Проективные модули в классическом и квантовом функциональном анализе*

А. Я. ХЕЛЕМСКИЙ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 517.98

Ключевые слова: квантовый функциональный анализ, квантовая банахова алгебра, проективный модуль, операторная алгебра, тензорное произведение.

Аннотация

Наряду с классической, в настоящее время имеются две «квантовые» версии теории операторных алгебр. В настоящих лекциях описано фундаментальное для теории гомологий понятие проективного модуля в рамках этих трёх теорий. Наши исходные определения близки к их прототипам из абстрактной алгебры, но основные результаты касаются существенно функционально-аналитических объектов и, как правило, не имеют чисто алгебраических аналогов.

Abstract

A. Ya. Helemskii, Projective modules in the classical and quantum functional analysis, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 7, pp. 7—84.

Along with the classical version, there are two “quantized” versions for the theory of operator algebra. In these lectures, the fundamental homological notion of a projective module is described in the framework of these three theories. Our initial definitions of the projectivity do not go far away from their prototypes in abstract algebra, however, the principal results concern essentially functional-analytic objects and, as a rule, have no purely algebraic analogues.

Содержание

*Данная работа представляет собой текст лекций, прочитанных автором в качестве почётного приглашённого профессора Тихоокеанского института математических исследований (Канада) в июле 2003 г. Она была частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 07-01-00046-а).

Гомологическая теория «алгебр в анализе» существует по меньшей мере в трёх различных версиях. Во-первых, это гомологическая теория банаховых и, более общо, локально выпуклых алгебр, которой уже более 40 лет. Однако в последнее десятилетие предыдущего века «гомологический раздел» появился в новой ветви анализа, в так называемом квантовом функциональном анализе, или, более прозаично, теории операторных пространств. Одна из принципиальных особенностей этой теории, как теперь стало понятно, — это существование различных подходов к «правильной» квантовой версии понятия ограниченного билинейного оператора. В действительности два из них в настоящее время представляются наиболее важными; каждый из подходов имеет своё собственное тензорное произведение с подходящим универсальным свойством. Соответственно, существуют две основные версии квантовых алгебр и квантовых модулей, и это приводит к двум основным версиям квантовых гомологий.

Таким образом, сейчас, в первом десятилетии XXI века, мы имеем три вида топологической гомологии: традиционный (или «классический») и два «квантовых».

В данных лекциях мы ограничимся изучением в рамках этих трёх теорий фундаментального понятия проективного модуля. Это primus inter pares среди трёх основных столпов науки о гомологии: проективности, инъективности и плоскости. Оно служит краеугольным камнем для любой достаточно развитой гомологической теории, будь то в алгебре, топологии или, как в этих лекциях, в функциональном анализе.

Наши исходные определения проективности близки к их прототипам из абстрактной алгебры. Однако основные результаты касаются существенно функционально-аналитических объектов. Мы увидим, что они, как правило, не имеют чисто алгебраических аналогов. Более того, некоторые факты поразительно отличны от того, что алгебраисты могли бы ожидать, основываясь на своём опыте.

1. О терминологии и обозначениях

Равенство по определению часто обозначается знаком $:=$.

Термины «инъективный», «сюръективный» и «биективный» относятся к отображениям (в частности, к операторам, морфизмам модулей и т. п.) и имеют стандартный *теоретико-множественный* смысл. С другой стороны, термины «мономорфизм», «эпиморфизм» и «изоморфизм» всегда используются в *теоретико-категорном* значении.

Теперь мы должны перейти к более деликатным материям. Проблема состоит в том, что терминология и обозначения предмета, по крайней мере в его «квантовой» части, ещё далеко не устоялись. Поэтому мы вынуждены потратить некоторое время для объяснения нашей терминологии и обозначений.

Вообще говоря, мы будем свободно использовать [10] как основной источник сведений о квантовых пространствах (называемых в цитированной книге операторными пространствами)*. Однако по необходимости мы вынуждены будем значительно отклониться от терминологии и обозначений [10], и, конечно, все различия будут явно указаны. Что касается более традиционных материй (банаховы алгебры и модули, азбука теории категорий и т. д.), мы будем следовать учебнику [14] или обзору [18].

Мы опасаемся применять перегруженное смыслами прилагательное «операторный» для пространств, алгебр и модулей квантового функционального анализа («теории операторных пространств» в [10] или [22]). Вместо этого мы будем использовать термин «*квантовое пространство*» для матрично-нормированных пространств, удовлетворяющих следующим ставшим знаменитыми аксиомам Эффроса—Руана [10, с. 20]. Матричная норма на линейном пространстве E есть набор $\|\cdot\|_n$, $n = 1, 2, \ldots$, где для каждого n указанный символ обозначает норму на пространстве $\mathrm{M}_n(E)$ квадратных $(n \times n)$-матриц с элементами из E. Напомним, что в случае квантового пространства матричная норма автоматически задаёт обычную норму на любом пространстве $\mathrm{M}_{m,n}$ прямоугольных $(m \times n)$-матриц с элементами из E. (Чтобы ввести эту норму, мы преобразуем данную прямоугольную матрицу в квадратную, добавляя нулевые элементы; полученная норма не зависит от способа, которым мы это делаем.)

Если первая, а следовательно и все остальные соответствующие матричные нормы, полна, мы говорим о *квантовом банаховом пространстве*.

В то же время, когда мы в этих лекциях используем прилагательное «операторный», мы просто подразумеваем, что соответствующее пространство, алгебра или модуль является равномерно замкнутым (т. е. замкнутым по норме) подпространством в пространстве всех ограниченных операторов некоторого гильбертова пространства H. Последнее пространство, которое является в действительности алгеброй, будет всегда обозначаться $\mathcal{B}(H)$. (Как исключение, в разделе 4 термин «операторная алгебра» будет использоваться для несколько более широкого класса алгебр, но об этом мы специально скажем в соответствующее время.)

Если $\varphi\colon E \to F$ — оператор между квантовыми пространствами, то оператор

$$\varphi_n\colon \mathrm{M}_n(E) \to \mathrm{M}_n(F), \quad (x_{ij}) \mapsto \big(\varphi(x_{ij})\big),$$

*Недавно появилась другая заметная книга по предмету, написанная Пизье [22]. Там некоторые основные понятия изложены на языке операторов, а не $(n \times n)$-матриц, как в [10]. На мой взгляд, данный бескоординатный подход и многие другие предпочтения в [22] более привлекательны. Однако основная часть моих читателей намного лучше знакома с книгой [10], написанной более просто, с большой аккуратностью и вместе с тем с высоким педагогическим мастерством.

