О деревьях, накрывающих цепи или звёзды

Ф. Б. ПАКОВИЧ
Университет Бен-Гуриона в Негеве, Израиль
e-mail: pakovich@math.bgu.ac.il

УДК 511.6+519.17

Ключевые слова: детские рисунки Гротендика, плоские деревья, кручения на кривых.

Аннотация

В статье в рамках теории детских рисунков даётся комбинаторный критерий того, что плоское дерево накрывает дерево из класса цепей или звёзд. Обсуждаются некоторые приложения полученного результата, связанные с арифметической теорией кручения на кривых.

Abstract

F. B. Pakovich, On trees covering chains or stars, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 6, pp. 207—215.

In this paper, in the context of the “dessins d'enfants” theory, we give a combinatorial criterion for a plane tree to cover a tree from the classes of “chains” or “stars.” We also discuss some applications of this result that are related to the arithmetical theory of torsion on curves.

1. Введение

В настоящей работе в рамках теории детских рисунков Гротендика описываются комбинаторные условия того, что n-рёберное плоское дерево λ накрывает d-рёберное дерево из класса цепей или звёзд (рис. 1). Поскольку для d-рёберной

Рис. 1

цепи (для d-рёберной звезды) соответствующий полином Шабата эквивалентен полиному Чебышёва $T_d(z)$ (соответственно полиному z^d), эти условия эквивалентны требованию того, что после подходящей нормализации полином Шабата $P(z)$, соответствующий λ, допускает композиционную факторизацию вида $P(z) = T_d\big(\tilde{P}(z)\big)$ (соответственно $P(z) = \big(\tilde{P}(z)\big)^d$). Основной результат работы

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 6, с. 207—215.

вместе с наброском доказательства был анонсирован в [1]. В настоящей работе мы приводим подробное доказательство и обсуждаем некоторые приложения.

В случае цепей исследуемый вопрос связан с арифметикой гиперэллиптических кривых через конструкцию, предложенную в [7]. Эта конструкция ставит в соответствие каждому n-рёберному дереву λ гиперэллиптическую кривую H_λ, определённую над полем модулей λ, такую что дивизор $n(\rho_\infty^+ - \rho_\infty^-)$, где ρ_∞^+, ρ_∞^- — точки H_λ, лежащие над бесконечностью, является главным. Порядок дивизора $\rho_\infty^+ - \rho_\infty^-$ в группе Пикара H_λ равен n/d_c, где d_c — максимальное число, такое что λ накрывает d_c-рёберную цепь. Этот порядок является инвариантом действия абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ на плоских деревьях, и именно вычисление этого инварианта в чисто комбинаторных терминах послужило основной мотивацией для написания этой статьи.

Для дерева λ определим *ветвь*, растущую из вершины u, как максимальный подграф дерева λ, для которого u является вершиной валентности 1. Ориентация сферы индуцирует естественное циклическое упорядочение на множестве ветвей, растущих из общей вершины. Назовём две ветви *соседними*, если они растут из общей вершины и одна из них следует за другой относительно этого упорядочения. Число рёбер ветви a называется её *весом* и обозначается через $|a|$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть λ — n-рёберное дерево и $d \mid n$. Тогда λ накрывает d-рёберную цепь (d-рёберную звезду), если и только если сумма (соответственно разность) весов любых двух соседних ветвей λ делится на d.*

Нетрудно убедиться, что для n-рёберного дерева λ максимальное число d_c (максимальное число d_s), такое что λ накрывает d_c-рёберную цепь (соответственно d_s-рёберную звезду), является инвариантом действия группы $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ на деревьях. Теорема 1.1 даёт чисто комбинаторное описание этих инвариантов.

Следствие 1.1. *Для дерева λ инвариант d_c (d_s) равен наибольшему общему делителю всех сумм $|a|+|b|$ (соответственно всех разностей $|a|-|b|$), таких что a и b являются соседними ветвями λ.*

Статья имеет следующую структуру. Сначала мы напоминаем конструкцию из [7], которая объясняет комбинаторный смысл инварианта d_c, и обсуждаем некоторые ситуации, в которых теорема 1.1 и следствие 1.1 могут быть использованы. Затем мы формулируем условия, при которых одноклеточный эскиз λ накрывает другой одноклеточный эскиз или является цепью или звездой, в терминах арифметических свойств канонической инволюции на множестве ориентированных рёбер λ. Наконец, мы доказываем теорему 1.1 и обсуждаем некоторые её частные случаи.

