Введение

Настоящий и следующий выпуски журнала представляют собрание статей по докладам участников международной конференции «Топология, анализ и приложения к математической физике», посвящённой памяти профессора Ю. П. Соловьёва, которая проходила в Москве 14—19 февраля 2005 года. Конференция собрала многих топологов из России, стран ближнего и дальнего зарубежья, которые были учениками Юрия Петровича или его близкими друзьями.

Вот список участников конференции: К. Абе (Мацумото, Япония), Ю. Айхгорн (Грайфсвальд, Германия), С. В. Аллёнов (Коломна, Россия), В. А. Артамонов (Москва, Россия), П. М. Ахметьев (Москва, Россия), Э. Бак (Билефельд, Германия), В. В. Балащенко (Минск, Беларусь), П. Баум (Стейт-Колледж, США), В. В. Белокуров (Москва, Россия), Н. Бокан (Белград, Сербия), Б. Боярски (Варшава, Польша), Д. Бургеля (Колумбус, США), А. Ю. Воловиков (Москва, Россия), С. Вукмирович (Белград, Сербия), Г. Гаркуша (Триест, Италия), Ю. Е. Гликлих (Воронеж, Россия), Г. Гужвина (Мюнстер, Германия), О. М. Давыдов (Челябинск, Россия), М. Джёрич (Белград, Сербия), Ч. Доличанин (Нови Пазар, Сербия), Б. М. Дубров (Минск, Беларусь), А. Ермолицкий (Минск, Беларусь), А. В. Ершов (Москва, Россия), Н. И. Жукова (Нижний Новгород, Россия), Ю. Й. Жураев (Самарканд, Узбекистан), Н. Ю. Жураева (Самарканд, Узбекистан), А. В. Зарелуа (Москва, Россия), В. Г. Звягин (Воронеж, Россия), В. Золлер (Будапешт, Венгрия), А. А. Ирматов (Москва, Россия), В. Касимов (Баку, Азербайджан), Г. Г. Каспаров (Нэшвилл, США), Б. П. Комраков (Лёвен, Бельгия), Ю. А. Кордюков (Уфа, Россия), Р. Красаускас (Вильнюс, Литва), А. Куку (Беркли, США), С. В. Лапин (Саранск, Россия), Р. Леандр (Дижон, Франция), В. П. Лексин (Коломна, Россия), А. Липковски (Белград, Сербия), Г. Л. Литвинов (Москва, Россия), М. А. Малахальцев (Казань, Россия), В. М. Мануйлов (Москва, Россия), С. А. Мелихов (Москва, Россия), Д. В. Миллионщиков (Москва, Россия), А. С. Мищенко (Москва, Россия), П. Мормуль (Варшава, Польша), Е. А. Морозова (Москва, Россия), Ю. В. Муранов (Витебск, Беларусь), О. Р. Мусин (Москва, Россия), В. М. Нежинский (Санкт-Петербург, Россия), И. М. Никонов (Москва, Россия), Т. Е. Панов (Москва, Россия), Д. Перро (Лион, Франция), С. С. Подкорытов (Санкт-Петербург, Россия), Ф. Ю. Попеленский (Москва, Россия), П. С. Попов (Москва, Россия), З. Ракич (Белград, Сербия), А. Ю. Савин (Москва, Россия), А. Г. Сергеев (Москва, Россия), А. Б. Скопенков (Москва, Россия), М. Б. Скопенков (Москва, Россия), А. Б. Сосинский (Москва, Россия), А. Н. Старков (Москва, Россия), Б. Ю. Стернин (Москва, Россия), С. Терзич (Подгорица, Черногория), А. Том (Мюнстер, Германия), Е. В. Троицкий (Москва, Россия), М. Франк (Лейпциг, Германия), Б. Хайдук (Вроцлав, Польша), А. Я. Хелемский (Москва, Россия), Е. Т. Шавгулидзе (Москва, Россия), В. В. Шарко (Киев, Украина), Г. И. Шарыгин (Москва, Россия), А. И. Штерн (Москва, Россия), М. И. Штогрин (Москва, Россия) — всего 76 человек. Само название конференции говорит о широте научных интересов Ю. П. Соловьёва: от классической топологии до математической физики.

