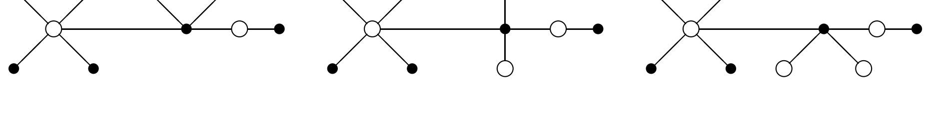
$$q(z) = 9z^2 - 14z + 5a.$$

Остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $q(z)$ имеет степень 0 по z, что даёт нам условие на a:

$$(45a - 49)(3645a^3 - 79704a^2 + 232848a - 153664) = 0.$$

При $a = 49/45$ дискриминант многочлена $9z^2 - 14z + 5a$ обращается в нуль. Таким образом, описание нашего типа даётся вторым множителем. Этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, следовательно, три дерева типа образуют одну орбиту Галуа. Группа Галуа этого многочлена есть S_3.

17: $\langle \mathbf{5, 2, 1, 1 \mid 4, 1, 1, 1, 1, 1} \rangle$**.** Этот тип содержит три дерева:



Пусть белая вершина валентности 5 находится в точке 0, чёрная вершина валентности 4 — в точке 1, а белая вершина валентности 2 — в точке a. Тогда многочлен Чебышёва имеет вид

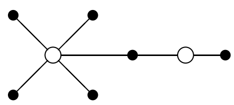
$$p(z) = \int z^4(z-1)^3(z-a)\,dz = \\ = \frac{z^5(280z^4 - 315az^3 - 945z^3 + 1080az^2 + 1080z^2 - 1260az - 420z + 504a)}{2520}.$$

Так как $p(a) = 0$, мы получаем уравнение на a:

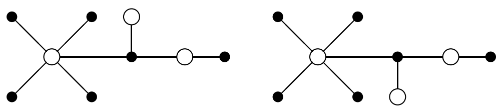
$$35a^3 - 135a^2 + 180a - 84 = 0.$$

Так как этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, то три дерева типа образуют одну орбиту Галуа. Группа Галуа этого многочлена есть S_3.

18: $\langle 5,2,1,1 \mid 3,2,1,1,1,1\rangle$. Этот тип содержит 15 деревьев. Пять из них получаются присоединением двух «хвостиков» к одной из пяти чёрных одновалентных вершин семирёберного дерева



а десять получаются присоединением «хвостика» к одной пяти чёрных одновалентных вершин одного из двух восьмирёберных деревьев ниже:



Пусть белая вершина валентности 5 находится в точке 0, белая вершина валентности 2 — в точке 1, а белые вершины валентности 1 — в точках—корнях многочлена $z^2 + az + b$. Тогда многочлен

$$p(z) = z^5(z-1)^2(z^2 + az + b)$$

является многочленом Чебышёва дерева из нашего типа. Положим

$$q(z) = \frac{p'(z)}{z^4(z-1)} = 9z^3 + 8az^2 - 7z^2 + 7bz - 6az - 5b.$$

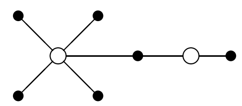
Чёрная вершина валентности 3 находится в корне кратности 2 многочлена $q(z)$, а чёрная вершина валентности 2 — в его простом корне. Мы получаем два условия: дискриминант многочлена $q(z)$ равен нулю; остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $q(z)$ имеет степень 0 по z. Это даёт нам три уравнения с неизвестными a и b. Исключение b даёт нам уравнение на a:

$$(1792a^3 + 8256a^2 + 14241a + 8722)(72185515343872a^{15} + 499405912276992a^{14} + \\ + 1263815400357888a^{13} + 1677828319870976a^{12} + 1714949887229952a^{11} + \\ + 834562982215680a^{10} + 208974226029568a^9 + 12488532233492736a^8 +$$

$$+\,507941576812430 55a^7 + 101810469945068224a^6 + 125237342125205340a^5 +$$
$$+\,101345460058446900a^4 + 55234390257625976a^3 + 19909143942028404a^2 +$$
$$+\,4234481550299364a + 391061964415948) = 0.$$

Первый множитель степени три отвечает случаю корня кратности 3 у многочлена $q(z)$. Второй множитель описывает деревья нашего типа. Так как этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, 15 деревьев типа образуют одну орбиту Галуа.

19: $\langle \mathbf{5, 2, 1, 1} \mid \mathbf{2, 2, 2, 1, 1, 1} \rangle$**.** Этот тип содержит десять деревьев, которые получаются присоединением двух «хвостиков» к двум *различным* чёрным одновалентным вершинам семирёберного дерева



Как и в предыдущем случае, многочлен

$$p(z) = z^5(z-1)^2(z^2+az+b)$$

является многочленом Чебышёва дерева из нашего типа. Точки, где находятся чёрные вершины валентности 2, — это корни многочлена третьей степени

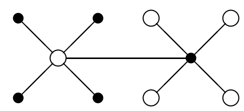
$$q(z) = 9z^3 + 8az^2 - 7z^2 + 7bz - 6az - 5b.$$

Так как остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $q(z)$ имеет степень 0, мы получаем два уравнения на a и b. Исключение b даёт многочлен от a степени 28, который разлагается на множители степеней 3, 15 и 10. Множители степеней 3 и 15 отвечают типам $\langle 5,2,1,1 \mid 4,1,1,1,1,1\rangle$ и $\langle 5,2,1,1 \mid 3,2,1,1,1,1\rangle$ соответственно. Корни множителя 10-й степени

$$1101463552a^{10} + 528252928a^9 - 1880557056a^8 + 116754816a^7 +$$
$$+\,2895970197a^6 - 2724903954a^5 - 3088717413a^4 +$$
$$+\,1393161636a^3 + 828827739a^2 - 632903282a - 73117163$$

описывают деревья нашего типа. Так как этот многочлен 10-й степени неприводим над $\mathbb{Q}$, то десять деревьев типа образуют одну орбиту Галуа.

20: $\langle \mathbf{5, 1, 1, 1, 1} \mid \mathbf{5, 1, 1, 1, 1} \rangle$**.** Этот тип содержит одно дерево:

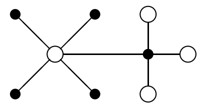


Пусть белая вершина валентности 5 находится в точке 0, а чёрная вершина валентности 5 — в точке 1, тогда многочлен Чебышёва имеет вид

$$p(z) = \int z^4(z-1)^4\,dz = \frac{z^5(70z^4 - 315z^3 + 540z^2 - 420z + 126)}{630}.$$

Дерево симметрично, и его центром симметрии является точка 1/2.

21: $\langle \mathbf{5, 1, 1, 1, 1} \mid \mathbf{4, 2, 1, 1, 1} \rangle$. Этот тип содержит четыре дерева, которые получаются присоединением «хвостика» к одной из четырёх одновалентных чёрных вершин восьмирёберного дерева



Пусть белая вершина валентности 5 находится в точке 0, чёрная вершина валентности 4 — в точке 1, а чёрная вершина валентности 2 — в точке a. Тогда многочлен Чебышёва имеет вид

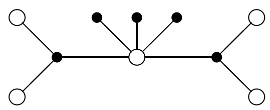
$$p(z) = \int z^4(z-1)^3(z-a)\,dz = \\ = \frac{280z^4 - 315az^3 - 945z^3 + 1080az^2 + 1080z^2 - 1260az - 420z + 504a}{2520}.$$

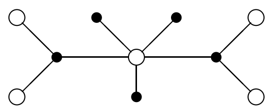
Условие $p(1) = p(a)$ даёт нам уравнение на a:

$$35a^4 + 40a^3 + 30a^2 + 16a + 5 = 0.$$

Так как этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, то четыре дерева типа образуют одну орбиту Галуа. Группа Галуа этого многочлена есть S_4.

22: $\langle \mathbf{5, 1, 1, 1, 1} \mid \mathbf{3, 3, 1, 1, 1} \rangle$. Этот тип содержит два дерева:





Пусть белая вершина валентности 5 находится в точке 0, а чёрные вершины валентности 3 — в точках—корнях многочлена $z^2 - 2z + a$. Тогда многочлен Чебышёва имеет вид

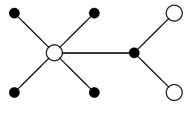
$$p(z) = \int z^4(z^2-2z+a)^2\,dz = \frac{z^5(70z^4 - 315z^3 + 180az^2 + 360z^2 - 420az + 126a^2}{630}.$$

Остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $z^2 - 2z + a$ имеет степень 0. Это даёт нам уравнение на a:

$$a^2 - 20a + 40 = 0.$$

Так как многочлен $a^2 - 20a + 40$ неприводим над $\mathbb{Q}$, то два дерева типа образуют одну орбиту Галуа.