Ниже мы будем свободно пользоваться основными определениями и конструкциями теории детских рисунков (см., например, [3, 8]). Отметим, что в данной работе, в отличие от статьи [7], все рассматриваемые эскизы и функции Белого предполагаются чистыми.

2. Плоские деревья и гиперэллиптические кривые

В этом разделе мы напоминаем конструкцию из [7], которая ставит в соответствие n-рёберному дереву λ с полем модулей k_λ гиперэллиптическую кривую H_λ, определённую над k_λ, такую что дивизор $n(\rho_\infty^+ - \rho_\infty^-)$, где ρ_∞^+, ρ_∞^- — точки кривой H_λ, лежащие над бесконечностью, является главным.

Для дерева λ и полинома $\beta(z)$ из соответствующего класса эквивалентности функций Белого, положим

$$H_\lambda\colon w^2 = R(z),$$

где $R(z)$ — полином со старшим коэффициентом 1, корни которого просты и являются нулями нечётной кратности полинома $\beta(z)$. Другими словами, корни $R(z)$ совпадают с вершинами нечётной валентности дерева λ, отождествлённого с прообразом отрезка $[0,1]$ при отображении $\beta(z)\colon \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$.

Предложение 2.1 [7]. *Пусть λ — n-рёберное дерево. Тогда кривая H_λ определена над k_λ и дивизор $n(\rho_\infty^+ - \rho_\infty^-)$ является главным. Более того, порядок дивизора $\rho_\infty^+ - \rho_\infty^-$ в группе Пикара кривой H_λ равен n/d_c, где d_c — максимальное такое число, что λ накрывает d_c-рёберную цепь.*

Для того чтобы эффективно использовать предложение 2.1, необходимо обладать выражением для порядка дивизора $\rho_\infty^+ - \rho_\infty^-$ в группе Пикара кривой H_λ в чисто комбинаторных терминах, и следствие 1.1 даёт такое выражение. Ниже мы кратко обсудим некоторые приложения предложения 2.1.

Для любого дерева λ общее число его вершин нечётной валентности o_λ является чётным и $o_\lambda = 2$, если и только если λ является цепью. Род g_λ кривой H_λ выражается через o_λ по формуле $g_\lambda = (o_\lambda - 2)/2$. Следовательно, первые интересные примеры, к которым конструкция, данная выше, может быть применена, — это деревья с четырьмя вершинами нечётной валентности. Этот класс состоит из деревьев, гомеоморфных или букве X, или букве Y (рис. 2), и приводит к эллиптическим кривым. Заметим, что после перехода к канонической форме Вейерштрасса дивизор $\rho_\infty^+ - \rho_\infty^-$ переходит в точку конечного порядка (A, B) на кривой H_λ, такую что $A, B \in k_\lambda$.

Рис. 2

Например, пятирёберное Y-дерево λ_1, изображённое на рис. 2, приводит к точке $(21, -243)$ порядка 5 на кривой $w^2 = 4v^3 + 540v + 10665$ (см. [7]). С другой стороны, шестирёберное X-дерево λ_2, изображённое там же, приводит к точке $(3, -16)$ на кривой $w^2 = 4v^3 + 84v - 104$. В последнем случае порядок соответствующей точки равен 3, поскольку, как легко проверить, из теоремы 1.1 следует, что $d_c(\lambda_2) = 2$.

Предложение 2.1 позволяет использовать для изучения X- и Y-деревьев развитую арифметическую теорию эллиптических кривых. Так, в [7] в качестве следствия описания возможных групп кручения $E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}}$ для эллиптических кривых над $\mathbb{Q}$, данного Мазуром [5], был получен полный список Y-деревьев, определённых над $\mathbb{Q}$. Более общо, используя результат Мереля [6], можно дать *нижнюю* оценку степеней расширений над $\mathbb{Q}$ полей модулей X- и Y-деревьев, зависящую только от инварианта d_c (см. [7]).

Другое интересное приложение предложения 2.1 — это метод нахождения примеров рациональных дивизоров конечного порядка на кривых, определённых над $\mathbb{Q}$ (или, более общо, над числовыми полями), рода $g > 1$. Поскольку для кривых рода $g > 1$ результатов, аналогичных результатам Мазура и Мереля, не существует, интересно, насколько большим порядок такого дивизора может быть относительно g (см. [2,4]). Используя предложение 2.1 и некоторые специальные серии деревьев, можно получить, например, следующий результат [7]: для любого m из интервала $g+1 \leqslant m \leqslant 2g+1$ существует гиперэллиптическая кривая рода g, определённая над $\mathbb{Q}$, с рациональным дивизором порядка m. Отметим, что для того чтобы доказать этот результат, нет необходимости вычислять функции Белого; вся необходимая информация может быть получена из комбинаторного анализа соответствующих деревьев.