участвующий в фундаментальном понятии вполне ограниченного оператора, будет называться *n-м размножением* φ. Мы напомним, что φ называется *вполне ограниченным*, если $\sup\{\|\varphi_n\|;\ n=1,2,\ldots\}<\infty$. Эта верхняя грань называется *вполне ограниченной нормой* φ и обычно обозначается $\|\cdot\|_{\mathrm{cb}}$.

Для данного квантового пространства E нормированное пространство $\mathrm{M}_n(E)$ в этих лекциях часто будет называться «нормированным пространством n-го этажа E». В частности, исходное банахово пространство, отождествлённое с соответствующим банаховым пространством (1×1)-матриц, будет часто называться «банаховым пространством первого этажа E». Довольно часто, говоря о E, мы будем подразумевать только последнее пространство; это не приведёт к путанице.

Квантовать банахово пространство означает превратить его в квантовое банахово пространство таким образом, чтобы норма пространства первого этажа совпадала бы с заданной нормой. Мы напомним, что каждый изометрический оператор из E в некоторое пространство $\mathcal{B}(H)$ определяет квантование E в указанном смысле. (Стандартная процедура заключается в соответствующем вложении $\mathrm{M}_n(E)$ в $\mathcal{B}(nH)$ с последующим наделением $\mathrm{M}_n(E)$ индуцированной нормой [10, с. 20, 21]. Здесь и далее nH обозначает гильбертову сумму n копий H.) Обратно, согласно теореме Руана о представлении [10, с. 33] каждое квантование E может быть получено с помощью такого оператора. В этой связи термин *квантование* иногда будет также означать упомянутый изометрический оператор, задающий подходящую структуру квантового банахова пространства; это не приведёт к путанице. Если данное пространство уже задано как подпространство некоторого пространства $\mathcal{B}(H)$, мы будем всегда рассматривать квантование, которое задаётся соответствующим естественным вложением, и называть это квантование *стандартным*.

Как мы увидим, каждая из трёх гомологических теорий, упомянутых выше, тесно связана со «своим собственным» типом тензорного произведения, играющим в этой теории выдающуюся роль. Для первой теории это *проективное тензорное произведение банаховых пространств*, обозначаемое, как обычно, $\hat{\otimes}$. Два других — это два различных тензорных произведения квантовых банаховых пространств: пополненная версия так называемого *тензорного произведения Хаагерупа* [10, с. 153] и пополненная версия произведения, которое в [10, с. 124] называется *операторным проективным тензорным произведением* (оно открыто Э. Эффросом и Ж.-Чж. Руаном и, одновременно и независимо, Д. Блечером и В. Полсеном). Первое мы будем обозначать $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$, второе — $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$. (Естественно, нам запрещено использовать обозначение $\hat{\otimes}$ для этих квантовых тензорных произведений, как это делалось в [10].) Мы часто будем ссылаться на эти теории как на соответственно $\hat{\otimes}$-, $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$- и $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-*теорию*.

Мы подчёркиваем, что для банаховых пространств E и F $E\hat{\otimes}F$ есть просто банахово пространство без какого-либо квантования. В то же время объекты $E\overset{\mathrm{h}}{\otimes}F$ и $E\overset{\mathrm{o}}{\otimes}F$ имеют смысл только для квантовых банаховых пространств E

и F, и они, в свою очередь, являются квантовыми банаховыми пространствами.

Пусть E и F есть (просто) банаховы пространства или, в зависимости от смысла, квантовые банаховы пространства. Мы надеемся, что наш читатель достаточно хорошо знает, что такое норма на $E \hat{\otimes} F$. Однако мы напомним для его удобства определения матричных норм на $E \overset{\mathrm{h}}{\otimes} F$ и $E \overset{\mathrm{o}}{\otimes} F$.

Как обычно, $E \otimes F$ обозначает алгебраическое тензорное произведение подходящих линейных пространств. Каждое банахово пространство $\mathrm{M}_n(E \overset{\mathrm{h}}{\otimes} F)$ и $\mathrm{M}_n(E \overset{\mathrm{o}}{\otimes} F)$ определено как пополнение $\mathrm{M}_n(E \otimes F)$ по некоторой специальной норме, так называемой *норме Хаагерупа*, или $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$*-норме*, и операторно-проективной, или $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-норме. Они, в свою очередь, определяются следующим образом.

Чтобы говорить о $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-норме, нам потребуется одно вспомогательное понятие. Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ рассмотрим две прямоугольных векторнозначных матрицы

$$\mathbf{v} = (v_{ij}) \in \mathrm{M}_{n,m}(E), \quad \mathbf{w} = (w_{ij}) \in \mathrm{M}_{m,n}(F).$$

Так называемое *произведение Эффроса* (или матричное внутреннее произведение) $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$, обозначаемое через $\mathbf{v} \odot \mathbf{w}$, по определению есть матрица в $\mathrm{M}_n(E \otimes F)$ с элементами

$$(v \odot w)_{ij} := \sum_{k=1}^{n} v_{ik} \otimes w_{kj}.$$

Теперь фиксируем матрицу $\mathbf{u} \in \mathrm{M}_n(E \otimes F)$. Мы берём все возможные представления $\mathbf{u}$ в виде произведения Эффроса $\mathbf{v} \odot \mathbf{w}$, $\mathbf{v} \in \mathrm{M}_{n,m}(E)$, $\mathbf{w} \in \mathrm{M}_{m,n}(F)$ с произвольными $m \in \mathbb{N}$. (Легко видеть, что такие произведения действительно существуют.) Тогда норма Хаагерупа элемента $\mathbf{u}$ определена как

$$\|\mathbf{u}\| = \inf\{\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|\}, \tag{1.1}$$

где нижняя грань берётся по всем указанным представлениям [10, с. 152].