23: $\langle \mathbf{5, 1, 1, 1, 1} \mid \mathbf{3, 2, 2, 1, 1} \rangle$. Этот тип содержит шесть деревьев, которые получаются присоединением двух «хвостиков» к двум *разным* чёрным одновалентным вершинам семирёберного дерева



Пусть белая вершина валентности 5 находится в точке 0, чёрная вершина валентности 3 — в точке 1, а чёрные вершины валентности 2 — в точках—корнях уравнения $z^2 + az + b = 0$. Тогда многочлен Чебышёва имеет вид

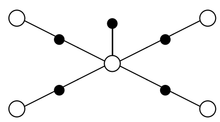
$$p(z) = \int z^4(z-1)^2(z^2+az+b)\,dz =$$
$$= \frac{z^5(280z^4+315az^3-630z^3+360bz^2-720az^2+360z^2-840zb+420za+504b)}{2520}.$$

Остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $(z-1)(z^2+az+b)$ имеет степень 0. Это даёт нам два уравнения на a и b. Исключая b, получаем уравнение на a:

$$(a+2)^5(5a^4-20a^3+48a^2-80a+80)(35a^4+100a^3+120a^2+64a+14)^3 \times$$
$$\times (1715a^6-5880a^5+9660a^4-8944a^3+3864a^2-480a-160) = 0.$$

Первый множитель отвечает случаю $a=-2$, $b=1$, когда оба корня многочлена z^2+az+b равны единице. Второй множитель отвечает случаю кратных корней этого многочлена. Третий множитель отвечает случаю $a+b+1=0$, т. е. случаю, когда единица является одним из корней многочлена z^2+az+b. Четвёртый множитель степени 6 описывает деревья нашего типа. Так как он неприводим над $\mathbb{Q}$, шесть деревьев типа образуют одну орбиту Галуа. Группа Галуа этого многочлена степени 6 есть S_6.

24: $\langle 5,1,1,1,1 \mid 2,2,2,2,1\rangle$. Этот тип содержит одно дерево:

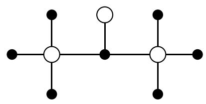


Пусть белая вершина валентности 5 находится в точке 0, чёрные вершины валентности 2 являются корнями многочлена $z^4+az^3+bz^2+cz+d$, а чёрная вершина валентности 1 находится в точке 1. Тогда многочлен

$$p(z) = (z-1)(z^2+az^3+bz^2+cz+d)^2$$

является многочленом Чебышёва нашего дерева. Здесь коэффициенты при z^1, z^2, z^3 и z^4 равны нулю, что даёт нам систему из четырёх уравнений с неизвестными a, b, c, d. Эта система имеет единственное решение $a=8/7$, $b=48/35$, $c=64/35$, $d=128/35$.

25: $\langle \mathbf{4, 4, 1 \mid 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1} \rangle$. Этот тип содержит одно дерево:

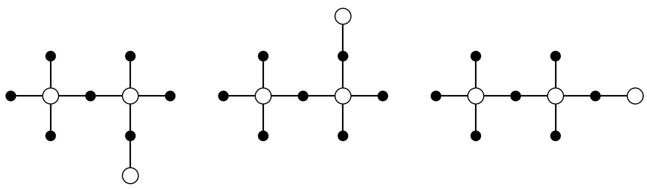


Пусть белые вершины валентности 4 находятся в точках ± 1, а чёрная вершина валентности 3 — в точке a. Тогда многочлен Чебышёва имеет вид

$$\begin{aligned} p(z) &= \int (z^2-1)^3(z-a)^2\,dz = \\ &= \frac{z}{1260}(140z^8 - 315az^7 + 180a^2z^6 - 540z^6 + 1260az^5 - 756a^2z^4 + \\ &+ 756z^4 - 1890az^3 + 1260a^2z^2 - 420z^2 + 1260az - 1260a^2). \end{aligned}$$

Из условия $p(1) = p(-1)$ следует, что $a = \pm i/3$.

26: $\langle \mathbf{4, 4, 1 \mid 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1} \rangle$. Этот тип содержит три дерева:



Пусть белая вершина валентности 1 находится в точке 1, а белые вершины валентности 4 находятся в точках—корнях многочлена $z^2 + a$. Тогда многочлен

$$p(z) = (z^2 + a)^4(z - 1)$$

является многочленом Чебышёва дерева из нашего типа. Положим

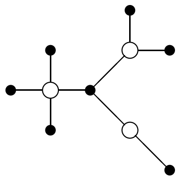
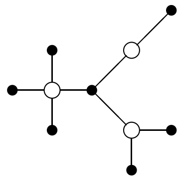
$$q(z) = \frac{p'(z)}{(z^2 + a)^3} = 9z^2 - 8z + a = 0.$$

Тогда чёрные вершины валентности 2 — корни многочлена $q(z)$. Остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $q(z)$ имеет степень 0 по z. Это даёт нам уравнение на a:

$$(9a - 16)(729a^3 + 486a^2 + 189a + 32) = 0.$$

При $a = 16/9$ дискриминант многочлена $9z^2 - 8z + a$ равен нулю. Второй множитель описывает деревья нашего типа. Так как этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, три дерева типа образуют одну орбиту Галуа. Группа Галуа этого многочлена есть S_3.

27: $\langle \mathbf{4, 3, 2 \mid 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1} \rangle$. Этот тип содержит два дерева:

Пусть чёрная вершина валентности 3 находится в точке 0, белая вершина валентности 4 — в точке 1, белая вершина валентности 3 — в точке a, а белая вершина валентности 2 — в точке b. Многочлен Чебышёва имеет вид

$$p(z) = (z-1)^4(z-a)^3(z-b)^2.$$

Так как коэффициенты $p(z)$ при z^1 и при z^2 равны нулю, то мы получаем систему уравнений на a и b:

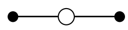
$$\begin{cases} 4ab + 3b + 2 = 0, \\ 6a^2b^2 + 8a^2b + 12ab^2 + 6ab + 3b^2 + a^2 = 0. \end{cases}$$

Исключение b даёт нам уравнение на a:

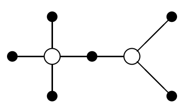
$$8a^2 + 8a + 5 = 0.$$

Так как многочлен $8a^2 + 8a + 5$ неприводим над $\mathbb{Q}$, то два дерева типа образуют одну орбиту Галуа.

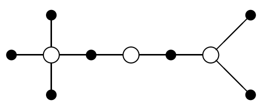
28: $\langle \mathbf{4, 3, 2 \mid 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1} \rangle$. Этот тип содержит шесть деревьев: пять из них получаются присоединением двухрёберной цепочки



к одной из шести одновалентных чёрных вершин семирёберного дерева



а шестое дерево имеет вид



Пусть белая вершина валентности 4 находится в точке 0, белая вершина валентности 3 — в точке 1, а белая вершина валентности 2 — в точке a. Тогда многочлен

$$p(z) = z^4(z-1)^3(z-a)^2$$

является многочленом Чебышёва дерева из нашего типа. Положим

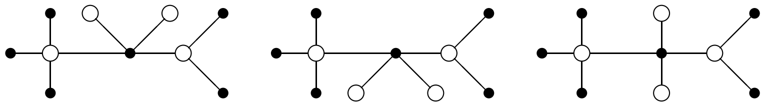
$$q(z) = \frac{p'(z)}{z^3(z-1)^2(z-a)} = 9z^2 - 7az - 6z + 4a.$$

Чёрные вершины валентности 2 — это корни многочлена $q(z)$. Остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $q(z)$ имеет степень 0 по z, что даёт нам уравнение на a:

$$(49a^2 - 60a + 36)(2401a^6 - 4851a^5 - 432a^4 + 2538a^3 + 2673a^2 + 729a - 1458) = 0.$$

Первый множитель — это дискриминант многочлена $9z^2 - 7az - 6z + 4a$, который не равен нулю по условию, а второй описывает деревья нашего типа. Так как этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, то шесть деревьев типа образуют одну орбиту Галуа. Группа Галуа этого многочлена есть S_6.

29: $\langle \mathbf{4, 3, 1, 1 \mid 4, 1, 1, 1, 1, 1} \rangle$. Этот тип содержит три дерева:



Пусть чёрная вершина валентности 4 находится в точке 0, белая вершина валентности 4 — в точке 1, белая вершина валентности 3 — в точке a, а белые вершины валентности 1 — в корнях многочлена $z^2 + bz + c$. Тогда у многочлена Чебышёва

$$p(z) = (z-1)^4(z-a)^3(z^2 + bz + c)$$

коэффициенты при z^1, z^2 и z^3 равны нулю. Это даёт нам три уравнения с неизвестными a, b и c:

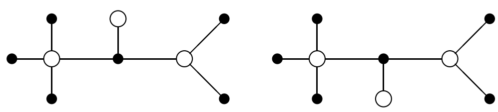
$$\begin{cases} 4ac - ab + 3c = 0, \\ 4a^2b - 6a^2c - a^2 + 3ab - 12ac - 3c = 0, \\ 4a^3c - 6a^3b + 4a^3 - 12a^2b + 18a^2c + 3a^2 - 3ab + 12ac + c = 0. \end{cases}$$

Исключение b и c даёт уравнение на a:

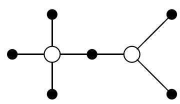
$$10a^3 + 15a^2 + 12a + 5 = 0.$$

Из неприводимости над $\mathbb{Q}$ многочлена $10a^3 + 15a^2 + 12a + 5$ следует, что три дерева типа образуют одну орбиту Галуа. Группа Галуа этого многочлена есть S_3.