3. Условия, влекущие, что одноклеточный эскиз λ накрывает другой эскиз или является цепью или звездой

Напомним, что *группа вращений рёбер* $\mathrm{ER}(\lambda)$ эскиза λ — это группа перестановок рёбер λ, порождённая двумя перестановками ρ_0 и ρ_1. Перестановка ρ_0 циклически переставляет ориентированные рёбра эскиза λ в порядке, индуцированном ориентацией поверхности, на которой он находится, вокруг вершин, из которых они растут, а перестановка ρ_1 обращает ориентацию рёбер. Очевидно, $\mathrm{ER}(\lambda)$ может быть отождествлена с группой монодромии функции Белого, соответствующей эскизу λ.

Пусть λ — n-рёберный одноклеточный эскиз. Тогда перестановка $\rho_0\rho_1$ является циклом длины $2n$. Свяжем с λ перестановку $\varphi_\lambda \subset S_{2n}$ следующим образом: занумеруем ориентированные ребра λ числами $0, 1, \ldots, 2n-1$ так, чтобы цикл $\rho_0\rho_1$ совпадал с циклом $(0\,1\ldots 2n-1)$, и положим $\varphi_\lambda(i) = \rho_1(i)$. Таким образом, φ_λ совпадает с ρ_1, но мы используем специальные обозначения, чтобы подчеркнуть, что ориентированные рёбра дерева λ пронумерованы специальным образом. Отметим, что перестановка φ_λ является инволюцией без неподвижных точек и определена с точностью до сопряжённости некоторой степенью цикла $(0\,1\ldots 2n-1)$. Наоборот, отталкиваясь от инволюции без неподвижных точек φ_λ, определённой на множестве $\{0, 1, \ldots, 2n-1\}$, можно сконструировать

n-рёберный одноклеточный эскиз следующим образом: занумеровать циклически ребра $2n$-угольника числами $0, 1, \ldots, 2n-1$ и склеить их вдоль φ_λ. При этом две инволюции приводят к тому же эскизу, если и только если они сопряжены некоторой степенью цикла $(0\,1 \ldots 2n-1)$.

Удобно считать, что инволюция φ_λ определена на всём множестве $\mathbb{Z}$, полагая значение $\varphi_\lambda(j)$ для $j = 2nl + \tilde{\jmath}$, где $l, \tilde{\jmath} \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant \tilde{\jmath} \leqslant 2n-1$, равным $2nl + \varphi_\lambda(\tilde{\jmath})$.

Предложение 3.1. *Пусть λ — n-рёберный одноклеточный эскиз и d — делитель n. Тогда λ накрывает некоторый d-рёберный эскиз μ, если и только если*

$$\varphi_\lambda(i+2d) \equiv \varphi_\lambda(i) \pmod{2d} \quad \text{и} \quad \varphi_\lambda(i) \not\equiv i \pmod{2d} \tag{1}$$

для любого $i \in \mathbb{Z}$. Более того, если это условие выполнено, то эскиз μ также одноклеточный и однозначно определён условием $\varphi_\mu(i) \equiv \varphi_\lambda(i) \pmod{2d}$.

Доказательство. Действительно, n-рёберный эскиз λ накрывает d-рёберный эскиз μ, если и только если группа $\mathrm{ER}(\lambda)$ обладает системой импримитивности Ω, имеющей $2d$ блоков, таких что перестановка множества блоков системы Ω, индуцированная перестановкой φ_λ, не имеет неподвижных точек. Поскольку $\mathrm{ER}(\lambda)$ содержит цикл $(0\,1 \ldots 2n-1)$, такая система импримитивности может быть только набором множеств A_i, $0 \leqslant i \leqslant 2d-1$, состоящих из чисел, сравнимых с i по модулю $2d$. Более того, поскольку перестановки $(0\,1 \ldots 2n-1)$ и $\rho_1 = \varphi_\lambda$ порождают $\mathrm{ER}(\lambda)$, набор множеств A_i, $0 \leqslant i \leqslant 2d-1$, является системой импримитивности, если и только если $\varphi_\lambda(A_i) = A_{\varphi(i)}$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant 2d-1$. Это требование эквивалентно первому условию предложения. Второе условие предложения эквивалентно требованию, что перестановка на множестве блоков системы импримитивности Ω, индуцированная перестановкой φ_λ, не имеет неподвижных точек. $\square$