Для определения $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-нормы требуется другое подготовительное понятие — *тензорное произведение* векторнозначных матриц. Пусть $\mathbf{v} \in \mathrm{M}_{k,l}(E)$ и $\mathbf{w} \in \mathrm{M}_{m,n}(F)$ — две прямоугольные матрицы для любых $k, l, q, r \in \mathbb{N}$. Мы обозначим через $\mathrm{M}_{k\times q,\, l\times r}(E \otimes F)$ множество прямоугольных матриц с kq строками, индексированными двойными индексами, скажем gh, $1 \leqslant g \leqslant k$, $1 \leqslant h \leqslant q$, и с lr столбцами, индексированными двойными индексами*, скажем st, $1 \leqslant s \leqslant l$, $1 \leqslant t \leqslant r$. Тогда тензорное (или кронекерово) произведение $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ есть по определению матрица $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \in \mathrm{M}_{k\times q,\, l\times r}(E \otimes F)$ с элементами

$$(v \otimes w)_{(gs)(ht)} := v_{gh} \otimes w_{st}.$$

*Эти двойные индексы могут быть упорядочены, скажем, в лексикографическом порядке, но в действительности никакой необходимости в этом нет.

Теперь зафиксируем матрицу $\mathbf{u} \in \mathrm{M}_n(E \otimes F)$. Мы возьмём все возможные представления $\mathbf{u}$ в виде (обычного) матричного произведения трёх прямоугольных матриц $\alpha(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})\gamma$, где $\mathbf{v} \in \mathrm{M}_{k,l}$, $\mathbf{w} \in \mathrm{M}_{q,r}$, $\alpha \in \mathrm{M}_{n,k\times q}$ и $\gamma \in \mathrm{M}_{l\times r,n}$ с произвольными $k, l, q, r \in \mathbb{N}$. Здесь, как легко заметить, в скалярной матрице α строки индексированы ординарным, а столбцы — двойным индексом, в то время как γ имеет «симметричную» структуру. (Нетрудно показать, что представления указанной формы существуют.) Тогда мы имеем

$$\|\mathbf{u}\| = \inf\{\|\alpha\| \, \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\| \, \|\gamma\|\}, \tag{1.2}$$

где нижняя грань берётся по всем этим представлениям [10, с. 124].

Важный факт, которым мы будем постоянно пользоваться, состоит в том, что $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-норма больше, чем $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-норма, и, если говорить о первом этаже, $\hat{\otimes}$-норма ещё больше. В эквивалентных терминах, существует сжимающий оператор j_1 и вполне сжимающий оператор j_2, такие что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & E \otimes F \arrow[dl, "\mathbf{in}_1"'] \arrow[d, "\mathbf{in}_2"] \arrow[dr, "\mathbf{in}_3"] & \\ E \mathbin{\hat{\otimes}} F \arrow[r, "j_1"] & E \overset{\mathrm{o}}{\otimes} F \arrow[r, "j_2"] & E \overset{\mathrm{h}}{\otimes} F, \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

где $\mathbf{in}_k$, $k = 1, 2, 3,$ — соответствующие естественные вложения, коммутативна.

Термин «биоператор» используется как аббревиатура термина «билинейный оператор». Как уже упоминалось, в квантовом функциональном анализе существуют две основные версии понятия ограниченного биоператора. Соответствующие определения, в свою очередь, зависят от того, что называть размножением заданного биоператора $\mathcal{R}\colon E \times F \to G$ между квантовыми пространствами.

В первом подходе (который был открыт раньше) *n-е мультипликативное размножение*, или, кратко, *n-е $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-размножение* $\mathcal{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, есть по определению биоператор

$$\mathcal{R}_n^{(\mathrm{h})}\colon \mathrm{M}_n(E) \times \mathrm{M}_n(F) \to \mathrm{M}_n(G),$$

который переводит пару $\mathbf{u} = (u_{ij})$, $\mathbf{v} = (v_{ij})$ в $(n\times n)$-матрицу $\mathbf{w}^{(\mathrm{h})}$ с элементами

$$w_{ij}^{(\mathrm{h})} := \sum_{k=1}^{n} \mathcal{R}(u_{ik}, v_{kj}).$$

С другой стороны, *(n,k)-е полное размножение*, или, кратко, *(n,k)-е $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-размножение* $\mathcal{R}$, $n, k = 1, 2, \ldots$, есть по определению биоператор

$$\mathcal{R}_{n,k}^{(\mathrm{o})}\colon \mathrm{M}_n(E) \times \mathrm{M}_n(F) \to \mathrm{M}_{n\times k}(G).$$

Этот биоператор переводит пару $\mathbf{u} = (u_{gh})$, $\mathbf{v} = (v_{st})$ в $(nk \times nk)$-матрицу $\mathbf{w}^{(\mathrm{o})}$ с элементами

$$w_{(gs)(ht)}^{(\mathrm{o})} := \mathcal{R}(u_{gh}, v_{st}).$$

Если $\sup\{\|\mathcal{R}_n^{(\mathrm{h})}\|;\ n=1,2,\ldots\}<\infty$, мы говорим, что исходный биоператор $\mathcal{R}$ *мультипликативно ограничен*, и называем эту верхнюю грань *мультипликативно ограниченной нормой* $\mathcal{R}$. Заменяя в этой фразе индекс n на (n,k) и индекс (h) на (o), мы получаем определение *вполне ограниченного* биоператора и *вполне ограниченной нормы* такого биоператора. (Заметим, что во втором определении мы могли бы, без изменения результата, ограничиться случаем $k=n$, но представленная форма окажется более удобной.)

Напомним, что каждый мультипликативно ограниченный биоператор автоматически вполне ограничен и его мультипликативно ограниченная норма больше либо равна его вполне ограниченной норме. (Это можно вывести из простого наблюдения, что $\mathcal{R}_{n,n}^{(\mathrm{o})}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathcal{R}_{n\times n}^{(\mathrm{h})}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{1},\mathbf{1}\otimes\mathbf{v})$, где $\mathbf{1}$ — единичная матрица в $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}^n)$.)

Довольно часто при изложении мы будем представлять материал параллельно для всех трёх теорий. В соответствующих местах мы будем использовать символ $\tilde{\otimes}$ (неспециализированное тензорное произведение) для каждого из трёх упомянутых типов тензорного произведения. Читатель может заменить этот символ на любой из символов $\hat{\otimes}$, $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$ или $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$, но, конечно, он должен придерживаться выбранного символа на протяжении всего текста лекций.

