

Параметризация Чехова—Фока пространств Тайхмюллера и детские рисунки*

Г. Б. ШАБАТ

Российский государственный гуманитарный университет

В. И. ЗОЛОТАРСКАЯ

Аудиторская компания «Делойт»

УДК 512.7+515.162

Ключевые слова: детские рисунки, ленточные графы, пространства Тайхмюллера, фуксовы группы.

Аннотация

Конструкция Чехова—Фока, ставящая в соответствие трёхвалентному ленточному графу с вещественными числами на рёбрах комплексную структуру, переформулируется в картографических терминах. Оказывается, конструкция «детских рисунков» соответствует нулям на рёбрах. Обсуждаются два примера и предлагается дальнейшее развитие теории.

Abstract

G. B. Shabat, V. I. Zolotarskaia, The Chekhov–Fock parametrization of Teichmüller spaces and dessins d’enfants, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 6, pp. 217–226.

The construction of Chekhov and Fock, which associates a complex structure to a trivalent ribbon graph with real numbers on its edges, is reformulated in cartographic terms. It turns out that the “dessins d’enfants” construction corresponds to zero numbers. Two examples are discussed, and the future development of the theory is suggested.

Введение

Имеется несколько способов поставить в соответствие ленточному графу комплексную структуру. Наиболее известны конструкция Концевича [2], конструкция Пеннера [6] и конструкция, связанная с детскими рисунками [8]. В первых двух конструкциях ленточные графы рассматриваются с дополнительными структурами: каждому ребру ставится в соответствие вещественное число. Варьируя эти числа, мы получаем различные римановы поверхности, определяя тем самым стратификации пространств модулей. Известно, что конструкции Концевича и Пеннера дают стратификации, которые эквивалентны комбинаторно, но различаются теоретико-множественно; открытые клетки соответствуют

*Работа поддержана грантами РФФИ 07-01-00441-а и НШ-5666.2006.1.

тривалентным графам. В конструкции, связанной с детскими рисунками, ленточному графу ставится в соответствие единственная риманова поверхность (в этой работе мы обычно называем *детским рисунком* примерно то же, что называют *ленточным графом*, однако мы предпочитаем называть *рисунками* поверхности с дополнительными структурами). Мы называем эту риманову поверхность *моделью Гротендика* ленточного графа.

Возникает следующий вопрос: какие числа надо выбрать в первых двух конструкциях, чтобы получить модель Гротендика ленточного графа? Ответы были получены в работах [4, 8]. Оказывается, все эти числа должны быть нулевыми.

Цель настоящей работы — обсудить с той же точки зрения ещё одну конструкцию, конструкцию Чехова—Фока [3]. Как и в других упоминавшихся конструкциях, вариации чисел на рёбрах задают параметризации соответствующих пространств Тайхмюллера. Мы приводим *картографическое* обоснование этой конструкции и доказываем, что модель Гротендика ленточного графа также соответствует нулям на рёбрах.

1. Картография

Пусть Γ — трёхвалентный ленточный граф, т. е. граф (петли разрешены!), валентности всех вершин которого равны 3, с заданным циклическим порядком рёбер в каждой вершине. Пусть \vec{E} — множество направленных рёбер графа Γ . Так называемая *картографическая группа* \mathcal{C}_2^+ действует на \vec{E} . Эта группа порождена элементами ρ_0 и ρ_1 . Элемент ρ_0 поворачивает направленное ребро против часовой стрелки вокруг его начала (реализуя таким образом упомянутый выше циклический порядок), ρ_1 изменяет направления рёбер (см. [8]). Как абстрактная группа картографическая группа определяется следующим образом:

$$\mathcal{C}_2^+ := \langle \rho_0, \rho_1 \mid \rho_1^2 = 1 \rangle.$$

По причине трёхвалентности наших графов мы определяем фактор-группу картографической группы

$$\mathcal{C}_2^+[3] = \langle \rho_0, \rho_1 \mid \rho_1^2 = \rho_0^3 = 1 \rangle,$$

также действующую на \vec{E} . Хорошо известно (см., например, [7]), что эта группа изоморфна группе $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Для направленного ребра $\varepsilon \in \vec{E}$ обозначим $\mathrm{B}(\vec{E}, \varepsilon)$ его стационарную подгруппу группы $\mathcal{C}_2^+[3]$:

$$\mathrm{B}(\vec{E}, \varepsilon) := \{w \in \mathcal{C}_2^+[3] \mid w\varepsilon = \varepsilon\},$$

будем называть её *борелевской* группой ребра ε в соответствии с [8].

