

Слоения, порождённые дифференциалами абелева типа*

Ю. Ю. КОЧЕТКОВ

Московский институт электроники и математики

УДК 511.6+515.162

Ключевые слова: слоения, абелевы дифференциалы.

Аннотация

Изучена геометрия слоений, порождённых некоторыми дифференциалами абелева типа. Получено достаточное условие замкнутости слоёв.

Abstract

Yu. Yu. Kochetkov, Foliations generated by differentials of Abelian type, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 6, pp. 197–205.

The geometry of foliations, generated by some differentials of Abelian type is considered. The case where all fibers are closed is studied.

Рассмотрим дифференциал

$$\eta = \frac{\sqrt{z} dz}{\sqrt{(z-A)(z-B)(z-C)}},$$

где A , B и C — попарно различные ненулевые комплексные числа. Дифференциал η задаёт два слоения на \mathbb{C} : F_r и F_i . Слои F_i — это интегральные кривые уравнения $\operatorname{Im} \eta = 0$, а слои F_r — это интегральные кривые уравнения $\operatorname{Re} \eta = 0$. Наша цель — изучение слоения F_r .

1. Общий случай

Если $|z| \gg 1$, то

$$\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{(z-A)(z-B)(z-C)}} = \frac{1}{z} + O(|z|^{-2}).$$

Поэтому на F_r -слое $\arg(dz) = \pm\pi/2 + \arg(z) + O(|z|^{-1})$, а на F_i -слое $\arg(dz) = \arg(z) + O(|z|^{-1})$. Таким образом, F_r -слой, проходящий через точку z_0 , $|z_0| \gg 1$, мало отличается от окружности с центром в начале координат, а F_i -слой, проходящий через ту же точку, — от радиальной прямой.

*Работа была поддержана РФФИ, проект 04-01-00647.

Лемма 1. Пусть $|z_0| \gg 1$. Тогда F_r -слой, проходящий через z_0 , замкнут.

Доказательство. Обозначим наш F_r -слой через C . Предположим, что C , сделав оборот вокруг начала координат, не замыкается (рис. 1).

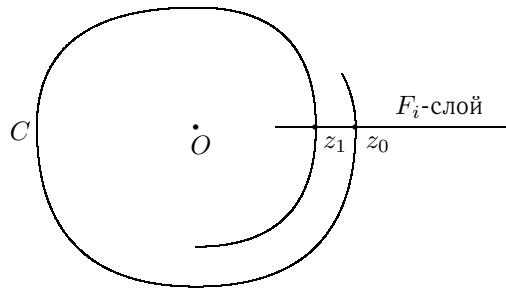


Рис. 1

Пусть D — F_i -слой, проходящий через z_0 , а z_1 — первая точка пересечения D с C при движении по D в сторону начала координат. Рассмотрим замкнутый контур L , образованный частью слоя C на участке от z_0 до z_1 и частью слоя D на участке от z_1 до z_0 . Отметим, что точки ветвления дифференциала η находятся внутри L , поэтому $\int_L \eta = 2\pi i$. Но интеграл по C -части L чисто мнимый по определению F_r -слоя, а интеграл по D -части веществен и не равен нулю. Противоречие. \square

Определение 1. Замкнутый F_r -слой L , такой что точки ветвления A, B, C и 0 лежат внутри L , мы будем называть O -слоем.

Лемма 2. Обозначим через G объединение O -слоёв. Тогда G — открытое множество.

Доказательство. Пусть L — некоторый O -слой и точка z_0 лежит в малой окрестности L . Рассмотрим F_r -слой, проходящий через z_0 . Если он не замыкается, то аргументация, использованная в доказательстве леммы 1, приводит к противоречию. \square

Следствие. Граница S_0 множества G является замкнутым F_r -слоем, содержащим точку ветвления дифференциала η .

Лемма 3. Точка 0 принадлежит S_0 .