Чтобы этот механизм работал гладко, примем ещё следующие соглашения.

На протяжении этих лекций мы будем постоянно использовать термин «$\hat{\otimes}$-пространство» для классического банахова пространства и термин «$\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-пространство», равно как и «$\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-пространство», для квантового банахова пространства. Термин «$\hat{\otimes}$-ограниченный оператор» будет обозначать (просто) ограниченный оператор, в то время как термин «$\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-ограниченный», так же как и «$\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-ограниченный оператор», будет обозначать вполне ограниченный оператор. Часто вместо «$\tilde{\otimes}$-ограниченный оператор» мы будем писать просто «$\tilde{\otimes}$-оператор».

Категория банаховых пространств и ограниченных операторов будет обозначаться **Ban**, а категория квантовых банаховых пространств и вполне ограниченных операторов — **QBan**. Через $\tilde{\otimes}$**-Ban** будем обозначать **Ban** для $\tilde{\otimes}=\hat{\otimes}$ и **QBan** для $\tilde{\otimes}=\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$ или $\tilde{\otimes}=\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$. Очевидно, что изоморфизмами в $\tilde{\otimes}$**-Ban** являются $\tilde{\otimes}$-операторы, обладающие обратными $\tilde{\otimes}$-операторами, мы будем называть их $\tilde{\otimes}$-*изоморфизмами*.

Далее, «$\hat{\otimes}$-ограниченный биоператор» есть просто ограниченный биоператор, «$\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-ограниченный биоператор» — это мультипликативно ограниченный биоператор и «$\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-ограниченный биоператор» есть вполне ограниченный биоператор. Часто вместо «$\tilde{\otimes}$-ограниченный биоператор» мы будем писать просто «$\tilde{\otimes}$-биоператор».

Когда мы говорим о нормах операторов и биоператоров, мы придерживаемся следующего соглашения. «$\hat{\otimes}$-норма» — это просто классическая норма оператора или, по смыслу, биоператора. В то же время «$\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-норма» есть или вполне ограниченная норма вполне ограниченного оператора, или мультипликативно ограниченная норма мультипликативно ограниченного билинейного оператора. Наконец, «$\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-норма» есть или (снова) вполне ограниченная норма вполне ограниченного оператора, или вполне ограниченная норма вполне ограниченного билинейного оператора. Эти нормы будут обозначаться соответственно через $\|\cdot\|_{\hat{\otimes}}$, $\|\cdot\|_{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}}$ и $\|\cdot\|_{\overset{\mathrm{o}}{\otimes}}$. (Не должно возникнуть путаницы с тем, что было названо выше $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$- и $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-нормой в пространстве $\mathrm{M}_n(E \otimes F)$.)

$\tilde{\otimes}$-оператор или $\tilde{\otimes}$-биоператор φ называется $\tilde{\otimes}$-*сжимающим*, если $\|\varphi\|_{\tilde{\otimes}} \leqslant 1$. $\tilde{\otimes}$-оператор называется $\tilde{\otimes}$-*изометрическим*, если он (просто) изометрический в случае $\tilde{\otimes} = \hat{\otimes}$ и вполне изометрический (т. е. изометрический на каждом этаже), в случае когда $\tilde{\otimes} = \overset{\mathrm{h}}{\otimes}$ или $\tilde{\otimes} = \overset{\mathrm{o}}{\otimes}$.

В качестве первого примера использования такого параллельного представления мы сформулируем тройную фундаментальную теорему, отражающую raison d'être наших тензорных произведений.

Теорема 1.1. *Пусть $\mathcal{R}\colon E \times F \to G$ — биоператор между $\tilde{\otimes}$-пространствами. Тогда $\mathcal{R}$ является $\tilde{\otimes}$-ограниченным, тогда и только тогда, когда существует единственный линейный $\tilde{\otimes}$-ограниченный оператор R, такой что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[d, "\vartheta"'] \arrow[dr, "\mathcal{R}"] & \\ E \tilde{\otimes} F \arrow[r, "R"] & G, \end{tikzcd}$$

где $\vartheta\colon (x, y) \mapsto x \otimes y$, коммутативна. Более того, $\|R\|_{\tilde{\otimes}} = \|\mathcal{R}\|_{\tilde{\otimes}}$.

Доказательство приведено в [14, с. 32] для «классического» и в [10, с. 126, 154] для «квантового» случая.

Свойство тензорного произведения $\tilde{\otimes}$, фигурирующее в этой теореме, называется *универсальным свойством данного тензорного произведения относительно $\tilde{\otimes}$-ограниченных биоператоров*. Оператор R называется *ассоциированным с биоператором $\mathcal{R}$*, и, обратно, биоператор $\mathcal{R}$ называется *ассоциированным с R*.

В дальнейшем мы будем часто использовать функционально-аналитические версии функторов тензорного произведения. Именно, фиксированное $\tilde{\otimes}$-пространство E задаёт ковариантный функтор, обозначаемый

$$E \tilde{\otimes} ?\colon\ \tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{Ban} \to \tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{Ban}\,.$$

Он ставит в соответствие «переменному» $\tilde{\otimes}$-пространству F пространство $E \tilde{\otimes} F$ и $\tilde{\otimes}$-оператору $\varphi\colon F \to G$ оператор $\mathbf{1}_E \tilde{\otimes} \varphi\colon E \tilde{\otimes} G \to E \tilde{\otimes} G$; последний оператор корректно определён (с помощью теоремы 1.1) как оператор, переводящий элементарный тензор $x \otimes y$ в $x \otimes \varphi(y)$. Похожим образом можно определить функтор

$$? \tilde{\otimes} E\colon\ \tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{Ban} \to \tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{Ban}, \quad F \mapsto F \tilde{\otimes} E, \quad \varphi\colon F \to G \mapsto \varphi \tilde{\otimes} \mathbf{1}_E\colon F \tilde{\otimes} E \to G \tilde{\otimes} E.$$

Напомним, что для любого $E \in \tilde{\otimes}$**-Ban** $\tilde{\otimes}$-пространства $E \tilde{\otimes} \mathbb{C}$ и $\mathbb{C} \tilde{\otimes} E$ могут быть отождествлены с E при помощи $\tilde{\otimes}$-изометрических изоморфизмов, переводящих $x \otimes \lambda$ (или $\lambda \otimes x$) в λx, $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Этот простой факт будет часто использоваться.