30: $\langle \mathbf{4, 3, 1, 1 \mid 3, 2, 1, 1, 1, 1} \rangle$. Этот тип содержит 15 деревьев: десять получаются присоединением «хвостика» к одной из пяти чёрных одновалентных вершин одного из двух восьмирёберных деревьев ниже:



Остальные пять получаются присоединением двух «хвостиков» к одной из пяти чёрных одновалентных вершин семирёберного дерева



Пусть белая вершина валентности 4 находится в точке 0, белая вершина валентности 3 — в точке 1, а белые вершины валентности 1 — в корнях многочлена $z^2 + az + b$. Тогда многочлен

$$p(z) = z^4(z-1)^3(z^2 + az + b)$$

является многочленом Чебышёва дерева из нашего типа. Положим

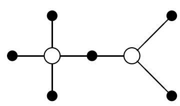
$$q(z) = \frac{p'(z)}{z^3(z-1)^2} = 9z^3 + 8az^2 - 6z^2 - 5az + 7zb - 4b.$$

Чёрные вершины валентности больше 1 находятся в корнях многочлена $q(z)$, причём чёрная вершина валентности 3 — в корне кратности 2. Таким образом, у нас есть два условия: остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $q(z)$ имеет степень 0 по z; дискриминант многочлена $q(z)$ равен нулю. Это даёт нам систему из трёх уравнений с неизвестными a и b. Вычисление базиса Грёбнера даёт уравнение

$$\begin{aligned}
&(896a^3 + 3168a^2 + 4671a + 2538) \times \\
&\quad \times (4511594708992a^{15} + 55520236929024a^{14} + 279950288486400a^{13} + \\
&\quad + 736692573044736a^{12} + 1080501298495488a^{11} + 941337941557248a^{10} + \\
&\quad + 617624169232896a^9 - 151017824428416a^8 - 2809314310452921a^7 - \\
&\quad - 6836786400699810a^6 - 9094824361248840a^5 - 7784725898520144a^4 - \\
&\quad - 4353285261579840a^3 - 1552727521076688a^2 - 334266627491712a - \\
&\quad - 34936948346112) = 0
\end{aligned}$$

Первый множитель степени 3 отвечает случаю, когда многочлен $q(z)$ имеет один корень кратности 3. Второй множитель описывает деревья нашего типа. Так как соответствующий многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, то 15 деревьев типа образуют одну орбиту Галуа.

31: $\langle 4, 3, 1, 1 \mid 2, 2, 2, 1, 1, 1 \rangle$. Этот тип содержит десять деревьев, которые получаются присоединением двух «хвостиков» к двум *различным* чёрным одновалентным вершинам семирёберного дерева



Пусть белая вершина валентности 4 находится в точке 0, белая вершина валентности 3 — в точке 1, а белые вершины валентности 1 находятся в точках—корнях многочлена $z^2 + az + b$ (дискриминант этого многочлена *не равен* нулю). Тогда многочлен

$$p(z) = z^4(z-1)^3(z^2 + az + b)$$

является многочленом Чебышёва дерева из нашего типа. Пусть

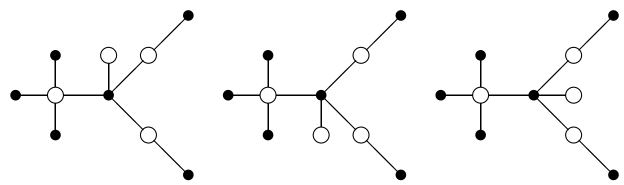
$$q(z) = \frac{p'(z)}{z^3(z-1)^2} = 9z^3 + 8az^2 - 6z^2 - 5az + 7bz - 4b.$$

Корни многочлена $q(z)$ попарно различны, и чёрные вершины валентности 2 находятся в точках—корнях $q(z)$. Так как остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $q(z)$ имеет степень 0, мы получаем два уравнения с неизвестными a и b. Исключение b даёт нам многочлен 28-й степени по a, а условие отличия от нуля дискриминанта многочлена $q(z)$ выделяет в этом многочлене 28-й степени множитель степени 10:

$$\begin{aligned} &275365888a^{10} + 1879793664a^9 + 4776807168a^8 + 5165933760a^7 + \\ &+ 858095937a^6 - 2313797886a^5 + 129837816a^4 + 2844167256a^3 + \\ &+ 1704626532a^2 + 7479540a - 163447632. \end{aligned}$$

Корни этого многочлена 10-й степени описывают все деревья нашего типа. Так как этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, десять деревьев типа образуют одну орбиту Галуа.

32: $\langle \mathbf{4, 2, 2, 1} \mid \mathbf{4, 1, 1, 1, 1, 1} \rangle$. Этот тип содержит три дерева:



Пусть чёрная вершина валентности 4 находится в точке 0, белая вершина валентности 4 — в точке 1, белые вершины валентности 2 — в точках—корнях многочлена z^2+az+b, а белая вершина валентности 1 — в точке c. Тогда многочлен

$$p(z) = (z-1)^4(z^2 + az + b)^2(z - c)$$

является многочленом Чебышёва дерева из нашего типа. Коэффициенты $p(z)$ при степенях z^1, z^2 и z^3 равны нулю. Это даёт нам три уравнения на неизвестные a, b и c:

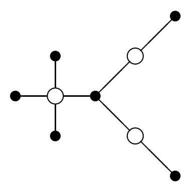
$$\begin{cases} b + 4bc - 2ac = 0, \\ 8abc - 4b^2 + 2ab - 2bc - a^2c - 6b^2c = 0, \\ 4a^2c - 12abc + 4b^2c + a^2 - 8ab + 6b^2 - 2ac + 8bc + 2b = 0. \end{cases}$$

Вычисление базиса Грёбнера даёт нам уравнение

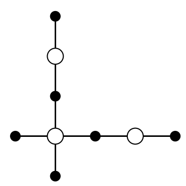
$$64c^3 + 24c^2 + 12c + 5 = 0.$$

Так как этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, то три дерева типа образуют одну орбиту Галуа. Группа Галуа этого многочлена есть S_3.

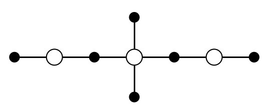
33: $\langle 4, 2, 2, 1 \mid 3, 2, 1, 1, 1, 1 \rangle$. Этот тип содержит 15 деревьев, которые получаются присоединением «хвостика» либо к одной из пяти чёрных одновалентных вершин восьмирёберного дерева



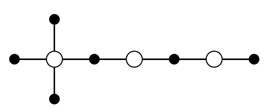
либо к одной из двух чёрных двувалентных вершин восьмирёберного дерева («хвостик» можно прикрепить справа или слева к верхней вершине или снизу или сверху к правой)



либо к правой чёрной двувалентной вершине восьмирёберного дерева («хвостик» можно прикрепить снизу или сверху)



либо к одной из двух чёрных двувалентных вершин восьмирёберного дерева («хвостик» можно прикреплять снизу или сверху)



Пусть белая вершина валентности 4 находится в точке 0, белая вершина валентности 1 — в точке 1, а белые вершины валентности 2 — в точках—корнях многочлена $z^2 + az + b$. Тогда многочлен

$$p(z) = z^4(z^2 + az + b)^2(z - 1)$$

является многочленом Чебышёва дерева из нашего типа. Положим

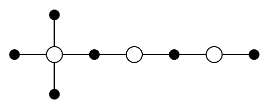
$$q(z) = \frac{p'(z)}{z^3(z^2 + az + b)} = 9z^3 + 7az^2 - 8z^2 - 6az + 5bz - 4b.$$

Чёрная вершина валентности 3 находится в корне кратности 2 многочлена $q(z)$, а чёрная вершина валентности 2 — в простом корне. Так как остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $q(z)$ имеет степень 0 по z, то мы получаем два условия на неизвестные a и b, а равенство нулю дискриминанта многочлена $q(z)$ даёт нам третье условие. Вычисление базиса Грёбнера даёт уравнение

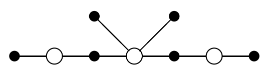
$$\begin{aligned}
&(1715a^3 + 9996a^2 + 22920a + 18176) \times \\
&\quad \times (126105021875a^{15} + 873367351500a^{14} + 2340460381665a^{13} + \\
&\quad + 2877817869766a^{12} + 3181427453757a^{11} - 68622755391456a^{10} - \\
&\quad - 680918281137097a^9 - 2851406436711330a^8 - 7139130404618520a^7 - \\
&\quad - 12051656256571792a^6 - 14350515598839120a^5 - 12058311779508768a^4 - \\
&\quad - 6916678783373312a^3 - 2556853615656960a^2 - 561846360735744a - \\
&\quad - 65703906377728) = 0.
\end{aligned}$$

Первый множитель — многочлен третьей степени — описывает случай, когда многочлен $q(z)$ имеет один корень кратности 3. Второй множитель — многочлен степени 15 — описывает деревья нашего типа. Так как этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, то 15 деревьев типа образуют одну орбиту Галуа.