Следствие 3.1. *Пусть λ — n-рёберное дерево. Тогда λ накрывает некоторое d-рёберное дерево, если и только если*

$$\varphi_\lambda(i+2d) \equiv \varphi_\lambda(i) \pmod{2d} \tag{2}$$

для любого $i \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Действительно, если λ — d-рёберное дерево, то

$$\varphi_\lambda(i) - i \equiv 2|a_i| - 1 \pmod{2n}, \tag{3}$$

где a_i обозначает ветвь дерева λ, которая содержит ориентированное ребро с номером i и растёт из начальной точки этого ребра (рис. 3). Следовательно,

$$\varphi_\lambda(i) - i \equiv 1 \pmod{2} \tag{4}$$

и, значит, условия (1) всегда выполняются. Более того, поскольку λ является деревом, эскиз μ также является деревом. $\square$

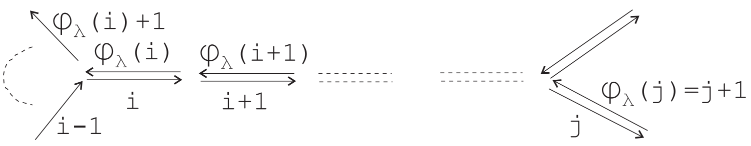

Рис. 3

Предложение 3.2. *Пусть μ — d-рёберный одноклеточный эскиз. Тогда μ является цепью, если и только если*

$$\varphi_\mu(i) - \varphi_\mu(i+1) \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 2d) \tag{5}$$

для любого $i \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Эскиз μ является d-рёберной цепью, если и только если φ_μ имеет вид

$$\varphi_\mu(j) = \begin{cases} \varphi_\mu(0) - j, & \text{если } 0 \leqslant j \leqslant \varphi_\mu(0), \\ 2d + \varphi_\mu(0) - j, & \text{если } \varphi_\mu(0) < j \leqslant 2d-1, \end{cases} \tag{6}$$

где $\varphi_\mu(0)$ является нечётным числом между 1 и $2d-1$ (рис. 4). Очевидно, условие (6) влечёт условие (5).

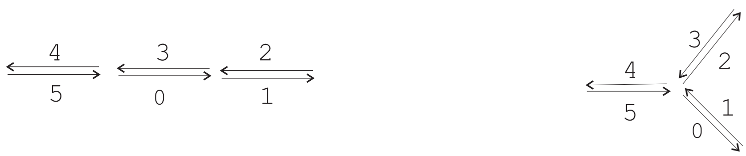

Рис. 4

Наоборот, суммируя равенства (5) от $i=0$ до $i=j-1$, мы находим, что

$$\varphi_\mu(j) \equiv \varphi_\mu(0) - j \,(\mathrm{mod}\ 2d).$$

Отсюда следует, что φ_μ имеет форму (6). Для того чтобы установить, что $\varphi_\mu(0)$ является нечётным, заметим, что если $\varphi_\mu(0) = 2l$ для некоторого l, $0 \leqslant l \leqslant d-1$, то из соотношения (6) следует, что $\varphi_\mu(l) = l$, что противоречит (4). □

Предложение 3.3. *Пусть μ — d-рёберный одноклеточный эскиз, имеющий по крайней мере одну вершину валентности 1. Тогда μ является звездой, если и только если*

$$\varphi_\mu(i) + \varphi_\mu(i+1) \equiv 2i+1 \,(\mathrm{mod}\ 2d) \tag{7}$$

для любого $i \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Эскиз μ является d-рёберной звездой, если и только если φ_μ имеет вид

$$\varphi_\mu(j) = \begin{cases} j + (-1)^j \varphi_\mu(0), & \text{если } 0 \leqslant j + (-1)^j \varphi_\mu(0) \leqslant 2d-1, \\ j + (-1)^j \varphi_\mu(0) - 2d, & \text{если } 2d-1 < j + (-1)^j \varphi_\mu(0), \\ 2d + j + (-1)^j \varphi_\mu(0), & \text{если } j + (-1)^j \varphi_\mu(0) < 0, \end{cases} \tag{8}$$

где или $\varphi_\mu(0) = 1$, или $\varphi_\mu(0) = 2d-1$ (см. рис. 4). Очевидно, условие (8) влечёт условие (7).