Замечание. В $\hat{\otimes}$- и $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-теориях введённые функторы «левого» и «правого» тензорного умножения практически не отличаются; точнее говоря, они естественно эквивалентны из-за коммутативности операций $\hat{\otimes}$ и $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$. Напротив, они существенно различны в $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-теории с её некоммутативным тензорным произведением. Однако в самом начале построения теории гомологий эти различия ещё не слишком важны.

Теперь мы введём, причём, как было указано выше, одновременно, наши три основные типа «алгебр в анализе». Именно, под *$\tilde{\otimes}$-алгеброй A* мы подразумеваем $\tilde{\otimes}$-пространство, снабжённое $\tilde{\otimes}$-биоператором умножения $m\colon A \times A \to A$ (который, вообще говоря, не предполагается $\tilde{\otimes}$-сжимающим). Таким образом, $\hat{\otimes}$-алгебра есть просто «классическая» банахова алгебра. Любая $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-алгебра автоматически является $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-алгеброй, но обратное неверно. Для $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$- и $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-алгебр мы будем использовать общее название «квантовые алгебры».

$\tilde{\otimes}$-оператор, ассоциированный с m, называется *оператором произведения для A* и обозначается $\pi\colon A \tilde{\otimes} A \to A$. Ясно, что он однозначно определён тем, что переводит $a \otimes b$ в ab, $a, b \in A$.

Замечание. Удивительная теорема Блечера [6] утверждает, что $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-алгебры могут быть охарактеризованы, с точностью до $\tilde{\otimes}$-изоморфизма, как замкнутые по операторной норме подалгебры некоторого пространства $\mathcal{B}(H)$ с их стандартным квантованием. (Поэтому $\tilde{\otimes}$-алгебры часто называются — с большой опасностью путаницы, по нашему мнению — «операторными алгебрами».) Но эта характеризация перестаёт быть верной в более обширном классе $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-алгебр.

От «алгебр в анализе» мы переходим к «модулям в анализе». Пусть A — фиксированная $\tilde{\otimes}$-алгебра. *Левый $\tilde{\otimes}$-модуль над A*, или, для краткости, *левый A-$\tilde{\otimes}$-модуль* — это $\tilde{\otimes}$-пространство X, снабжённое $\tilde{\otimes}$-биоператором левого внешнего умножения $\dot{m}\colon A \times X \to X$. Так как мы рассматриваем в этих лекциях почти исключительно левые модули, прилагательное «левый» будет часто опускаться.

Как и в случае алгебр, говоря о квантовых модулях, мы имеем в виду $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$- и $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-модули.

$\tilde{\otimes}$-оператор, ассоциированный с $\dot{m}$, называется *оператором внешнего произведения для X* и обозначается $\pi_X : A \tilde{\otimes} X \to X$. Ясно, что он переводит $a \otimes x$ в $a \cdot x$, $a \in A$, $x \in X$. (Мы часто пишем просто π, если X фиксировано.)

Наконец, последнее соглашение об обозначениях: через $\dot{\oplus}$ и $\dot{\otimes}$ мы обозначим гильбертову прямую сумму и гильбертово тензорное произведение гильбертовых пространств. Иногда, для того чтобы исключить возможную двусмысленность, мы будем использовать последний символ также для элементарных тензоров в соответствующих пространствах (например, $x \dot{\otimes} y \in H \dot{\otimes} K$) и также для соответствующих типов тензорных произведений операторов (например, $a \dot{\otimes} b$, действующий на $H \dot{\otimes} K$).

Остальные термины и обозначения будут зафиксированы далее.

2. Общие определения и свойства

Все основные гомологические определения, касающиеся проективности, параллельны во всех рассматриваемых случаях. Это специальные версии хорошо известных определений относительной гомологической алгебры, приспособленные к потребностям функционального анализа. Поэтому, чтобы избежать назойливого повторения, мы будем разъяснять общекатегорную схему, которая охватывает все наши функционально-аналитические конструкции (и множество других).

Пусть $\mathcal{K}$ — фиксированная аддитивная категория.

Определение 2.1. *Предотносительная структура* в $\mathcal{K}$ — это точный аддитивный функтор $\square\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$. (Напомним, что функтор называется *точным*, если он переводит различающиеся морфизмы категории—области определения в различающиеся морфизмы категории—области значений.) Категория, снабжённая предотносительной структурой, называется *предотносительной категорией*.

Манера, в которой мы ввели это понятие, подчёркивает, что в нашей паре категорий $\mathcal{K}$ — главный, а $\mathcal{L}$ — вспомогательный предмет нашего рассмотрения. По этой причине мы будем использовать выражение «предотносительная категория ($\mathcal{K}$, $\square\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$)» (или просто $(\mathcal{K}, \square)$), его смысл очевиден.

Следующая тройка примеров (рассматриваемых одновременно) для нас является основной. Пусть A — фиксированная $\tilde{\otimes}$-алгебра.

Определение 2.2. *Категория левых $\tilde{\otimes}$-модулей над A*, обозначаемая $\boldsymbol{A}$-$\tilde{\otimes}$-**mod** — это категория, объектами которой являются указанные модули, а морфизмами — гомоморфизмы модулей в алгебраическом смысле, которые одновременно являются $\tilde{\otimes}$-ограниченными операторами. Эта категория превращается в предотносительную с помощью функтора $\square\colon$ $\boldsymbol{A}$-$\tilde{\otimes}$-**mod** $\to$ $\tilde{\otimes}$-**Ban**, ставящего в соответствие модулям их подлежащие $\tilde{\otimes}$-пространства, а морфизмам — те же самые отображения, но рассматриваемые только как $\tilde{\otimes}$-операторы.

Таким образом, мы видим, что наш функтор (или, точнее, три функтора) $\square$ принадлежат большому семейству с общим названием «забывающие функторы». Наши конкретные функторы «забывают внешнее умножение».

В дальнейшем мы будем использовать прилагательное «забывающий», подразумевая по контексту или просто упомянутые тройки «конкретных» функторов, или «абстрактный» функтор из определения 2.1. Это, так же как и использование одинакового обозначения «$\square$», не должно привести к путанице.