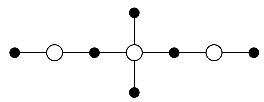
34: $\langle 4, 2, 2, 1 \mid 2, 2, 2, 1, 1, 1 \rangle$. Этот тип содержит десять деревьев, которые получаются присоединением «хвостика» либо к одной из четырёх чёрных одновалентных вершин восьмирёберного дерева



либо к одной из четырёх чёрных одновалентных вершин восьмирёберного дерева



либо к правой или верхней чёрной одновалентной вершине восьмирёберного дерева



Пусть белая вершина валентности 4 находится в точке 0, белая вершина валентности 1 — в точке 1, а белые вершины валентности 2 — в точках—корнях многочлена z^2+az+b. Тогда многочлен

$$p(z) = z^4(z^2+az+b)^2(z-1)$$

является многочленом Чебышёва дерева из нашего типа. Положим

$$q(z) = \frac{p'(z)}{z^3(z^2+az+b)} = 9z^3+7az^2-8z^2-6az+5bz-4b.$$

Чёрные вершины валентности 2 находятся в точках—корнях многочлена $q(z)$. Кроме того, дискриминант многочлена $q(z)$ не равен нулю, так три его корня попарно различны. Так как остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $q(z)$ имеет степень 0 по z, мы получаем два уравнения с неизвестными a и b. Исключение b даёт нам уравнение на a: a является корнем многочлена 28-й степени, который разлагается в произведение неприводимых над $\mathbb{Q}$ многочленов первой, третьей, девятой и пятнадцатой степеней. Многочлен третьей степени отвечает случаю корня кратности 3 у многочлена $q(z)$. Многочлен пятнадцатой степени отвечает случаю корня кратности 2 у многочлена $q(z)$ (см. обсуждение предыдущего типа). Таким образом, наш тип описывается уравнением

$$(a-5)(214375a^9-1014300a^8+4984047a^7-1485042a^6-9870264a^5+ \\ +10006704a^4+11720496a^3+7846560a^2-2119680a-425984)=0.$$

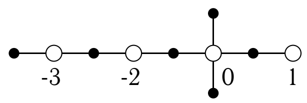
Так как многочлен степени 10 разложился над $\mathbb{Q}$ в произведение многочлена степени 1 и многочлена степени 9, наш тип есть объединение двух орбит Галуа: орбиты кардинальности 1 и орбиты кардинальности 9. Дерево, образующее орбиту кардинальности 1, рационально. Действительно, нетрудно найти, что если $a=5$, то $b=6$. Следовательно, в этом случае

$$p(z) = z^4(z+2)^2(z+3)^3(z-1),$$

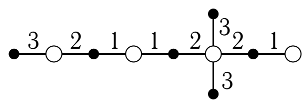
т. е. белые вершины валентности 2 находятся в точках -2 и -3. Тогда

$$q(z) = 9z^3+27z^2-5z-20,$$

и чёрные вершины валентности 2 находятся в точках, примерно равных $-2{,}93$, $-0{,}9$ и $0{,}93$. Рациональное дерево имеет вид

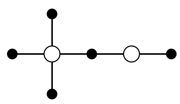


Это дерево редуцируемо к 3-цепочке: множество рёбер можно разбить на три класса так, чтобы два ребра из одного класса при белом или чёрном вращении попадали в один класс. Разбиение на классы указано на рисунке ниже.

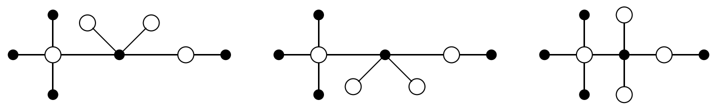


Группа вращений этого дерева примитивна и имеет порядок 648.

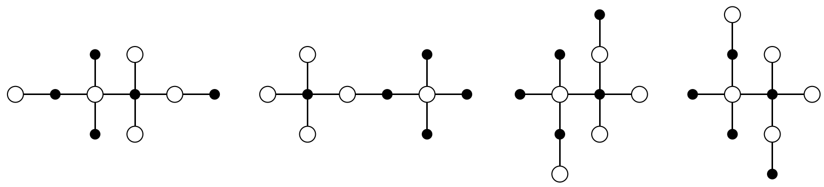
35: $\langle \mathbf{4, 2, 1, 1, 1} \mid \mathbf{4, 2, 1, 1, 1} \rangle$**.** Этот тип содержит 16 деревьев. Четыре из них получаются присоединением трёх «хвостиков» к одной из чёрных одновалентных вершин шестирёберного дерева



Оставшиеся 12 деревьев получаются присоединением «хвостика» к одной из чёрных одновалентных вершин одного из трёх восьмирёберных деревьев ниже:



Четыре из этих шестнадцати деревьев центрально симметричны:



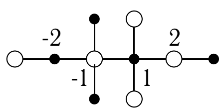
Сначала рассмотрим симметричные деревья. Пусть белая вершина валентности 4 находится в точке -1, чёрная вершина валентности 4 — в точке 1, белая вершина валентности 2 — в точке b, а чёрная вершина валентности 2 — в точке $-b$. Тогда многочлен Чебышёва имеет вид

$$p(z) = \int (z^2-1)^3(z^2-b^2)\,dz = \\ = \frac{z(35z^8 - 45b^2z^6 - 135z^6 + 189b^2z^4 + 189z^4 - 315b^2z^2 - 105z^2 + 315b^2)}{315}.$$

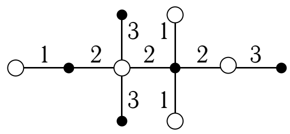
Условие $p(-1) = p(b)$ (или $p(1) = p(-b)$) даёт нам уравнение на b:

$$(b-2)(5b^3 - 15b^2 + 18b - 4) = 0.$$

Это означает, что симметричные деревья образуют две орбиты Галуа. Если $b = 2$, то дерево имеет вид



Это дерево редуцируемо к 3-цепочке



Порядок группы вращений этого дерева равен 648.

Перейдём к рассмотрению несимметричных деревьев. Пусть вершины валентности 4 находятся в точках $\pm a$, а вершины валентности 2 — в точках $1 \pm b$. Тогда многочлен Чебышёва имеет вид

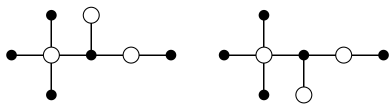
$$\begin{aligned}
p(z) &= \int (z^2 - a^2)^3 (z^2 - 2b + 1 - b^2)\, dz = \\
&= \frac{z}{1260}(140z^8 - 315z^7 + 180z^6 - 180b^2z^6 - 540a^2z^6 + 1260a^2z^5 - 756a^2z^4 + \\
&+ 756a^2b^2z^4 + 756a^4z^4 - 1890a^4z^3 + 1260a^4z^2 - 1260a^4b^2z^2 - 420a^6z^2 + \\
&+ 1260a^6z - 1260a^6 + 1260a^6b^2).
\end{aligned}$$

Два условия $p(a) = p(1+b)$ и $p(-a) = p(1-b)$ дают нам два уравнения с неизвестными a и b. Вычисление базиса Грёбнера позволяет найти условие на a:

$$\begin{aligned}
&(5225472a^{12} + 20062080a^{10} + 72001548a^8 + 50152896a^6 - \\
&\quad - 9572940a^4 + 2293200a^2 - 300125)(126a^4 - 336a^3 + 360a^2 - 180a + 35)^5 \times \\
&\quad \times (126a^4 + 336a^3 + 360a^2 + 180a + 35)^5 = 0.
\end{aligned}$$

Второй множитель здесь отвечает случаю $1+b = a$, третий — случаю $-b = 1-a$. Первый множитель — многочлен двенадцатой степени — описывает 12 несимметричных деревьев нашего типа. Так как этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, то 12 несимметричных деревьев образуют одну орбиту Галуа. Итак, 16 деревьев типа образуют три орбиты Галуа. Одноэлементную орбиту образует симметричное дерево, редуцируемое к 3-цепочке. Остальные три симметричных дерева образуют вторую орбиту. Двенадцать несимметричных деревьев образуют третью орбиту.