Борелевские группы являются дискретными аналогами фундаментальных групп поверхностей, определяемых ленточными графами; при этом выделенное направленное ребро ε служит отмеченной точкой. Действительно, любой элемент группы $\mathcal{C}_2^+[3]$ может рассматриваться как пошаговый алгоритм перемещения ε по множеству направленных рёбер. Таким образом, любому элементу

группы $\mathcal{C}_2^+[3]$ соответствует дискретный «путь», начинающийся в ε . Элементы борелевской подгруппы ребра ε соответствуют петлям с началом в ε .

2. Гомоморфизм Чехова—Фока

Чехов и Фок работают с дополнительной структурой — ρ_1 -инвариантной функцией

$$z: \vec{E} \rightarrow \mathbb{R}$$

на множестве направленных рёбер.

Конструкция Чехова—Фока основана на двух матрицах (мы ни в какой степени не претендуем на совместимость с обозначениями Чехова и Фока): постоянной

$$R_0 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и переменной

$$R_1(a) := \begin{pmatrix} 0 & -e^{a/2} \\ e^{-a/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

При заданных выше \vec{E} , z , ε определим *отображение* (не гомоморфизм групп!) Чехова—Фока

$$\text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}: \mathcal{C}_2^+[3] \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{R})$$

индуктивно, полагая

$$\text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(1) = \pm 1,$$

$$\text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(\rho_0 w) := \pm R_0 \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(w), \quad \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(\rho_1 w) := \pm R_1(z_{w\varepsilon}) \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(w)$$

(знаки \pm напоминают, что мы работаем с матрицами, определёнными с точностью до знака).

Предложение. *Отображение Чехова—Фока удовлетворяет тождеству*

$$\text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(wb) = \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(w) \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(b)$$

для любого $w \in \mathcal{C}_2^+[3]$ и любого $b \in \mathcal{B}(\vec{E}, \varepsilon)$.

Доказательство. Проведём доказательство индукцией по длине w .

Если длина слова w равна 1, то либо $w = \rho_0$, либо $w = \rho_1$. В случае $w = \rho_0$ имеем

$$\text{LHS} = \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(\rho_0 b) = R_0 \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(b) = \text{RHS},$$

поскольку $\text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(\rho_0) = R_0$ независимо от параметров ленточного графа. В случае $w = \rho_1$

$$\text{LHS} = \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(\rho_1 b) = R_1(z_{b\varepsilon}) \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(b)$$

и

$$\text{RHS} = \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(\rho_1) \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(b) = R_1(z_\varepsilon) \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(b),$$

и требуемое утверждение доказано, поскольку $b\varepsilon = \varepsilon$ по определению борелевской группы.

В общем случае если $w = \rho_0 w'$, то

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(\rho_0 w' b) = R_0 \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(w' b) \stackrel{\text{по индуктивному предположению}}{=} \\ &= R_0 \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(w') \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(b) = \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(\rho_0 w') \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(b) = \text{RHS}. \end{aligned}$$

Наконец, если $w = \rho_1 w'$, то

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(\rho_1 w' b) = R_1(z_{w' b \bullet \varepsilon}) \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(w' b) \stackrel{\text{по индуктивному предположению}}{=} \\ &= R_1(z_{w' b \bullet \varepsilon}) \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(w') \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(b) \end{aligned}$$

и

$$\text{RHS} = \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(\rho_1 w') \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(b) = R_1(z_{w' \bullet \varepsilon}) \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(w') \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(b),$$

так что утверждение снова следует из $w' b \bullet \varepsilon = w' \bullet \varepsilon$. \square

Следствие. *Отображение $\text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}$, ограниченное на борелевскую группу $B_{\vec{E}, \varepsilon}$, определяет зависящее от z семейство гомоморфизмов*

$$\text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon} : B_{\vec{E}, \varepsilon} \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{R}).$$

Соглашение $z \equiv 0$ отображает борелевские группы в подгруппы группы $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Приведённое следствие даёт мощное средство для вариации этих групп в $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ (см. примеры в конце статьи).