Наоборот, поскольку

$$\varphi_\mu(0) + (-1)^{j-1}\varphi_\mu(j) = \sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i\bigl(\varphi_\mu(i) + \varphi_\mu(i+1)\bigr) \equiv \sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i(2i+1) \pmod{2d}$$

и

$$\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i(2i+1) = (-1)^{j-1}j,$$

справедливо равенство

$$\varphi_\mu(j) \equiv j + (-1)^j \varphi_\mu(0) \pmod{2d}. \tag{9}$$

Отсюда следует, что φ_μ имеет вид (8). Для того чтобы показать, что $\varphi_\mu(0) \equiv \pm 1 \pmod{2d}$, заметим, что, поскольку μ имеет по крайней мере одну вершину валентности 1, перестановка ρ_0 имеет по крайней мере одну неподвижную точку l. Поскольку $\rho_0 = (0\,1 \ldots 2d-1)\varphi_\mu$, из равенств $\rho_0(l) = l$ и (9) следует, что $\varphi_\mu(0) \equiv \pm 1 \pmod{2d}$. $\square$

Следствие 3.2. *Пусть λ — n-рёберное дерево. Тогда λ накрывает d-рёберную цепь (d-рёберную звезду), если и только если*

$$\varphi_\lambda(i) - \varphi_\lambda(i+1) \equiv 1 \pmod{2d} \tag{10}$$

$$(\text{соответственно} \;\; \varphi_\lambda(i) + \varphi_\lambda(i+1) \equiv 2i+1 \pmod{2d}) \tag{11}$$

для любого $i \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Действительно, если n-рёберное дерево λ накрывает d-рёберное дерево μ, то согласно следствию 3.1 выполнено равенство (2). Более того, если μ является d-рёберной цепью (d-рёберной звездой), то согласно предложению 3.2 (соответственно предложению 3.3) выполняется равенство (5) (соответственно равенство (7)). Поскольку $\varphi_\mu(i) \equiv \varphi_\lambda(i) \pmod{2d}$, выполняется условие (10) (соответственно условие (11)).

Наоборот, рассуждая, как выше, мы заключаем, что из условия (10) (условия (11)) вытекает, что

$$\varphi_\lambda(j) \equiv \varphi_\lambda(0) - j \pmod{2d} \tag{12}$$

$$(\text{соответственно} \;\; \varphi_\lambda(j) \equiv j + (-1)^j \varphi_\lambda(0) \pmod{2d}). \tag{13}$$

Поскольку (12), так же как и (13), влечёт (2), из следствия 3.1 вытекает, что λ накрывает некоторое d-рёберное дерево μ. Более того, поскольку из (10) ((11)) следует (5) (соответственно (7)), по предложению 3.2 (соответственно по предложению 3.3, принимая в расчёт, что любое дерево имеет вершины валентности 1) получаем, что μ является d-рёберной цепью (соответственно d-рёберной звездой). $\square$

4. Доказательство теоремы 1.1

Ввиду следствия 3.2, для того чтобы доказать теорему 1.1, достаточно показать, что условия (10), (11) в действительности эквивалентны условиям, описанным в теореме. Чтобы установить это, заметим, что согласно формуле (3) для любого i, $0 \leqslant i \leqslant 2n-2$, справедливо равенство

$$\varphi_\lambda(i+1) - \varphi_\lambda(i) + 1 = \bigl(\varphi_\lambda(i+1) - (i+1)\bigr) + \bigl(i - \varphi_\lambda(i)\bigr) + 2 \equiv \\ \equiv 2|a_{i+1}| + 2|a_{\varphi_\lambda(i)}| \pmod{2d}.$$

Поскольку ветви a_{i+1} и $a_{\varphi_\lambda(i)}$ соседние и любые две соседние ветви имеют такую форму для некоторого i (рис. 5), условие (10) выполняется, если и только если сумма весов любых двух соседних ветвей дерева λ делится на d.