36: $\langle \mathbf{4, 2, 1, 1, 1 \mid 3, 3, 1, 1, 1} \rangle$. Этот тип содержит восемь деревьев, которые получаются присоединением двух «хвостиков» к одной из чёрных одновалентных вершин одного из двух семирёберных деревьев ниже:



Пусть белая вершина валентности 4 находится в точке 0, белая вершина валентности 2 — в точке 1, а чёрные вершины валентности 3 — в точках—корнях многочлена $z^2 + az + b$. Тогда многочлен Чебышёва имеет вид

$$\begin{aligned} p(z) &= \int z^3(z-1)(z62 + az + b)^2\,dz = \\ &= \frac{1}{2520}(280z^9 + 630az^8 - 315z^8 - 720az^7 + 720bz^7 + \\ &+ 360a^2z^7 - 420z^6a^2 + 840abz^6 - 840bz^6 - 1008z^5ab + 504b^2z^5 - 630b^2z^4). \end{aligned}$$

Два условия: равенство $p(1) = 0$ и то, что остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $z^2 + az + b$ имеет степень 0 по z, дают нам два уравнения с неизвестными a и b:

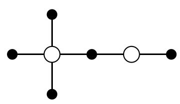
$$\begin{cases} 35 + 90a + 120b + 60a^2 + 168ab + 126b^2 = 0, \\ 10a^4 + 15a^3 - 20a^2b - 18ab + 4b^2 = 0 \end{cases}$$

Исключая b, получаем уравнение

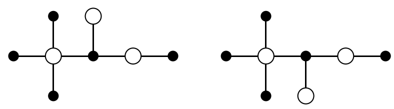
$$2268a^8 + 12852a^7 + 29007a^6 + 36072a^5 + 29016a^4 + 14712a^3 + 4518a^2 + 576a + 28 = 0.$$

Этот многочлен восьмой степени описывает деревья нашего типа. Так как он неприводим над $\mathbb{Q}$, восемь деревьев типа образуют одну орбиту Галуа. Группа Галуа этого многочлена есть S_8.

37: $\langle \mathbf{4, 2, 1, 1, 1} \mid \mathbf{3, 2, 2, 1, 1} \rangle$. Этот тип содержит 24 дерева, которые получаются либо из шестирёберного дерева



присоединением двух «хвостиков» к одной из чёрных одновалентных вершин и присоединением третьего «хвостика» к одной из трёх оставшихся одновалентных чёрных вершин (всего 12 деревьев), либо присоединением двух «хвостиков» к двум *различным* чёрным одновалентным вершинам одного из двух семирёберных деревьев ниже:



Пусть белая вершина валентности 4 находится в точке 0, белая вершина валентности 2 — в точке 1, а белые вершины валентности 1 — в точках—корнях многочлена $z^3 + az^2 + bz + c$. Тогда многочлен

$$p(z) = z^4(z-1)^2(z^3 + az^2 + bz + c)$$

является многочленом Чебышёва дерева из нашего типа. Положим

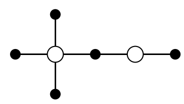
$$q(z) = \frac{p'(z)}{z^3(z-1)} = 9z^4 + 8az^3 - 7z^3 - 6az^2 + 7bz^2 - 5bz + 6cz - 4c.$$

Тогда многочлен $q(z)$ имеет корень кратности 2 (это точка, где находится чёрная вершина валентности 3) и два простых корня (точки, где находятся чёрные вершины валентности 2). Таким образом, у нас есть четыре уравнения с неизвестными a, b и c, которые вытекают из условий, что дискриминант многочлена $q(z)$ равен нулю и остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $q(z)$ имеет степень 0 по z. Вычисление базиса Грёбнера даёт нам уравнение

$$\begin{aligned}
&(a+1)(14a^3+105a^2+222a+239)\times\\
&\quad\times(28672a^4+243712a^3+887424a^2+1542880a+1056391)\times\\
&\quad\times(7340032a^8+42205184a^7+59392000a^6+64004096a^5+\\
&\quad+153827584a^4-155299264a^3+100313884a^2-212876452a+104273911)\times\\
&\quad\times(40282095616a^{12}+328011350016a^{11}+851109740544a^{10}+706893709312a^9+\\
&\quad+1757436973056a^8-1884486371328a^7-10766833883328 0a^6-\\
&\quad-556972050213792a^5-1413212755566717a^4-2109976246031066a^3-\\
&\quad-1908312552654108a^2-979268314398171a-221387775063707)\times\\
&\quad\times(38823102604302614528a^{24}+482515703796332494848a^{23}+\\
&\quad+2328335640453357502464a^{22}+5009106574627066347520a^{21}+\\
&\quad+2657399523889234575360a^{20}-6127358187441651449856a^{19}-\\
&\quad-4378663103179792580608a^{18}-3256526984085839020032a^{17}-\\
&\quad-9469120119003939498393 6a^{16}-2991046714616761754255 36a^{15}-\\
&\quad-3344254102908233913792 00a^{14}+2233188083714048699464 32a^{13}+\\
&\quad+1429714982333306897801666a^{12}+2879438343590940081166959a^{11}+\\
&\quad+4395358599851772885730983a^{10}+6077908278192810324476413a^9+\\
&\quad+7133553996934436737991271a^8+6444396067307747103350262a^7+\\
&\quad+4429616268765562380065462a^6+2309550011283402730387866a^5+\\
&\quad+794566443956858310331920a^4+1076029637709777851538 67a^3-\\
&\quad-3356276247292346569540 5a^2-1541115367259575406221 5a-\\
&\quad-2671589758513029037033)=0.
\end{aligned}$$

Первый множитель степени 1, второй множитель степени 3 и третий множитель степени 4 отвечают случаю корня кратности 3 у многочлена $q(z)$. Четвёртый множитель степени 8 отвечает случаю двух корней кратности 2 у многочлена $q(z)$. Пятый множитель степени 12 отвечает случаю корня кратности 3 у многочлена $q(z)$. Корни множителя степени 24 описывают деревья нашего типа. Так этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, деревья типа образуют одну орбиту Галуа.

38: $\langle 4,2,1,1,1 \mid 2,2,2,2,1\rangle$. Этот тип содержит четыре дерева, которые получаются присоединением трёх «хвостиков» к трём *разным* одновалентным чёрным вершинам шестирёберного дерева



Пусть (как и в предыдущем случае) белая вершина валентности 4 находится в точке 0, белая вершина валентности 2 — в точке 1, а белые вершины валентности 1 — в точках—корнях многочлена $z^3 + az^2 + bz + c$. Тогда многочлен

$$p(z) = z^4(z-1)^2(z^3 + az^2 + bz + c)$$

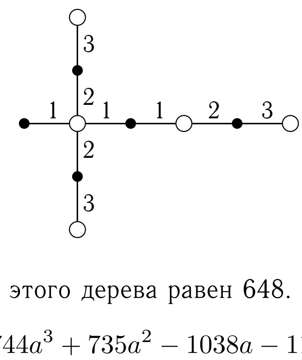
является многочленом Чебышёва дерева из нашего типа. Положим

$$q(z) = \frac{p'(z)}{z^3(z-1)} = 9z^4 + 8az^3 - 7z^3 - 6az^2 + 7bz^2 - 5bz + 6cz - 4c.$$

Тогда корни многочлена $q(z)$ простые и отвечают чёрным вершинам валентности 2. Так как остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $q(z)$ имеет степень 0 по z, мы получаем три уравнения с неизвестными a, b и c. Вычисление базиса Грёбнера и исключение случаев корня кратности 3 и двух корней кратности 2 у многочлена $q(z)$ позволяют получить уравнение на a:

$$(a+1)(2744a^3 + 735a^2 - 1038a - 1189) = 0.$$

Если $a = -1$, то $b = 0$ и $c = -4/9$. Тогда белые вершины валентности 1 находятся приблизительно в точках $-0{,}13 \pm 0{,}57\,i$ и 1,27. Чёрные вершины валентности 2 находятся приблизительно в точках $-0{,}1 \pm 0{,}48\,i$, 1,2 и в точке $2/3$. Соответствующее дерево редуцируемо к 3-цепочке и имеет вид

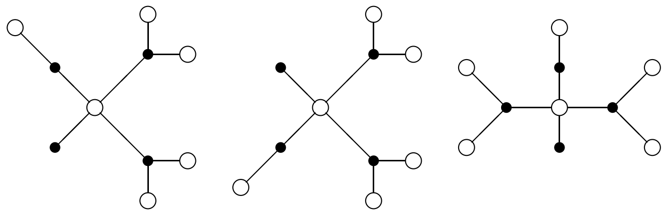


Порядок группы вращений этого дерева равен 648. Так как многочлен

$$2744a^3 + 735a^2 - 1038a - 1189$$

с группой Галуа S_3 неприводим над $\mathbb{Q}$, оставшиеся три дерева типа образуют одну орбиту Галуа. Итак, наш тип является объединением двух орбит Галуа: орбиты кардинальности 1 и орбиты кардинальности 3.

39: $\langle \mathbf{4, 1, 1, 1, 1, 1} \mid \mathbf{3, 3, 2, 1} \rangle$. Этот тип содержит три дерева:



Пусть белая вершина валентности 4 находится в точке 0, чёрная вершина валентности 2 — в точке 1, чёрная вершина валентности 1 — в точке a, а чёрные вершины валентности 3 — в точках—корнях многочлена z^2+bz+c. У многочлена Чебышёва

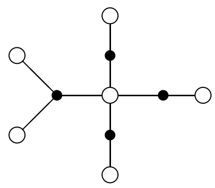
$$p(z) = (z-1)^2(z-a)(z^2+bz+c)^3$$

коэффициенты при степенях z^1, z^2 и z^3 равны нулю. Это даёт нам три уравнения с неизвестными a, b и c:

$$\begin{cases} 2ac + c - 3ab = 0, \\ 3ab^2 - 6abc + ac^2 + 3ac - 3bc + 2c^2 = 0, \\ ab^3 - 6ab^2c + 3abc^2 + 6abc - 6ac^2 - 3b^2c + 6bc^2 - c^3 - 3c^2 = 0. \end{cases}$$

Вычисление базиса Грёбнера даёт уравнение $40a^3 + 15a^2 + 12a + 14 = 0$. Так как этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, три дерева типа образуют одну орбиту Галуа. Группа Галуа этого многочлена есть S_3.