3. Сеть Чехова—Фока

Обозначим через

$$\Delta(\vec{E}, z, \varepsilon) := \text{ChF}_{\vec{E}, z, \varepsilon}(B_{\vec{E}, \varepsilon}) \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R})$$

образ борелевской группы ребра рисунка при гомоморфизме Чехова—Фока. Для лучшего понимания его геометрии введём сеть Чехова—Фока. По существу, она представляет собой z -вариацию хорошо известной конструкции, связанной с модулярной фигурой, однако мы приведём формальное определение.

Сеть Чехова—Фока — это пара взаимно-двойственных $\Delta(\vec{E}, z, \varepsilon)$ -инвариантных разбиений верхней полуплоскости \mathcal{H} . Одно из них, \vec{E} , представляет собой множество $\Delta(\vec{E}, z, \varepsilon)$ -инвариантных конечных гиперболических отрезков. Оно «накрывает» \vec{E} в том смысле, что имеются каноническая биекция

$$\vec{E} \cong \tilde{E} / \Delta(\vec{E}, z, \varepsilon)$$

и $\Delta(\vec{E}, z, \varepsilon)$ -инвариантная функция

$$\tilde{z} : \tilde{E} \rightarrow \mathbb{R},$$

соответствующая $z: \tilde{E} \rightarrow \mathbb{R}$. (На самом деле гиперболические косинусы значений функции \tilde{z} равны гиперболическим длинам соответствующих отрезков, но мы не будем обсуждать этот факт в нашем довольно формальном изложении.)

Двойственная триангуляция E^* идеальна: её рёбра — направленные полные гиперболические прямые. Имеется биекция

$$\tilde{E} \xrightarrow{\sim} E^*: a \mapsto a^*.$$

Предполагается, что все отрезки $a \in \tilde{E}$ пересекают соответствующие a^* ровно в одной точке и что в этой точке направление a^* получается вращением a против часовой стрелки. Множество прямых E^* также снабжено функцией

$$z^*: E^* \rightarrow \mathbf{R},$$

определённой равенством $z_{\varepsilon^*}^* = z_{\varepsilon}$.

Обозначим $[x, y]$ направленную гиперболическую прямую, идущую от x к y , где x и y — точки на абсолюте.

«Начальный» треугольник сети Чехова—Фока — треугольник T_0 с вершинами в -1 , 0 и ∞ , при этом направленная прямая над ε — это прямая $\tilde{\varepsilon} := [0, i\infty]$.

Индуктивная процедура построения идеальной триангуляции выглядит следующим образом. Предположим, что мы уже построили треугольник T со сторонами a , b и c и хотим построить соседний треугольник, который также содержит ребро c . Пусть $\alpha \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ — преобразование полуплоскости \mathcal{H} , переводящее идеальный треугольник T в треугольник T_0 , $\alpha(c) = [0, i\infty]$. Тогда желаемый треугольник — это $(\alpha^{-1}R_1(z_c^*)\alpha)T$.

Предложение. $\Delta(\Gamma, z, \varepsilon)$ — фуксова группа.

Доказательство. Приведённая конструкция показывает, что полуплоскость \mathcal{H} разбита на $\Delta(\Gamma, z, \varepsilon)$ -образы треугольника T_0 . \square

4. Основной результат

Обозначим через $\mathbf{0}$ функцию $z \equiv 0$.

Теорема. Для любого трёхвалентного графа с отмеченным направленным ребром (Γ, ε) риманова поверхность $\mathcal{H}/\Delta(\Gamma, \mathbf{0}, \varepsilon)$ изоморфна модели Гротендика графа Γ , из которой удалены критические точки функции Белого.