Первые научные работы Юрия Петровича были связаны с тематикой его научного руководителя Александра Сергеевича Мищенко. Самая первая из них (1975 г.) была сделана ещё в студенческие годы; она относится к одной из наиболее активно развивавшихся тогда областей — теории эллиптических операторов. В то время для нужд топологии возникла необходимость изучать так называемые фредгольмовы представления дискретных групп. Хорошо были изучены свойства фредгольмовых операторов, реализованных в виде эллиптических дифференциальных или псевдодифференциальных операторов на компактных многообразиях. При этом, однако, примеров фредгольмовых операторов, которые были бы нетривиальными с точки зрения действия дискретных групп, в то время ещё не было, поскольку бесконечная дискретная группа не может действовать свободно ни на каком компактном многообразии. Ю. П. Соловьёв предложил очень удачную и оригинальную идею: рассматривать дифференциальный эллиптический оператор на некомпактном евклидовом пространстве и изучать поведение по отношению к действию свободной абелевой группы сдвигов. В результате он получил фредгольмово представление свободной абелевой группы с нетривиальным характером Черна и, таким образом, простое доказательство гипотезы Новикова для свободной абелевой группы.

Затем (1975 г.) ему удалось распространить этот подход на гораздо более сложные пространства: так называемые строения Брюа—Титса. Из этого обобщения, в частности, вытекает справедливость гипотезы Новикова для достаточно широкого класса дискретных групп: для решёток в линейных алгебраических группах над локальными локально компактными полями. Этот результат оказался настолько сильным, что к настоящему моменту появились лишь незначительные его усиления.

Не только эти две работы Ю. П. Соловьёва, а целая их серия посвящены систематическому анализу топологических проблем, так или иначе связанных с гипотезой Новикова о гомотопической инвариантности высших сигнатур. В частности, Ю. П. Соловьёв обнаружил, что высшие сигнатуры можно определять не только для гладких, но и для рационально гомологических многообразий. Это наблюдение основано на анализе того, как строится эрмитова K-теория с помощью так называемых алгебраических комплексов Пуанкаре, которые обобщают, с одной стороны, двойственность Пуанкаре комбинаторных многообразий, а с другой — эрмитовы квадратичные формы. Построенная Ю. П. Соловьёвым совместно с А. С. Мищенко теория пучков алгебраических комплексов Пуанкаре привела к чисто гомотопическому доказательству гипотезы Новикова для тех классов когомологий, которые реализуются фредгольмовыми представлениями, а также к выводу формул типа Хирцебруха для произвольных C^*-алгебр.

Другая проблема, которой занимался Ю. П. Соловьёв, относится к связям между гипотезой Новикова и гипотезой Баума—Кона. В этой задаче, по сути дела, вопрос сводился к описанию тех элементов эрмитовой K-теории, которые можно реализовать замкнутыми комбинаторными многообразиями. Ю. П. Соловьёв дал описание таких элементов в чисто гомотопических терминах (1976 г.).

Дальнейшие исследования по эрмитовой К-теории (1978—1982 гг.) привели к интересным результатам о её классифицирующем пространстве и соответствующем гомотопическом умножении, о связях между различными подходами к определению эрмитовой К-теории. В частности, Ю. П. Соловьёв доказал (1982 г.), что построенные по системам корней B_n, C_n и D_n аналоги алгебраической К-теории Володина—Вагонера эквивалентны эрмитовой алгебраической К-теории. Он описал гомотопическую структуру сигнатурно реализуемой части групп Уолла. Очень важным результатом в этих исследованиях стало построение эрмитова аналога $KU(X)$ функтора Вальдхаузена топологических пространств.