40: $\langle \mathbf{4, 1, 1, 1, 1, 1} \mid \mathbf{3, 2, 2, 2} \rangle$. Этот тип содержит одно дерево:



Пусть белая вершина валентности 4 находится в точке 0, чёрная вершина валентности 3 — в точке 1, а чёрные вершины валентности 2 — в точках—корнях многочлена $z^3 + az^2 + bz + c$. У многочлена Чебышёва

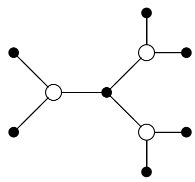
$$p(z) = (z-1)^3(z^3+az^2+bz+c)^2$$

коэффициенты при степенях z^1, z^2 и z^3 равны нулю. Это даёт нам три уравнения с неизвестными a, b и c:

$$\begin{cases} 3c - 2b = 0, \\ 2ac + b^2 - 6bc + 3c^2 = 0, \\ 2ab - 6ac - 3b^2 + 6bc - c^2 + 2c = 0. \end{cases}$$

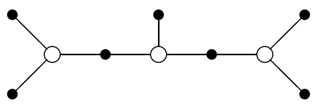
Решением этой системы является набор значений $a = 6/7$, $b = 24/35$, $c = 16/35$.

41: $\langle \mathbf{3,3,3} \mid \mathbf{3,1,1,1,1,1,1}\rangle$. Этот тип содержит одно дерево:



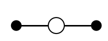
Это дерево переходит в себя при повороте на 120°, так что многочлен $p(z) = (z^3-1)^3$ является многочленом Чебышёва этого дерева. Здесь белые вершины валентности 3 находятся в корнях кубических из единицы, а чёрная вершина валентности 3 находится в точке 0.

42: $\langle \mathbf{3,3,3} \mid \mathbf{2,2,1,1,1,1,1}\rangle$. Этот тип содержит одно дерево:

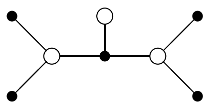


Пусть белые вершины валентности 3 находятся в точках—корнях многочлена z^3+az+a (такой выбор многочлена не меняет поля определения). Тогда многочлен $p(z) = (z^3+az+a)^3$ является многочленом Чебышёва этого дерева. Чёрные вершины валентности 2 находятся в точках—корнях многочлена $3z^2+a$. Так как остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $3z^2+a$ имеет степень 0 по z, мы получаем, что $a = 81/4$.

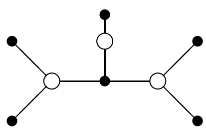
43: $\langle \mathbf{3,3,2,1} \mid \mathbf{3,2,1,1,1,1}\rangle$. Этот тип содержит 15 деревьев. Четыре из них получаются присоединением 2-цепочки



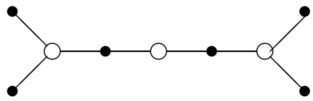
к одной из чёрных одновалентных вершин семирёберного дерева



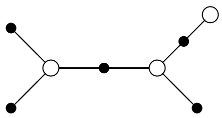
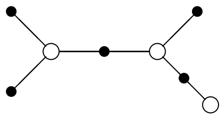
Следующие пять деревьев получаются присоединением «хвостика» к одной из чёрных одновалентных вершин восьмирёберного дерева



Следующие два дерева получаются присоединением «хвостика» сверху к одной из чёрных двухвалентных вершин восьмирёберного дерева



Последние четыре дерева получаются присоединением 2-цепочки к чёрной двухвалентной вершине одного из двух семирёберных деревьев ниже (присоединение можно сделать двумя способами):

Пусть белая вершина валентности 2 находится в точке 0, белая вершина валентности 1 — в точке 1, а белые вершины валентности 3 — в точках—корнях многочлена z^2+az+b. Тогда многочлен

$$p(z)=z^2(z-1)(z^2+az+b)^3$$

является многочленом Чебышёва дерева из нашего типа. Положим

$$q(z)=\frac{p'(z)}{z(z^2+az+b)^2}=9z^3+6az^2-8z^2-5az+3bz-2b.$$

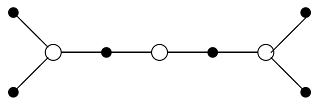
В корне кратности 2 многочлена $q(z)$ находится чёрная вершина валентности 3, в простом корне — чёрная вершина валентности 2. Мы получаем два условия на неизвестные a и b: дискриминант многочлена $q(z)$ равен нулю, степень по z остатка от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $q(z)$ равна нулю. Вычисление базиса Грёбнера даёт уравнение:

$$\begin{aligned}(108a^3&+540a^2+1629a+1472)(57395628a^{15}+918330048a^{14}+8303234184a^{13}+\\&+36531254340a^{12}+18064742472a^{11}-929697925284a^{10}-6589331034417a^9-\\&-24404357489913a^8-58044040148250a^7-95043793141278a^6-\\&-110277807640677a^5-91225037010177a^4-53331404832000a^3-\\&-21710966464512a^2-6017969553408a-1002220552192)=0.\end{aligned}$$

Первый множитель степени 3 отвечает случаю корня кратности 3 у многочлена $q(z)$. Корни многочлена степени 15 описывают деревья нашего типа. Так как этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, то 15 деревьев типа образуют одну орбиту Галуа.

44: $\langle \mathbf{3,3,2,1 \mid 2,2,2,1,1,1} \rangle$. Этот тип содержит десять деревьев. Восемь из них получаются присоединением «хвостика» к одной из чёрных одновалентных вершин одного из двух восьмирёберных деревьев ниже:

Оставшиеся два дерева получаются присоединением «хвостика» к одной из двух чёрных правых одновалентных вершин восьмирёберного дерева



Пусть белая вершина валентности 2 находится в точке 0, белая вершина валентности 1 — в точке 1, а белые вершины валентности 3 — в точках—корнях многочлена $z^2 + az + b$. Тогда многочлен

$$p(z) = z^2(z-1)(z^2 + az + b)^3$$

является многочленом Чебышёва дерева из нашего типа. Положим

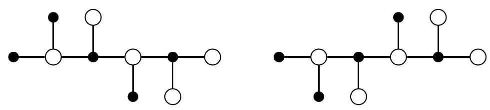
$$q(z) = \frac{p'(z)}{z(z^2 + az + b)^2} = 9z^3 + 6az^2 - 8z^2 - 5az + 3bz - 2b.$$

Корни многочлена $q(z)$ отвечают чёрным вершинам валентности 2. Так как степень по z остатка от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $q(z)$ равна нулю, мы получаем два уравнения с неизвестными a и b. Базис Грёбнера даёт нам уравнение на a: a является корнем многочлена степени 38. Этот многочлен есть произведение многочленов степени 3, 15 и 10. Многочлены степени 3 и 15 отвечают случаю кратного корня многочлена $q(z)$. Деревья нашего типа описываются корнями многочлена степени 10

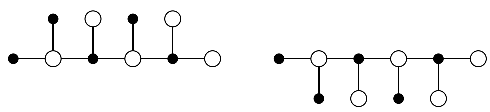
$$118098a^{10} - 1220346a^9 - 3306744a^8 + 22917573a^7 + 150913935a^6 + 386189208a^5 + \\ + 524804670a^4 + 388622205a^3 + 143072649a^2 + 20072064a + 1028096.$$

Так как этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, десять деревьев типа образуют одну орбиту Галуа.

45: $\langle \mathbf{3, 3, 1, 1, 1} \mid \mathbf{3, 3, 1, 1, 1} \rangle$**.** Этот тип содержит четыре дерева: два симметричных



и две «гребёнки»



Обратите внимание, что первая и вторая «гребёнки» одинаковы с точностью до перекрашивания вершин.

Мы можем выбрать многочлен Чебышёва в виде

$$p(z) = (z^2 + a)^3(z^3 + z^2 + bz + c).$$

Здесь белые вершины валентности 3 располагаются в корнях многочлена z^2+a, белые вершины валентности 1 — в корнях многочлена z^3+z^2+bz+c. Положим

$$q(z) = \frac{p'(z)}{(z^2+a)^2} = 9z^4 + 8z^3 + 3az^2 + 7bz^2 + 2az + 6cz + ab.$$

Чёрные вершины валентности 3 находятся в корнях многочлена $q(z)$ кратности 2. Это означает, что многочлен $q(z)$ — полный квадрат: $q(z) = (3z^2+dz+e)^2$. Это условие, а также тот факт, что остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $3z^2+dz+e$ имеет степень 0 по z, дают нам пять уравнений на неизвестные a, b, c, d и e. Вычисление базиса Грёбнера даёт уравнение

$$(2187a^2 + 162a + 7)(2187a^2 + 324a + 16)(2187a^2 - 1944a + 112)^2 = 0.$$

Последний множитель отвечает случаю кратного корня у многочлена $3z^2+dz+e$. Первый множитель описывает симметричные деревья, второй — «гребёнки».