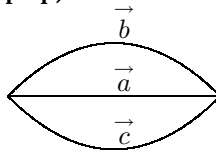
Доказательство. Как было отмечено выше, группа $\Delta(\Gamma, \mathbf{0}, \varepsilon)$ является подгруппой группы $\mathrm{PSL}_2[\mathbb{Z}]$. Рассмотрим сначала случай нормальной подгруппы $V(E, \varepsilon) \triangleleft C_2^+[3]$ (такие рисунки называются *регулярными*). Поскольку группа $\Delta(\Gamma, \mathbf{0}, \varepsilon)$ нормальна в $\mathrm{PSL}_2[\mathbb{Z}]$, мы можем профакторизовать $\mathcal{H}/\Delta(\Gamma, \mathbf{0}, \varepsilon)$ по фактор-группе $\mathrm{PSL}_2[\mathbb{Z}]/\Delta(\Gamma, \mathbf{0}, \varepsilon)$. Если теперь мы отождествим фактор $\mathcal{H}/\mathrm{PSL}_2[\mathbb{Z}]$ с римановой сферой, то получим функцию β_{Γ} , определённую на $\mathcal{H}/\Delta(\Gamma, \mathbf{0}, \varepsilon)$, критические значения которой — только 0 , 1 и ∞ . Следовательно, β_{Γ} является функцией Белого, соответствующей рисунку Γ .

Для общего графа Γ пусть D — соответствующий детский рисунок. Согласно [8], существует регулярный детский рисунок D' и накрытие $\chi: D' \rightarrow D$. Обозначим через Γ' ленточный граф, соответствующий этому рисунку. Теперь мы можем определить функцию β_Γ на $\mathcal{H}/\Delta(\Gamma, \mathbf{0}, \varepsilon)$ формулой $\beta_\Gamma \circ \chi = \beta_{\Gamma'}$. \square

5. Примеры

Мы рассмотрим два примера, чтобы проиллюстрировать введённую технику и показать её возможности в простейших случаях. В ходе вычислений мы упростим наши обозначения, опуская указание рисунка и обозначая борелевские группы просто $B_{\vec{a}}$, а гомоморфизмы Чехова—Фока просто ChF. Будем также использовать обозначения $\rho_{01} := \rho_0\rho_1$, $\rho_{10} := \rho_1\rho_0$ и т. д.

Пример 1 (плоский тета-граф).



В очевидных обозначениях действие группы $C_2^+[3]$ на множестве направленных рёбер задаётся следующей таблицей.

ребро ξ	$\rho_0 \bullet \xi$	$\rho_1 \bullet \xi$
\vec{a}	\vec{b}	\overleftarrow{a}
\vec{b}	\vec{c}	\overleftarrow{b}
\vec{c}	\vec{a}	\overleftarrow{c}
\overleftarrow{a}	\overleftarrow{c}	\vec{a}
\overleftarrow{b}	\overleftarrow{a}	\vec{b}
\overleftarrow{c}	\overleftarrow{b}	\vec{c}

Обозначим $a := z_{\vec{a}} = z_{\overleftarrow{a}}$, $b := z_{\vec{b}} = z_{\overleftarrow{b}}$, $c := z_{\vec{c}} = z_{\overleftarrow{c}}$. Используя интуицию «дискретной фундаментальной группы», найдём образующие борелевской группы:

$$B_{\vec{a}} = \langle \rho_{0101}, \rho_{1010} \rangle.$$

Тогда

$$\text{ChF}(\rho_{0101}) = R_0 R_1(c) R_0 R_1(a), \quad \text{ChF}(\rho_{1010}) = R_1(a) R_0 R_1(b) R_0.$$

При вычислениях используются соотношения

$$\rho_1 \bullet \vec{a} = \overleftarrow{a}, \quad \rho_{01} \bullet \vec{a} = \rho_0 \bullet \overleftarrow{a} = \overleftarrow{c}, \quad \rho_{101} \bullet \vec{a} = \rho_1 \bullet \overleftarrow{c} = \vec{c}$$

и

$$\rho_0 \bullet \vec{a} = \vec{b}, \quad \rho_{10} \bullet \vec{a} = \rho_1 \bullet \vec{b} = \overleftarrow{b}, \quad \rho_{010} \bullet \vec{a} = \rho_0 \bullet \overleftarrow{b} = \overleftarrow{a}.$$