Доказательство. Достаточно доказать, что из точек A, B и C выходит только одна дуга F_r -слоя (из точки 0 выходят три дуги). В самом деле, пусть α — аргумент вектора, касательного к траектории F_r -слоя, выходящей из A . Тогда

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\arg(A)}{2} - \frac{\arg(A-B)}{2} - \frac{\arg(A-C)}{2} = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$\alpha = \pm\pi + \arg(A - B) + \arg(A - C) - \arg(A).$$

Если же φ — аргумент вектора, касательного к траектории F_r -слоя, выходящей из точки 0, то

$$\frac{3\varphi}{2} - \frac{3\pi}{2} - \frac{\arg(ABC)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Поэтому

$$\varphi = \frac{\arg(ABC)}{3} + \frac{2\pi n}{3}.$$

Следовательно, замкнутый слой C_0 обязательно проходит через точку 0, а точка A (или B , или C) принадлежит C_0 только в том случае, когда слою принадлежит дуга, соединяющая точки 0 и A . \square

Подведём итог.

Теорема 1. F_r -слоение имеет следующее описание:

- существует замкнутый слой C_0 , содержащий точку 0;
- слои, находящиеся вне C_0 , замкнуты и на бесконечности мало отличаются от окружностей с центром в начале координат;
- точки ветвления A , B и C лежат внутри C_0 , а в исключительных случаях эти точки (все или одна) лежат на C_0 .

Таким образом, поведение F_r -слоения может быть нетривиальным только внутри слоя C_0 .

2. Частный случай

В этом разделе мы подробно рассмотрим случай, когда точка A лежит на оси OX , $A \in (0, +\infty)$, точки B и C лежат на оси OY , $B \in (0, +i\infty)$, $C \in (0, -i\infty)$ и $|B| > |C|$ (рис. 2).

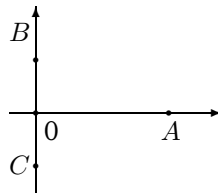


Рис. 2

Мы будем изучать поведение F_r -слоёв внутри замкнутого слоя C_0 . Сначала отметим, что при движении точки z вдоль координатных осей от 0 до A , от 0 до B , от 0 до C , от A до $+\infty$, от B до $+i\infty$ и от C до $-i\infty$ знак $\operatorname{Re} \eta$ не меняется. Теперь рассмотрим обходы точек ветвления.

Лемма 4. Рассмотрим пути обхода точек ветвления (рис. 3).

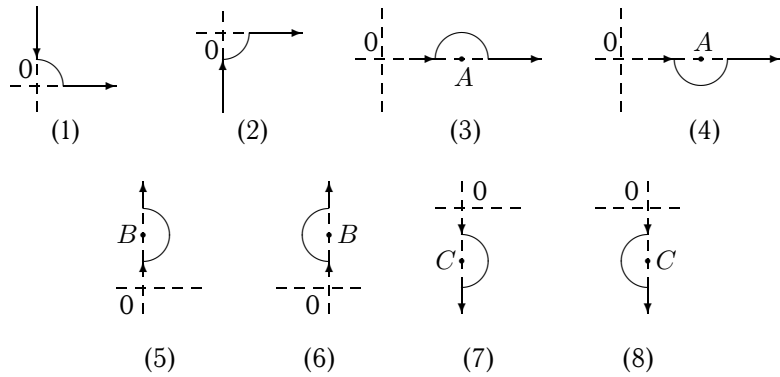


Рис. 3

Тогда

- в случае (1) знак $\text{Re } \eta$ меняется на противоположный;
- в случае (2) знак $\text{Re } \eta$ не меняется;
- в случае (3) знак $\text{Re } \eta$ не меняется;
- в случае (4) знак $\text{Re } \eta$ меняется на противоположный;
- в случае (5) знак $\text{Re } \eta$ не меняется;
- в случае (6) знак $\text{Re } \eta$ меняется на противоположный;
- в случае (7) знак $\text{Re } \eta$ не меняется;
- в случае (8) знак $\text{Re } \eta$ меняется на противоположный.

Доказательство. Докажем лемму в первом случае (остальные случаи рассматриваются аналогично). Пусть $z \in (0, B)$ и $v = (z - A)(z - B)(z - C)$. Тогда

$$\frac{\pi}{2} < \arg(v) < \pi, \quad \pi < \arg(v^{-1}) < \frac{3\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg(zv^{-1}) < 0.$$

Выберем ту ветвь $\sqrt{zv^{-1}}$, на которой

$$-\frac{\pi}{4} < \arg(\sqrt{zv^{-1}}) < 0.$$

Так как мы движемся от B к 0 , то

$$-\frac{3\pi}{4} < \arg(\eta) < -\frac{\pi}{2} \implies \text{Re } \eta < 0.$$

Если z мало, то $\arg(\sqrt{zv^{-1}}) \approx -\pi/4$. При обходе точки O вектор z поворачивается на $\pi/2$ по часовой стрелке, и аргумент $\arg(\sqrt{zv^{-1}})$ становится примерно

равным $-\pi/2$. Вектор v теперь лежит по второй четверти, $\pi/2 < \arg(v) < \pi$ и $-\pi < \arg(v^{-1}) < -\pi/2$. Так как z — вещественное положительное число, то

$$-\frac{\pi}{2} < \arg(\sqrt{zv^{-1}}) < -\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, $\operatorname{Re} \eta > 0$. □

Эти правила позволяют доказать следующий важный результат.