На самом деле «гребёнка» является *псевдорациональным* деревом, т. е. существует многочлен Чебышёва $p(z)$ с рациональными коэффициентами, такой что прообраз отрезка $p^{-1}[\alpha, \beta]$, где α и β — критические значения многочлена $p(z)$, является «гребёнкой». При этом числа α и β с необходимостью *иррациональны*. Пусть $p(z)$ — искомый рациональный многочлен Чебышёва. Тогда $p'(z) = (q(z))^2$, где $q(z) \in \mathbb{Q}[z]$. Мы можем считать, что $q(z) = z^4 + az^2 + az + b$. Пусть α_1 и α_2 — белые вершины валентности 3, а β_1 и β_2 — чёрные вершины валентности 3. Тогда $q(z) = q_1(z)q_2(z)$, где $q_1(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)$, $q_2(z) = (z-\beta_1)(z-\beta_2)$. Так как $p-\alpha = s_1q_1$ и $p-\beta = s_2q_2$, то

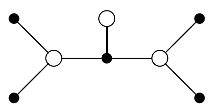
$$p^2 - (\alpha+\beta)p + \alpha\beta = s_1s_2q.$$

Это равенство означает, что существует такое число c (в действительности $c = \alpha+\beta$), что остаток от деления многочлена p^2 на многочлен q минус c, умноженное на остаток от деления многочлена p на многочлен q, имеет степень 0 (по z). Это условие даёт нам три уравнения с неизвестными a, b и c. Вычисляя базис Грёбнера, находим рациональное решение: $a = 343/24$, $b = 88837/2304$.

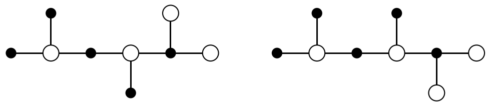
Стоит отметить, что «гребёнка» — это единственное известное псевдорациональное дерево.

Группа вращений как симметричного дерева, так и «гребёнки» имеет порядок 1512. Эти деревья нередуцируемы, следовательно, они дают примеры так называемых *особых* деревьев, т. е. нередуцируемых деревьев, группа вращений которых меньше симметрической и знакопеременной групп.

46: $\langle 3,3,1,1,1 \mid 3,2,2,1,1 \rangle$. Этот тип содержит 12 деревьев. Шесть из них получаются присоединением двух «хвостиков» к двум различным чёрным одновалентным вершинам семирёберного дерева



Другие шесть деревьев получаются присоединением «хвостика» к одной из трёх чёрных одновалентных вершин одного из двух восьмирёберных деревьев ниже:



Как и в предыдущем случае, многочлен Чебышёва мы будем искать в виде

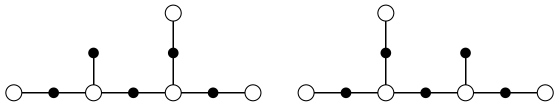
$$p(z) = (z^2 + a)^3(z^3 + z^2 + bz + c).$$

Многочлен $q(z)$ тот же. У многочлена $q(z)$ есть один корень кратности 2, в котором находится чёрная вершина валентности 3, и два простых корня, в которых находятся чёрные вершины валентности 2. Условия, что дискриминант многочлена $q(z)$ равен нулю и остаток от деления по z многочлена $p(z)$ на многочлен $q(z)$ имеет степень 0 (по z), дают четыре уравнения с неизвестными a, b и c. Вычисление базиса Грёбнера даёт уравнение

$$\begin{aligned}
&(2187a^2 - 1944a + 112)(2187a^2 + 324a + 16)(2187a^2 + 162a + 7) \times\\
&\quad \times (36031520036374949025a^8 + 22571610959880163602a^7 +\\
&\quad + 7130649837465594801a^6 + 620185694180555520a^5 +\\
&\quad + 1043551902391114752a^4 - 89097599166676992a^3 +\\
&\quad + 15716784401547264a^2 + 372963702472704a + 4511594708992) \times\\
&\quad \times (5361530467444105601241a^{12} - 77796901272505287397599a^{11} +\\
&\quad + 287830778512913928375102a^{10} - 397440688020524070466014a^9 -\\
&\quad - 69071798686992983196795a^8 + 34462798463418833712141a^7 +\\
&\quad + 18616814970667571510964a^6 + 4144808143930123526400a^5 +\\
&\quad + 571123378044143483904a^4 + 52703413772675162112a^3 +\\
&\quad + 3113565867813961728a^2 + 94428910898380800a + 1184787066781696) = 0.
\end{aligned}$$

Первые три множителя степени 2 рассмотрены в предыдущем разделе. Множитель степени 8 отвечает случаю корня кратности 3 у многочлена $q(z)$. Многочлен 12-й степени описывает деревья нашего типа. Так как этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, то 12 деревьев типа образуют одну орбиту Галуа.

47: $\langle 3, 3, 1, 1, 1 \mid 2, 2, 2, 2, 1 \rangle$. Этот тип содержит два дерева:

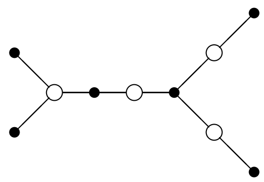


Как и в предыдущем случае, многочлен Чебышёва мы будем искать в виде

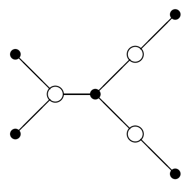
$$p(z) = (z^2 + a)^3(z^3 + z^2 + bz + c).$$

Многочлен $q(z)$ тот же. У многочлена $q(z)$ три простых корня, в которых находятся чёрные вершины валентности 2. Так как остаток от деления по z многочлена $p(z)$ на многочлен $q(z)$ имеет степень 0 (по z), мы получаем три уравнения с неизвестными a, b и c. Вычисление базиса Грёбнера даёт уравнение на a. Исключая те случаи, когда дискриминант многочлена $q(z)$ равен нулю (см. предыдущий раздел), мы получаем окончательное уравнение: $2187a^2+1458a+343=0$. Так как многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, два дерева типа образуют одну орбиту Галуа.

48: $\langle 3, 2, 2, 2 \mid 3, 2, 1, 1, 1, 1\rangle$. Этот тип содержит пять деревьев. Одно изображено на рисунке:



Четыре других дерева получаются присоединением 2-цепочки к одной из четырёх одновалентных чёрных вершин семирёберного дерева



Пусть белая вершина валентности 3 находится в точке 0, а белые вершины валентности 2 — в точках—корнях многочлена z^3+z^2+az+b. Тогда многочлен

$$p(z) = z^3(z^3+z^2+az+b)^2$$

является многочленом Чебышёва дерева из нашего типа. Положим

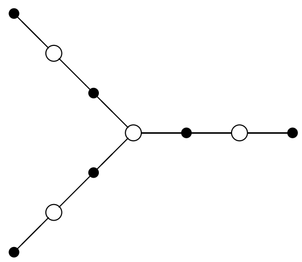
$$q(z) = \frac{p'(z)}{z^2(z^3+z^2+az+b)} = 9z^3+7z^2+5az+3b.$$

Тогда у многочлена $q(z)$ есть корень кратности 2, где находится чёрная вершина валентности 3, и простой корень, где находится чёрная вершина валентности 2. Условия, что дискриминант многочлена $q(z)$ равен нулю и остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $q(z)$ имеет степень 0 по z, дают три уравнения с неизвестными a и b. Вычисление базиса Грёбнера даёт уравнение

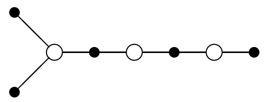
$$(135a-49)(226748160a^5-317447424a^4+ \\ +199734336a^3-72394560a^2+14780556a-1294139)=0.$$

Первый множитель отвечает случаю корня кратности 3 у многочлена $q(z)$. Второй множитель описывает деревья нашего типа. Так как этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, то деревья нашего типа образуют одну орбиту Галуа. Группа Галуа этого многочлена есть S_5.

49: $\langle 3, 2, 2, 2 \mid 2, 2, 2, 1, 1, 1 \rangle$. Этот тип содержит четыре дерева. Одно из них $\mathbb{Z}_3$-симметричное:



Три других дерева получаются присоединением 2-цепочки к одной из трёх чёрных одновалентных вершин семирёберного дерева



Многочлен

$$p(z) = z^3(z^3 - 1)^2$$

является многочленом Чебышёва симметричного дерева. Здесь белая вершина валентности 3 находится в точке 0, белые вершины валентности 2 — в корнях кубических из единицы, а чёрные вершины валентности 2 — в корнях кубических из $1/3$.