Большой цикл работ Юрия Петровича с учениками (Р. Л. Красаускасом, С. В. Лапиным, В. А. Колосовым) посвящён теориям гомологий с внутренними симметриями. Было установлено (1987 г.), что такого сорта теории определяются так называемыми скрещёнными симплициальными группами, каждая из которых единственным образом представляется в виде расширения одной из семи простых скрещённых симплициальных групп посредством подходящей симплициальной группы. Наиболее глубокие и важные результаты были получены Ю. П. Соловьёвым о диэдральных гомологиях — одном из семи основных типов теорий гомологий с внутренними симметриями.

Оказалось, что диэдральные гомологии теснейшим образом связаны с эрмитовой К-теорией. Допуская вольность речи, иногда говорят, что диэдральные гомологии являются в определённом смысле логарифмом алгебраической эрмитовой К-теории. Ю. П. Соловьёв обнаружил ещё один аспект этой связи, который использует построенный им эрмитов аналог К-функтора Вальдхаузена — обобщение эрмитовой К-теории на случай топологических пространств.

Ю. П. Соловьёв применил диэдральные гомологии для вычисления инвариантов пространства гомотопических эквивалентностей и пространства гомеоморфизмов комбинаторных многообразий. Он показал, что вычисление рациональных гомотопических групп группы гомеоморфизмов односвязного топологического пространства сводится к вычислению диэдральных гомологий некоторых объектов, которые, в свою очередь, вычисляются методом минимальных моделей Сулливана. Эти результаты позволили вычислить рациональные гомотопические группы групп гомеоморфизмов комплексных и кватернионных проективных пространств, некоторых многообразий Грассмана.

В большой серии работ Ю. П. Соловьёвым вместе с соавторами (В. В. Белокуровым и Е. Т. Шавгулидзе) был разработан общий подход к построению абсолютно сходящихся рядов для приближения с произвольной точностью функциональных интегралов, используемых в задачах квантовой физики, теории нелинейных дифференциальных уравнений и топологии. Традиционно такие функциональные интегралы вычислялись методами теории возмущений, ряды которой представляют собой асимптотические разложения интегралов по степеням некоторого параметра. Несмотря на то что для физических задач, в которых этот параметр мал, суммирование конечного числа членов ряда приводит к неплохому согласию с экспериментом, в целом вопрос о возможности приближения соответствующих функциональных интегралов с произвольной степенью точности с помощью конечного числа членов расходящегося ряда оставался открытым. В рамках подхода, предложенного Ю. П. Соловьёвым с соавторами, оказалось возможным вычислять значения функциональных интегралов с любой точностью, используя конечное число членов абсолютно сходящегося ряда новой теории возмущений. В частности, с рекордной точностью было найдено значение показателей, описывающих поведение теплоёмкости гелия вблизи критической точки. Этот подход был также применён для обобщённого суммирования широкого класса расходящихся рядов, которые могут быть представлены как ряды Тейлора гладких вполне монотонных функций. Под суммой ряда при этом понимается, по определению, значение функции в соответствующей точке. При этом подходе оказалось возможным просуммировать с любой точностью некоторые расходящиеся ряды, которые было невозможно просуммировать другими методами.

Доклады на конференции продолжали научные исследования Ю. П. Соловьёва во всех направлениях, которыми он занимался. В данных выпусках представлены не все доклады. Часть докладов будет опубликована в журнале «Journal of K-theory».

Все статьи можно разделить по тематике на несколько направлений.

1. Классические вопросы топологии (П. М. Ахметьев, А. В. Ершов, С. В. Лапин, И. М. Никонов).
2. Симметрии (В. В. Балащенко, А. Ю. Воловиков).
3. Уравнения на многообразиях (Ю. Е. Гликлих, Н. Ю. Жураева).
4. Функциональный анализ и C^*-алгебры (Р. Леандр, А. А. Павлов, Е. В. Троицкий, А. Я. Хелемский, Т. Шульман).
5. Представления групп и эргодическая теория (А. Е. Троицкая, А. И. Штерн).