Лемма 5. Пусть

$$a = \int_0^A |\operatorname{Re} \eta|, \quad b = \int_0^B |\operatorname{Re} \eta|, \quad c = \int_0^C |\operatorname{Re} \eta|.$$

Тогда $b = a + c$.

Доказательство. Рассмотрим контур L (рис. 4).

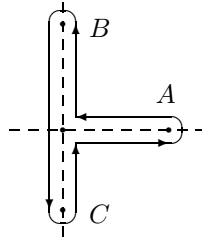


Рис. 4

Так как контур L замкнут и точки ветвления находятся внутри него, то $\int_L \eta = 2\pi i$ и $\int_L \operatorname{Re} \eta = 0$. Выберем такую ветвь η , чтобы на участке от 0 до C имело бы место соотношение $\operatorname{Re} \eta > 0$. Тогда $\operatorname{Re} \eta > 0$ на участке от C до 0; $\operatorname{Re} \eta > 0$ на участке от 0 до A (правило 2); $\operatorname{Re} \eta > 0$ на участке от A до 0; $\operatorname{Re} \eta < 0$ на участке от 0 до B (правило 1); $\operatorname{Re} \eta < 0$ на участке от B до 0. Следовательно, $2c + 2a - 2b = 0$. □

Рассуждая как в доказательстве леммы 3, мы можем найти направления F_r -траекторий, выходящих из точек ветвления (рис. 5):

- векторы, касательные к траекториям, выходящим из точек B и C , направлены в точку A ;
- если α — аргумент вектора, касательного к траектории, выходящей из точки A , то $\arg(B - A) < \alpha < \pi$;
- аргументы векторов, касательных к траекториям, выходящим из точки 0, равны 0 и $\pm 2\pi/3$.

Нам будет удобно называть ось $(0, +\infty)$ A -осью, ось $(0, +i\infty)$ — B -осью, а ось $(0, -i\infty)$ — C -осью. Введём на этих трёх осях новые координаты: если z

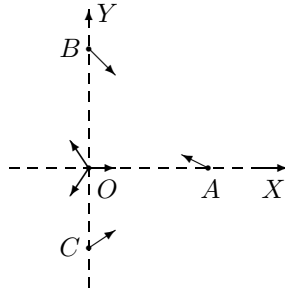


Рис. 5

принадлежит A -, B - или C -оси, то положим $\|z\| = \int_0^z |\operatorname{Re} \eta|$. Тогда $\|A\| = a$, $\|B\| = b$ и $\|C\| = c$.

Теперь дадим описание замкнутого контура C_0 .

Лемма 6. F_r -траектория, образующая контур C_0 , выходит из точки 0 под углом 120° к положительному направлению оси OX . Затем она пересекает B -ось в точке B_1 , $\|B_1\| = 2b$, далее она пересекает A -ось в точке A_1 , $\|A_1\| = 2b$, далее она пересекает C -ось в точке C_1 , $\|C_1\| = 2c$, а затем возвращается в точку 0. Направление возвращения в точку 0 образует угол 60° с положительным направлением оси OX (рис. 6).

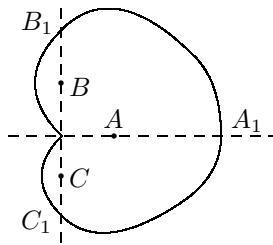


Рис. 6

Доказательство. Достаточно рассмотреть интегралы от $\operatorname{Re} \eta$ по контурам (рис. 7) и воспользоваться правилами леммы 4. □

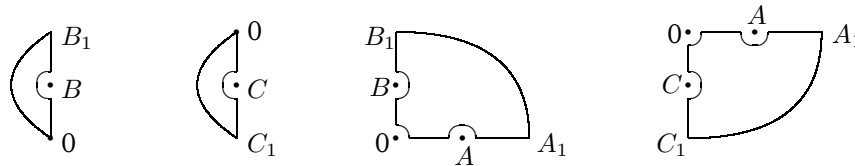


Рис. 7

Теперь рассмотрим F_r -слой, лежащий внутри контура C_0 .