Иногда нам будут нужны унитальные версии наших категорий, обозначаемые с помощью нашего «неспециализированного» символа через **U**$\boldsymbol{A}$-$\tilde{\otimes}$-**mod**.

Теперь подходящая базисная $\widetilde{\otimes}$-алгебра A предполагается унитальной и соответствующие левые $\widetilde{\otimes}$-модули над A также предполагаются унитальными. Очевидно, в случае унитальной алгебры A категория $\mathbf{U}\boldsymbol{A}\textbf{-}\widetilde{\otimes}\textbf{-mod}$ есть полная подкатегория в $\boldsymbol{A}\textbf{-}\widetilde{\otimes}\textbf{-mod}$. Мы также рассматриваем её как предотносительную категорию относительно аналогично определяемого забывающего функтора $\square$.

Замечание. Как уже было сказано, в наших лекциях мы рассматриваем только левые модули. Однако представленная ниже общая схема работает одинаково хорошо в случаях модулей других типов, в частности бимодулей (= двусторонних модулей). К сожалению, мы не имеем места и времени обсудить эти интересные случаи и их приложения.

Вернёмся к нашей абстрактной предотносительной категории $(\mathcal{K}, \square\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L})$. В дальнейшем нам будет удобно, говоря о морфизмах, подразумевать только те, которые принадлежат $\mathcal{K}$, и, принимая во внимание наши основные примеры, ссылаться на морфизмы в $\mathcal{L}$ как на «операторы». Предотносительная структура позволяет нам выделить в $\mathcal{K}$ класс «лучших» (в действительности «становящихся лучшими после забывания») морфизмов.

Определение 2.3. Морфизм $\sigma\colon X \to Y$ в $\mathcal{K}$ называется *допустимым*, если $\square(\sigma)$ — ретракция, т. е. $\square(\sigma)$ имеет правый обратный оператор в $\mathcal{L}$.

Замечание. Легко видеть, что допустимый морфизм в $(\mathcal{K}, \square)$ обязательно эпиморфизм. На самом деле точнее было бы назвать такие морфизмы «допустимыми как эпиморфизмы»; вскоре мы увидим, что это понятие ведёт к понятию проективного объекта предотносительной категории. Однако отличное от данного понятие морфизма, допустимого как мономорфизм, которое ведёт к понятию инъективного объекта, останется вне нашего рассмотрения.

Вернёмся на время к нашим основным примерам. Для каждого из них очевидно, что любой допустимый морфизм сюръективен и что его ядро как подпространство в подходящем банаховом пространстве имеет банахово дополнение. Что касается «классической» категории $\boldsymbol{A}\textbf{-}\widehat{\otimes}\textbf{-mod}$, так же очевидно, что верно и обратное; однако это не так для наших «квантовых» категорий (приведите простой контрпример!).

Теперь мы подошли к главному определению всего курса. Рассмотрим абстрактную предотносительную категорию $(\mathcal{K}, \ \square\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L})$.

Определение 2.4. Объект $P \in \mathcal{K}$ называется *проективным* (или, точнее, *проективным относительно* $\square$), если для любого допустимого морфизма $\sigma\colon X \to Y$ в $\mathcal{K}$ и произвольного морфизма $\varphi\colon P \to Y$ в $\mathcal{K}$ существует морфизм $\psi\colon P \to X$ (называемый *подъёмом* φ), такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\sigma"] \\ P \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, "\varphi"'] & Y \end{tikzcd}$$

коммутативна.

К сожалению, у нас нет пространства и времени, чтобы объяснить все достоинства понятия проективности, хотя на нём основана вся теория гомологий. В частности, методы, основанные на понятии проективности, являются очень мощными при вычислении групп когомологий и гомологий наших алгебр со всеми следствиями для структурной теории «алгебр в анализе» и различных областей, где эти алгебры используются (см., например, [13,18]). Сейчас просто поверим в то, что данное понятие действительно заслуживает более внимательного изучения.

Предложение 2.1. *Ретракт (в $\mathcal{K}$) проективного объекта проективен.*

Доказательство. Очевидно, нам нужно показать, что диаграмма в $\mathcal{K}$ вида

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, shift right, "\tau"'] & X \arrow[d, "\sigma"] \\ Q \arrow[u, shift right, "\rho"'] \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

(рассматриваемая исходно без ψ и ψ_1), в которой P проективен, $\tau \circ \rho = \mathbf{1}_Q$ и σ допустим, может быть сделана коммутативной добавлением морфизма ψ. Так как P проективен, композиция $\varphi \circ \tau$ (взятая в качестве φ в предыдущем определении) имеет подъём, скажем ψ_1. Остаётся положить $\psi := \psi_1 \circ \rho$. $\square$

Предложение 2.2. *Если P проективен, то каждый допустимый морфизм $\sigma\colon X \to P$ — ретракция в $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Всё, что нам нужно сделать, — положить $Y := P$ и $\varphi := \mathbf{1}_P$ в диаграмме (1.3). $\square$

Проективные объекты в наших основных категориях $\boldsymbol{A}$-$\tilde{\otimes}$-**mod** и **U**$\boldsymbol{A}$-$\tilde{\otimes}$-**mod**, естественно, будут называться *проективными левыми A-$\tilde{\otimes}$-модулями* и соответственно *проективными унитальными левыми A-$\tilde{\otimes}$-модулями*. Иногда в первом случае будет удобнее использовать термин «$\tilde{\otimes}$-проективный левый A-модуль», а во втором случае — термин «$\tilde{\otimes}$-проективный унитальный левый A-модуль».

Так как мы можем рассматривать унитальные модули (над унитальной алгеброй) в обеих категориях, кажется, что есть опасность путаницы. Однако в действительности «унитальная» версия проективности согласована с «общей» версией (см. следствие 2.3 ниже).

Где следует искать проективные объекты?

Помимо «абстрактного функтора забывания» $\square$, рассмотрим функтор $\mathcal{F}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{K}$, действующий в противоположном направлении. Рассмотрим также естественное преобразование функторов $\alpha\colon \mathbf{1}_{\mathcal{L}} \to \square\mathcal{F}$. Напомним, что это значит, что для любого $E \in \mathcal{L}$ оператор $\alpha_E\colon E \to \square\big(\mathcal{F}(E)\big)$ задан таким образом, что для любого оператора $\rho\colon E \to G$ в $\mathcal{L}$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\rho} & G \\ {\scriptstyle \alpha_E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_G} \\ \square(\mathcal{F}E) & \xrightarrow{\square(\mathcal{F}\rho)} & \square(\mathcal{F}G) \end{array}$$

коммутативна.