Теперь по определению имеем

$$\begin{aligned} \text{ChF}(\rho_{0101}) &= R_0 \text{ChF}(\rho_{101}) = R_0 R_1(z_{\rho_{01} \bullet \vec{a}}) \text{ChF}(\rho_{01}) = \\ &= R_0 R_1(z_{\vec{c}}) R_0 \text{ChF}(\rho_1) = R_0 R_1(c) R_0 R_1(a) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \text{ChF}(\rho_{1010}) &= R_1(z_{\rho_{010} \bullet \vec{a}}) \text{ChF}(\rho_{010}) = R_1(z_{\vec{a}}) R_0 \text{ChF}(\rho_{10}) = \\ &= R_1(a) R_0 R_1(\rho_0 \bullet \vec{a}) \text{ChF}(\rho_0) = R_1(a) R_0 R_1(b) R_0. \end{aligned}$$

Простое вычисление показывает, что

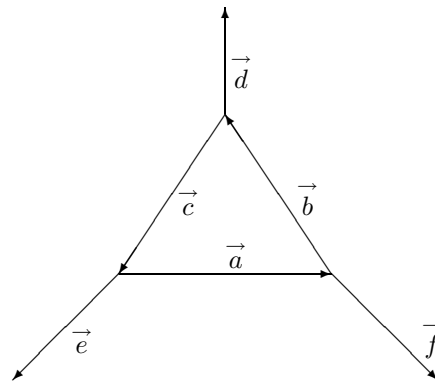
$$\pm \text{tr ChF}(\rho_{0101}) = \pm 2 \text{ch} \frac{a+c}{2}, \quad \pm \text{tr ChF}(\rho_{1010}) = \pm 2 \text{ch} \frac{a+b}{2}.$$

Наша поверхность является поверхностью конечного типа в том и только в том случае, когда образующие фундаментальной группы представлены параболическими преобразованиями. Это равносильно системе

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ a + c = 0, \\ b + c = 0, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $a = b = c = 0$. Этот результат согласуется с тем фактом, что трижды проколота риманова сфера не имеет модулей, или, иначе говоря, что пространство модулей $\mathcal{M}_{0,3}$ состоит из единственной точки. Однако общие (a, b, c) доставляют удобное средство для работы со *штанами* — объектами, исключительно важными в теории пространств Тайхмюллера (см., например, [5]).

Пример 2 (тетраэдр).



В очевидных обозначениях действие группы $C_2^+[3]$ на направленных рёбрах рассматриваемого графа задаётся следующей таблицей.

ребро ξ	$\rho_0 \bullet \xi$	$\rho_1 \bullet \xi$
\vec{a}	\overleftarrow{c}	\overleftarrow{a}
\overleftarrow{a}	\overleftarrow{a}	\overleftarrow{b}
\vec{b}	\vec{c}	\overleftarrow{b}
\overleftarrow{b}	\vec{d}	\vec{b}
\vec{c}	\overleftarrow{b}	\overleftarrow{c}
\overleftarrow{c}	\vec{e}	\overleftarrow{c}
\vec{d}	\overleftarrow{c}	\vec{d}
\overleftarrow{d}	\overleftarrow{f}	\vec{d}
\vec{e}	\vec{a}	\overleftarrow{e}
\overleftarrow{e}	\overleftarrow{d}	\vec{e}
\vec{f}	\vec{b}	\overleftarrow{f}
\overleftarrow{f}	\overleftarrow{e}	\vec{f}

Обозначим $a := z_{\vec{a}} = z_{\overleftarrow{a}}$, $b := z_{\vec{b}} = z_{\overleftarrow{b}}$, $c := z_{\vec{c}} = z_{\overleftarrow{c}}$, $d := z_{\vec{d}} = z_{\overleftarrow{d}}$, $e := z_{\vec{e}} = z_{\overleftarrow{e}}$, $f := z_{\vec{f}} = z_{\overleftarrow{f}}$. Используя интуицию «дискретной фундаментальной группы», находим четыре образующих борелевской группы:

$$B_{\vec{a}} = \langle \rho_{101010}, \rho_{010101}, \rho_{010010010}, \rho_{10100100101} \rangle.$$