Лемма 7. Пусть L — F_r -слой, лежащий внутри C_0 . Тогда

- 1) если L пересекает B -ось в точке y в направлении первой четверти, то далее L пересекает A -ось в точке x , $\|x\| = \|y\|$;
- 2) если L пересекает B -ось в точке y в направлении второй четверти, то далее, сделав полуоборот вокруг точки B , L пересекает B -ось в точке y_1 , $\|y_1\| = 2b - \|y\|$, т. е.

$$\int_y^B |\operatorname{Re} \eta| = \int_B^{y_1} |\operatorname{Re} \eta|;$$

- 3) если L пересекает C -ось в точке z в направлении четвёртой четверти, то далее L пересекает A -ось в точке x , $\|x\| = \|z\| + 2a$;
- 4) если L пересекает C -ось в точке z в направлении третьей четверти, то далее, сделав полуоборот вокруг точки C , L пересекает C -ось в точке z_1 , $\|z_1\| = 2c - \|z\|$, т. е.

$$\int_z^C |\operatorname{Re} \eta| = \int_C^{z_1} |\operatorname{Re} \eta|;$$

- 5) если L пересекает A -ось в точке x в направлении четвёртой четверти, то
 - а) если $\|x\| > 2a$, то далее L пересекает C -ось в точке z , $\|z\| = \|x\| - 2a$ (см. пункт 3));
 - б) если $\|x\| < 2a$, то далее, сделав полуоборот вокруг точки A , L пересекает A -ось в точке x_1 , $\|x_1\| = 2a - \|x\|$, т. е.

$$\int_x^A |\operatorname{Re} \eta| = \int_A^{x_1} |\operatorname{Re} \eta|;$$

- в) если $\|x\| = 2a$, то L попадает в точку 0;
- 6) если L пересекает A -ось в точке x в направлении первой четверти, то далее L пересекает B -ось в точке y , $\|y\| = \|x\|$ (см. пункт 1)).

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 6. \square

Пример. Пусть $a = 1$, $c = 2$, тогда $b = 3$. Рассмотрим поведение F_r -слоя, который проходит через точку y , $\|y\| = 11/2$, на B -оси в направлении первой четверти (рис. 8). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{11}{2}(B) &\rightarrow \frac{11}{2}(A) \rightarrow \frac{7}{2}(C) \rightarrow \frac{1}{2}(C) \rightarrow \frac{5}{2}(A) \rightarrow \frac{5}{2}(B) \rightarrow \frac{7}{2}(B) \rightarrow \frac{7}{2}(A) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{3}{2}(C) \rightarrow \frac{5}{2}(C) \rightarrow \frac{9}{2}(A) \rightarrow \frac{9}{2}(B) \rightarrow \frac{3}{2}(B) \rightarrow \frac{3}{2}(A) \rightarrow \frac{1}{2}(A) \rightarrow \frac{1}{2}(B) \rightarrow \frac{11}{2}(B). \end{aligned}$$

Слой замкнулся.

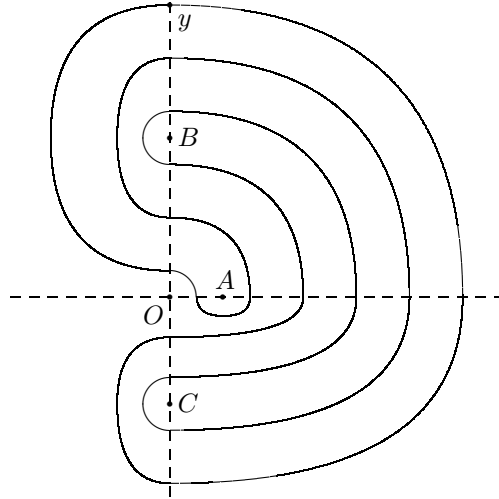


Рис. 8

Этот пример указывает, как должны выглядеть условия замкнутости F_r -слоёв внутри контура C_0 .