Определение 2.5. Функтор $\mathcal{F}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{K}$ называется *функтором свободы* (точнее, *функтором свободы относительно предотносительной структуры* $\square$), если существует преобразование α (называемое *ассоциированным с* $\mathcal{F}$), как выше, со следующим свойством: для любой пары ($X \in \mathcal{K}$, $E \in \mathcal{L}$) и оператора $\varphi_0\colon E \to \square X$ существует единственный морфизм $\varphi\colon \mathcal{F}(E) \to X$, превращающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\alpha_E"'] \arrow[dr, "\varphi_0"] & \\ \square(\mathcal{F}E) \arrow[r, "\square\varphi"] & \square X \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

в коммутативную. В этой ситуации объект в $\mathcal{K}$ вида $\mathcal{F}(E)$, $E \in \mathcal{L}$, называется *свободным объектом* (или $\mathcal{F}$-свободным объектом, если нет опасности путаницы) *с базой* E.

Определение 2.6. Предотносительная категория называется *относительной*, если она имеет функтор свободы.

В дальнейшем мы будем использовать выражение «относительная категория $(\mathcal{K}, \square, \mathcal{F}, \alpha)$», его смысл очевиден. Зафиксируем такой набор.

Теорема 2.1. *Любой свободный объект в относительной категории проективен.*

Доказательство. Пусть в принятых обозначениях $\mathcal{F}(E)$, $E \in \mathcal{L}$, — наш свободный объект, и пусть σ и φ — «данные подъёма» из определения 2.4; в частности, мы предполагаем, что $\square(\sigma)$ имеет правый обратный оператор ρ.

Рассмотрим в $\mathcal{L}$ диаграмму

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[d, "\alpha_E"'] & \square X \arrow[d, shift right, "\square\sigma"'] \\ \square(\mathcal{F}E) \arrow[r, "\square\varphi"] & \square Y \arrow[u, shift right, "\rho"'] \end{tikzcd}$$

с $\psi_0 = \rho\circ(\square\varphi)\circ\alpha_E$. Очевидно, что она коммутативна. Согласно определению 2.5 (точнее, его части, касающейся существования) существует морфизм ψ, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\alpha_E"'] \arrow[dr, "\psi_0"] & \\ \square(\mathcal{F}E) \arrow[r, "\square\psi"] & \square X \end{tikzcd}$$

коммутативной. Тогда мы имеем

$$\square(\sigma\psi)\circ\alpha_E = (\square\sigma)\circ(\square\psi)\circ\alpha_E = (\square\sigma)\circ\psi_0 = (\square\varphi)\circ\alpha_E.$$

Поэтому, полагая $\varphi_0 := (\square\varphi)\circ\alpha_E$, мы видим, что диаграмма (2.1), которая является коммутативной по построению, остаётся коммутативной, если мы заменим $\square\varphi$ на $\square(\sigma\psi)$. Используя снова определение 2.5 (но теперь часть, касающуюся единственности), мы получаем, что $\varphi = \sigma\circ\psi$. Остальное ясно. $\square$

Что абстрактная теория категорий даёт для наших конкретных предотносительных категорий модулей? Оказывается, что все они являются относительными и их свободные объекты могут быть построены с помощью соответствующей версии тензорного произведения.

Пусть A — $\tilde{\otimes}$-алгебра, X — A-$\tilde{\otimes}$-модуль и E — $\tilde{\otimes}$-пространство.

Предложение 2.3. *$\tilde{\otimes}$-пространство $X\tilde{\otimes}E$ является A-$\tilde{\otimes}$-модулем относительно внешнего умножения, корректно определённого соотношением*

$$a\cdot(x\otimes y) := a\cdot x\otimes y.$$

Доказательство. Рассмотрим оператор внешнего $\tilde{\otimes}$-произведения

$$\pi_X\colon A\tilde{\otimes}X\to X$$

(см. раздел 1). Применяя к нему функтор $?\tilde{\otimes}E$ (см. раздел 1), мы получаем $\tilde{\otimes}$-ограниченный оператор

$$\pi_X\tilde{\otimes}\mathbf{1}\colon (A\tilde{\otimes}X)\tilde{\otimes}E\to X\tilde{\otimes}E.$$

Напомним, что все тензорные произведения, обозначаемые теперь через $\tilde{\otimes}$, являются ассоциативными. Это означает, что существует $\tilde{\otimes}$-изометрия между $\tilde{\otimes}$-пространствами $A\tilde{\otimes}(X\tilde{\otimes}E)$ и $(A\tilde{\otimes}X)\tilde{\otimes}E$, корректно определённая с помощью отождествления элементарных тензоров $a\otimes(x\otimes y)$ и $(a\otimes x)\otimes y$ [14, с. 38; 10, с. 159, 128]. Беря композицию этой изометрии с $\pi_X\tilde{\otimes}\mathbf{1}$, мы видим, что существует $\tilde{\otimes}$-оператор из $A\tilde{\otimes}(X\tilde{\otimes}E)$ в $X\tilde{\otimes}E$, корректно определённый тем, что он отображает элементарный тензор $a\otimes(x\otimes y)$ в $(a\cdot x)\otimes y$. Обозначим через $\dot{m}\colon A\times(X\tilde{\otimes}E)\to X\tilde{\otimes}E$ соответствующий ассоциированный $\tilde{\otimes}$-биоператор. Используя свойство ассоциативности внешнего умножения в X и плотность линейной оболочки элементарных тензоров в $X\tilde{\otimes}E$, мы видим, что $\dot{m}$ имеет свойство ассоциативности, требуемое для левого внешнего умножения в $X\tilde{\otimes}E$. $\square$

В частном случае, когда мы рассматриваем нашу основную алгебру A как левый $\tilde{\otimes}$-модуль над собой (с внутренним умножением, рассматриваемым в качестве внешнего), эта конструкция приводит к A-$\tilde{\otimes}$-модулю $A\tilde{\otimes}E$. Далее, если наш E сам является A-$\tilde{\otimes}$-модулем, скажем Y, то легко убедиться, что оператор внешнего произведения $\pi_Y\colon A\tilde{\otimes}Y\to Y$ действительно является морфизмом в $\boldsymbol{A}$-$\tilde{\otimes}$-**mod**. (Действительно, соотношение $\pi_Y(a\cdot u) = a\cdot\pi_y$ очевидно, когда u — элементарный тензор в $A\tilde{\otimes}Y$, и, так как линейная оболочка элементарных тензоров плотна в последнем пространстве, это верно для всех $u \in A \tilde{\otimes} Y$.) Соответственно, в дальнейшем π_Y будет именоваться *морфизмом внешнего произведения для* Y. Характерным представителем этого класса морфизмов является, конечно, наш знакомый $\pi\colon A \tilde{\otimes} A \to A$ (отвечающий случаю $X = Y = A$); с этого момента он будет называться *морфизмом произведения для* A.