Рассмотрим три оставшихся дерева. Пусть, как и выше, белая вершина валентности 3 находится в точке 0, а белые вершины валентности 2 — в точках—корнях многочлена $z^3 + z^2 + az + b$. Тогда многочлен

$$p(z) = z^3(z^3 + z^2 + az + b)^2$$

является многочленом Чебышёва дерева из нашего типа. Положим

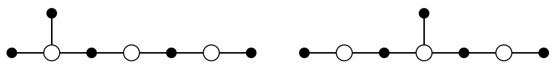
$$q(z) = \frac{p'(z)}{z^2(z^3 + z^2 + az + b)} = 9z^3 + 7z^2 + 5az + 3b.$$

Тогда у многочлена $q(z)$ три простых корня, в которых находятся чёрные вершины валентности 2. Так как остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $q(z)$ имеет степень 0 по z, то мы получаем два уравнения с неизвестными a и b. Вычисляя базис Грёбнера и деля полученный многочлен от a на многочлен, полученный в предыдущем разделе, мы получаем уравнение

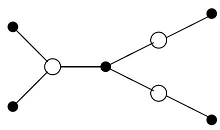
$$2187a^3 - 1215a^2 + 324a - 49 = 0.$$

Так как этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, то деревья нашего типа образуют две орбиты Галуа: одну орбиту кардинальности 1 образует $\mathbb{Z}_3$-симметричное дерево, другая орбита образована тремя несимметричными деревьями.

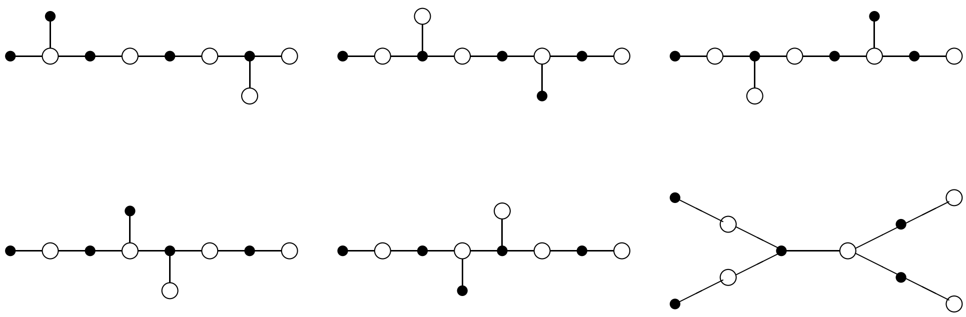
50: $\langle \mathbf{3, 2, 2, 1, 1} \mid \mathbf{3, 2, 2, 1, 1} \rangle$**.** Этот тип содержит 36 деревьев. Шесть из них получаются присоединением двух «хвостиков» к одной из трёх чёрных одновалентных вершин одного из двух семирёберных деревьев ниже:



Следующие 24 дерева получаются присоединением «хвостика» к одной из чёрных двухвалентных вершин этих деревьев, а затем присоединением «хвостика» к чёрной одновалентной вершине: два дерева $\times$ четыре способа присоединения первого «хвостика» $\times$ три способа присоединения второго. Оставшиеся шесть деревьев получаются присоединением двух «хвостиков» к двум *различным* чёрным одновалентным вершинам семирёберного дерева



Шесть из этих 36 деревьев симметричные:



Пусть белая вершина валентности 3 находится в точке 0, белые вершины валентности 2 — в точках—корнях многочлена z^2+z+a, а белые вершины валентности 1 — в точках—корнях многочлена z^2+bz+c. Тогда многочлен

$$p(z) = z^3(z^2+z+a)^2(z^2+bz+c)$$

является многочленом Чебышёва дерева из нашего типа. Положим

$$q(z) = \frac{p'(z)}{z^2(z^2+z+a)} = 9z^4 + 8bz^3 + 7z^3 + 5az^2 + 6bz^2 + 7cz^2 + 4abz + 5cz + 3ac.$$

Многочлен $q(z)$ имеет корень кратности 2, в котором находится чёрная вершина валентности 3, и два простых корня, в которых находятся чёрные вершины валентности 2. Два условия: дискриминант многочлена $q(z)$ равен нулю и остаток от деления многочлена $p(z)$ на многочлен $q(z)$ имеет степень 0 по z, дают четыре уравнения с неизвестными a, b и c. К сожалению, вычисление базиса Грёбнера технически трудно. Исключение неизвестных b и c даёт уравнение на a: a является корнем многочлена 84-й степени. Этот многочлен разлагается над $\mathbb{Q}$ в произведение шести многочленов степеней 6, 6, 6, 12, 24, 30. Первый многочлен 6-й степени описывает случай четырёх простых корней у многочлена $q(z)$ (см. следующий раздел — тип $\langle 3,2,2,1,1 \mid 2,2,2,2,1\rangle$). Второй многочлен 6-й степени описывает случай корня кратности 4 у многочлена $q(z)$, т. е. тип $\langle 5,1,1,1,1 \mid 3,2,2,1,1\rangle$. Третий многочлен 6-й степени

$$5376a^6 - 4752a^5 + 39888a^4 - 37008a^3 + 13212a^2 - 2100a + 125$$

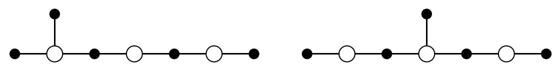
описывает симметричные деревья нашего типа. Он неприводим над $\mathbb{Q}$, и его группа Галуа есть S_6. Многочлен 12-й степени описывает случай двух корней кратности 2 у многочлена $q(z)$, т. е. тип $\langle 3,3,1,1,1 \mid 3,2,2,1,1\rangle$. Многочлен 24-й степени описывает случай корня кратности 3 у многочлена $q(z)$, т. е. тип $\langle 4,2,1,1,1 \mid 3,2,2,1,1\rangle$. Неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен 30-й степени

$$\begin{aligned}
&742772809259704222652104704a^{30} - 2129847981459357083154835046\,4a^{29} + \\
&\quad + 27879303148999614432391606272 0a^{28} - \\
&\quad - 22358538245089413647148322529 28a^{27} + \\
&\quad + 12457619871644645828661360598272a^{26} - \\
&\quad - 51673255973777684058789500992512a^{25} + \\
&\quad + 166502440349383473905380257510144a^{24} - \\
&\quad - 428605781270702564890570617402624a^{23} + \\
&\quad + 898490725802131662483516728108640a^{22} - \\
&\quad - 1554731894811328159413181205714112a^{21} + \\
&\quad + 2242204604557044020646896175841872a^{20} - \\
&\quad - 2713787634580334427185149478562144a^{19} + \\
&\quad + 2770091828549751677792276689351029a^{18} - \\
&\quad - 2392910494749569894616070162466616a^{17} + \\
&\quad + 1753429428939376124526295583127036a^{16} - \\
&\quad - 1091487704944431434617242425087532a^{15} + \\
&\quad + 577609152612331323015438876035028a^{14} - \\
&\quad - 259856617246420977916910849772252a^{13} + \\
&\quad + 99304622968828092755511741069996a^{12} - \\
&\quad - 32179416938211573755556918174000a^{11} + \\
&\quad + 8816250047248562203282928706000a^{10} -
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- 2033109959561866778317365600000a^9 + \\
&+ 392141823069786975658118250000a^8 - \\
&- 62697489750760359169462500000a^7 + 8206725296847538482843750000a^6 - \\
&- 864147888784536665625000000a^5 + 71371630941563671875000000a^4 - \\
&- 4450688820527343750000000a^3 + 196951719726562500000000a^2 - \\
&- 5510526123046875000000a + 73272705078125000000
\end{aligned}
$$

описывает несимметричные деревья нашего типа. Таким образом, наш тип есть объединение двух орбит Галуа: орбиты кардинальности 6, которую образуют симметричные деревья, и орбиты кардинальности 30, которую образуют оставшиеся деревья типа. Следует отметить, что у симметричных деревьев группа вращения равна A_9.

51: $\langle 3, 2, 2, 1, 1 \mid 2, 2, 2, 2, 1 \rangle$. Этот тип содержит шесть деревьев, которые получаются присоединением двух «хвостиков» к двум *различным* чёрным одновалентным вершинам одного из двух семирёберных деревьев ниже:



Используя рассуждения из предыдущего раздела, мы получаем многочлен

$$10752a^6 - 62208a^5 + 127872a^4 - 119712a^3 + 49464a^2 - 9150a + 625,$$

корни которого описывают деревья нашего типа. Так как этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$, то шесть деревьев типа образуют одну орбиту Галуа. Группа Галуа этого многочлена есть S_6.

52: $\langle 2, 2, 2, 2, 1 \mid 2, 2, 2, 2, 1 \rangle$. Этот тип содержит одно дерево — 9-цепочку. Её многочлен Чебышёва — классический многочлен Чебышёва 9-й степени.

Литература

[1] Bétréma J., Péré D., Zvonkin A. Plane Trees and Their Shabat Polynomials. Catalog. — Technical Report LaBRI No. 92-75. — Bordeaux, 1992.