Теорема 2. Если a и c соизмеримы, то все F_r -слои внутри контура C_0 замкнуты. В противном случае все F_r -слои внутри контура C_0 незамкнуты.

Доказательство. Рассмотрим замкнутый F_r -слой (траекторию) L , лежащий внутри контура C_0 . Предположим сначала, что L не содержит точек ветвления. Пусть L пересекает B -ось в точке с координатой y в направлении первой четверти. Тогда траектория будет пересекать оси следующим образом:

$$\begin{aligned} y(B) \rightarrow y(A) \rightarrow y - 2a(C) \rightarrow 2c + 2a - y(C) \rightarrow 2c + 4a - y(A) \rightarrow \\ \rightarrow 2c + 4a - y(B) \rightarrow y - 2a(B) \rightarrow y - 2a(A). \end{aligned}$$

Далее траектория будет пересекать A -ось в направлении четвёртой четверти в точках $y - 4a, y - 6a, \dots$. Если $y - 2ka > 0$, но $y - 2(k+1)a < 0$, то траектория после пересечения A -оси в точке $y - 2ka$ делает полуоборот вокруг точки A , пересекает A -ось в точке $2(k+1)a - y$ в направлении первой четверти, пересекает B -ось в точке $2(k+1)a - y$ в направлении второй четверти и, сделав полуоборот вокруг точки B , пересекает B -ось в точке $y + 2c - 2ka$ в направлении первой четверти.

Другими словами, траектория L пересекает B -ось в точках вида $2lc - 2ka - y$ в направлении второй четверти и в точках вида $y + 2mc - 2na$ в направлении первой четверти. Так как траектория замкнута, то либо $y = y + 2mc - 2na$, либо $y = 2lc - 2ka - y$. Но во втором случае траектория попала в точку ветвления, «вышла из неё в противоположном направлении и вернулась в y ». Так как L по

предположению не содержит точек ветвления, то $y = y + 2mc - 2na$, и a и c соизмеримы.

Если замкнутая траектория содержит точку ветвления, то она выходит из точки ветвления и приходит в другую точку ветвления. В этом случае надо, например, положить $y = b = a + c$ и рассматривать равенства

- $a + c + 2mc - 2na = a$ (траектория попала в A);
- $a + c + 2mc - 2na = c$ (траектория попала в C);
- $2lc - 2ka - a - c = 0$ (траектория попала в 0).

Все эти случаи дают соизмеримость a и c .

Пусть теперь a и c соизмеримы: $a = kc/l$, $b = (k+l)c/l$. Проводя вычисления как выше в единицах c , мы получим, что траектория будет пересекать B -ось в точках вида $\pm y + s/l$, где знаменатель l фиксирован, а числитель s ограничен. Это доказывает замкнутость каждой траектории в соизмеримом случае. \square

Пример. Пусть $a = 0$, $b = c$. В этом случае $B = -C$, и слоение выглядит так, как изображено на рис. 9 (точками показана типичный слой внутри C_0).

Пример. Пусть $c = a$, $b = 2a$. Слоение выглядит так, как изображено на рис. 10 (точками показан типичный слой внутри C_0).

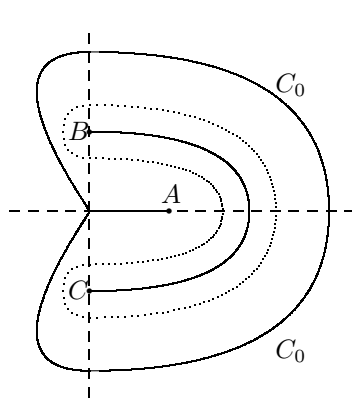


Рис. 9

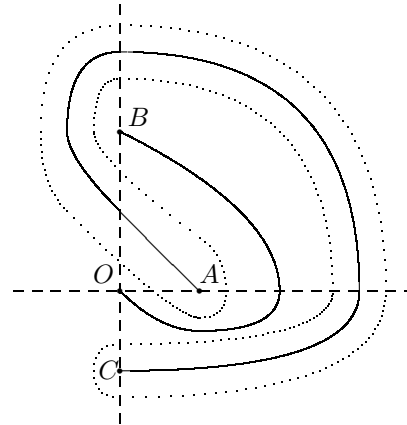


Рис. 10

Если a и c несоизмеримы, то траектория внутри контура C_0 плотна во внутренности C_0 и демонстрирует псевдослучайное поведение.