Легко проверяется, что

$$\text{ChF}(\rho_{101010}) = R_1(a)R_0R_1(b)R_0R_1(c)R_0,$$

$$\text{ChF}(\rho_{010101}) = R_0R_1(e)R_0R_1(f)R_0R_1(a),$$

$$\text{ChF}(\rho_{010010010}) = R_0R_1(e)R_0R_0R_1(d)R_0R_0R_1(c)R_0,$$

$$\text{ChF}(\rho_{10100100101}) = R_1(a)R_0R_1(b)R_0R_0R_1(d)R_0R_0R_1(f)R_0R_1(a).$$

(Мы не возводим R_0 в квадрат, чтобы сохранить схожесть наших выражений со словами.) Вычисления очевидны, как и в предыдущем примере, но несколько длиннее. На следующем этапе вычисляются

$$\begin{aligned} \pm \text{trChF}(\rho_{101010}) &= \pm 2 \text{ch} \frac{a+b+c}{2}, & \pm \text{trChF}(\rho_{010101}) &= \pm 2 \text{ch} \frac{a+e+f}{2}, \\ \pm \text{trChF}(\rho_{010010010}) &= \pm 2 \text{ch} \frac{c+d+e}{2}, & \pm \text{trChF}(\rho_{10100100101}) &= \pm 2 \text{ch} \frac{b+d+f}{2}. \end{aligned}$$

Поверхность является поверхностью конечного типа тогда и только тогда, когда образующие фундаментальной группы представлены параболическими преобразованиями. Это равносильно системе

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ a + e + f = 0, \\ c + d + e = 0, \\ b + d + f = 0. \end{cases}$$

Иными словами, суммы чисел, поставленных в соответствие рёбрам, примыкающим к каждой из граней тетраэдра, равны нулю. Система имеет двухпараметрическое семейство решений, задаваемое эквивалентной системой

$$\begin{cases} a = d, \\ b = e, \\ c = f, \\ a + b + c = 0. \end{cases}$$

Эквивалентность немедленно вытекает из теории полуправильных (евклидовых) тетраэдров.

Проведённые вычисления согласуются с тем фактом, что пространство модулей $M_{0,4}$ имеет вещественную размерность два. Однако введённая техника даёт значительно больше: *образующие* соответствующей фуксовой группы явно параметризованы! Это следует сопоставить с тем фактом, что униформизация римановой сферы с четырьмя проколами представляет собой крайне трансцендентный объект. Подход к нему был найден ещё в XIX веке — через шварцианы многозначных функций, обратных к универсальным накрытиям, — однако реальный прогресс в явном описании этой униформизации был достигнут лишь совсем недавно (см. [1]). Авторы выражают надежду на то, что этот прогресс получит дальнейшее развитие, основанное на параметризации Чехова—Фока, и ляжет в основу нового раздела теории автоморфных функций.

Литература

- [1] Зограф П. Г., Тахтаджян Л. А. Уравнение Лиувилля, акцессорные параметры и геометрия пространств Тайхмюллера римановых поверхностей рода ноль // *Мат. сб.* — 1988. — Т. 60. — С. 143—297.
- [2] Концевич М. Теория пересечений на пространстве модулей кривых и матричная функция Эйри // *Функц. анализ и его прил.* — 1991. — Т. 25, № 2. — С. 50—57.
- [3] Фок В. В., Чехов Л. О. Квантовые модулярные преобразования, соотношения пятиугольника и геодезические // *Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова.* — 1999. — Т. 226. — С. 149—163.
- [4] Шабат Г. Б. Комплексный анализ и детские рисунки // *Комплексный анализ в современной математике.* — М.: Фазис, 1998. — С. 257—268.
- [5] Imaiyoshi Y., Taniguchi M. *An Introduction to Teichmüller Spaces.* — Springer, 1992.
- [6] Penner R. C. The decorated Teichmüller space of punctured surfaces // *Comm. Math. Phys.* — 1987. — Vol. 113, no. 2. — P. 299—340.
- [7] Serre J.-P. *Cours d'arithmétique.* — Presses Universitaires de France, 1970.

- [8] Shabat G. B., Voevodsky V. A. Drawing curves over number fields // The Grothendieck Festschrift. Vol. III. — Birkhäuser, 1990. — (Progress Math.; Vol. 88). — P. 199—227.