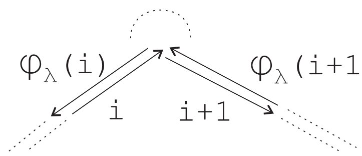

Рис. 5

Подобным образом получаем

$$\varphi_\lambda(i+1) + \varphi_\lambda(i) - (2i+1) = \bigl(\varphi_\lambda(i+1) - (i+1)\bigr) - \bigl(i - \varphi_\lambda(i)\bigr) \equiv \\ \equiv 2|a_{i+1}| - 2|a_{\varphi_\lambda(i)}| \pmod{2d}.$$

Следовательно, условие (11) выполняется, если и только если разность любых двух соседних ветвей дерева λ делится на d.

Отметим, что условие теоремы, касающееся цепей, автоматически выполнено в любой вершине валентности 2. В частности, n-рёберная цепь накрывает d-рёберную цепь, если и только если $d \mid n$, что соответствует разложению $T_n(z) = T_d\bigl(T_{n/d}(z)\bigr)$. С другой стороны, для вершины u, валентность которой является нечётным числом k, это условие эквивалентно требованию, что $d \mid |a|$ для любой ветви a, растущей из u. Действительно, множество всех ветвей, растущих из u, имеет вид $a_i, a_{\rho_0(i)}, a_{\rho_0^2(i)}, \ldots, a_{\rho_0^{k-1}(i)}$ для некоторого i,

$0 \leqslant i \leqslant 2n-1$. Поскольку k нечётно, для любого $j \geqslant 0$ справедливо равенство

$$|a_{\rho_0^{j+1}(i)}| - |a_{\rho_0^j(i)}| = \sum_{s=0}^{k-2} (-1)^s \big(|a_{\rho_0^{j+s+1}(i)}| + |a_{\rho_0^{j+s+2}(i)}| \big) \equiv 0 \pmod d.$$

С учётом равенства

$$|a_{\rho_0^{j+1}(i)}| + |a_{\rho_0^j(i)}| \equiv 0 \pmod d, \quad j \geqslant 0, \tag{14}$$

получаем, что $2|a_{\rho_0^j(i)}| \equiv 0 \pmod d$ для любого j, $0 \leqslant j \leqslant k-1$. Значит, или $|a_{\rho_0^j(i)}| \equiv 0 \pmod d$, или $|a_{\rho_0^j(i)}| \equiv d/2 \pmod d$. Если для всех j, $0 \leqslant j \leqslant k-1$, выполняется $|a_{\rho_0^j(i)}| \equiv d/2 \pmod d$, то, суммируя эти равенства и принимая в расчёт, что k нечётно, мы заключаем, что

$$n = |a_i| + |a_{\rho_0(i)}| + \ldots + |a_{\rho_0^{k-1}(i)}| \equiv d/2 \pmod d,$$

что противоречит тому, что $d \mid n$. Следовательно, $d \mid |a_{\rho_0^j(i)}|$ по крайней мере для одного j, $0 \leqslant j \leqslant k-1$. Теперь из равенств (14) вытекает по индукции, что $d \mid |a_{\rho_0^j(i)}|$ для всех j, $0 \leqslant j \leqslant k-1$.

Литература

[1] Пакович Ф. О деревьях, допускающих морфизмы на звёзды или цепи // Успехи мат. наук. — 2000. — Т. 55, № 3. — С. 593—594.

[2] Flynn E. F. The arithmetic of hyperelliptic curves // Algorithms in Algebraic Geometry and Applications. — Boston: Birkhäuser, 1996. — (Progress Math.; Vol. 143). — P. 165—175.

[3] Geometric Galois Actions / L. Schneps, P. Lochak, eds. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vols. 242, 243). — Vol. 1: Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme; Vol. 2: The Inverse Galois Problem, Moduli Spaces and Mapping Class Groups.

[4] Leprévost F. Famille de courbes hyperelliptique de genre g munies d'une classe de diviseurs rationnels d'ordre $2g^2+4g+1$ // Séminaire de théorie des nombres, Paris, France, 1991—1992. — Boston: Birkhäuser, 1994. — (Progress Math.; Vol. 116). — P. 107—119 (1994).

[5] Mazur B. Rational points on modular curves // Modular Functions of One Variable. V. — Berlin: Springer, 1977. — (Lect. Notes Math.; Vol. 601). — P. 107—148.

[6] Merel L. Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres // Invent. Math. — 1996. — Vol. 124, no. 1—3. — P. 437—449.

[7] Pakovitch F. Combinatoire des arbres planaires et arithmétique des courbes hyperelliptiques // Ann. Inst. Fourier. — 1998. — Vol. 48, no. 2. — P. 1001—1029.

[8] The Grothendieck Theory of Dessins D'enfants / L. Schneps, ed. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 200).