Теперь рассмотрим $\tilde{\otimes}$-оператор $\rho\colon E \to G$ между двумя $\tilde{\otimes}$-пространствами и соответствующий $\tilde{\otimes}$-оператор $\mathbf{1} \tilde{\otimes} \rho\colon X \tilde{\otimes} E \to X \tilde{\otimes} G$. Используя плотность линейной оболочки элементарных тензоров в $X \tilde{\otimes} E$, мы легко убеждаемся, что этот оператор действительно морфизм A-модулей. Это показывает, что в действительности ковариантный функтор $X \tilde{\otimes} ?$, введённый в разделе 1 как действующий на $\tilde{\otimes}$**-Ban**, теперь переводит эту категорию в $\boldsymbol{A}$**-**$\tilde{\otimes}$**-mod**.

Для того чтобы использовать функтор $X \tilde{\otimes} ?\colon \tilde{\otimes}$**-Ban** $\to$ $\boldsymbol{A}$**-**$\tilde{\otimes}$**-mod** для наших целей, нам в данный момент нужен очень специальный случай модуля X. Именно, возьмём нашу базисную $\tilde{\otimes}$-алгебру A и положим $A_+ := A \oplus \mathbb{C}$. A_+ содержит элемент $(0,1)$, обозначаемый e и называемый *присоединённой единицей*. Из чистой алгебры мы знаем, что A_+ — унитальная алгебра, так называемая *унитализация* A, с умножением

$$(a + \lambda e)(b + \mu e) := ab + \lambda b + \mu a + \lambda\mu, \quad a, b \in A, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C},$$

продолжающим заданное умножение в A. Единицей в A_+ является, конечно, присоединённая единица. Помимо этого, любой левый модуль Y над A становится левым модулем над A_+ с продолжением внешнего умножения

$$(a + \lambda e) \cdot x := a \cdot x + \lambda x, \quad a \in A, \quad y \in Y, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Однако мы перенесём эти конструкции в контекст функционального анализа несколько позже. Сейчас же мы только превратим A_+ в левый $\tilde{\otimes}$-модуль над A.

Имеется много способов сделать это (так же как и другие обещанные вещи) таким образом, чтобы естественное вложение A в A_+ являлось $\tilde{\otimes}$-изометрией. Для простоты мы выберем следующий конкретный способ. Рассмотрим изометрический оператор $i\colon A \to \mathcal{B}(H)$, совпадающий с заданным квантованием в обоих «квантовых» случаях и взятый произвольно в «классическом» случае (т. е. когда $\tilde{\otimes}$ есть $\hat{\otimes}$). После этого мы переходим к оператору

$$i \dot{\oplus} \mathbf{1}\colon A_+ = A \oplus \mathbb{C} \to \mathcal{B}(H \dot{\oplus} \mathbb{C})$$

и рассматриваем его как квантование A_+ в «квантовых» случаях. В «классическом» случае мы просто снабжаем A_+ индуцированной нормой. (Здесь, конечно, мы имеем $\|a + \lambda e\| = \max\{\|a\|, |\lambda|\}$.)

Рассмотрим операторы $j\colon A_+ \to A$, $a + \lambda e \mapsto a$, и $k\colon A_+ \to \mathbb{C}$, $a + \lambda e \mapsto \lambda$. Из выбора $\tilde{\otimes}$-нормы в A_+ легко следует, что они оба являются $\tilde{\otimes}$-ограниченными.

Предложение 2.4. *$\tilde{\otimes}$-пространство A_+, снабжённое внешним умножением*

$$\dot{m}\colon A \times A_+ \to A_+, \quad (a, b + \lambda e) \mapsto ab + \lambda a,$$

т. е. соответствующим ограничением внутреннего умножения в A_+, есть A-$\tilde{\otimes}$-модуль.

Доказательство. Операторы j и k, указанные выше, задают операторы

$$\mathbf{1} \mathbin{\tilde{\otimes}} j \colon A \mathbin{\tilde{\otimes}} A_+ \to A \mathbin{\tilde{\otimes}} A, \quad \mathbf{1} \mathbin{\tilde{\otimes}} k \colon A \mathbin{\tilde{\otimes}} A_+ \to A \mathbin{\tilde{\otimes}} \mathbb{C},$$

участвующие в (некоммутативной!) диаграмме

$$\begin{tikzcd}
& A \mathbin{\tilde{\otimes}} A \arrow[dr, "\pi"] & & \\
A \mathbin{\tilde{\otimes}} A_+ \arrow[ur, "\mathbf{1} \tilde{\otimes} j"] \arrow[dr, "\mathbf{1} \tilde{\otimes} k"'] & & A \arrow[r, "\mathbf{in}"] & A_+ \\
& A \mathbin{\tilde{\otimes}} \mathbb{C} \arrow[ur, "i"'] & &
\end{tikzcd} ,$$

где π — оператор произведения (см. выше), i — стандартная $\tilde{\otimes}$-изометрия между $A \mathbin{\tilde{\otimes}} \mathbb{C}$ и A, переводящая $\lambda \otimes y$ в λy, и $\mathbf{in}$ — естественное вложение. Положим

$$\pi_+ := (\mathbf{in}) \circ \pi \circ (\mathbf{1} \mathbin{\tilde{\otimes}} j) + (\mathbf{in}) \circ i \circ (\mathbf{1} \mathbin{\tilde{\otimes}} k).$$

Так как все рассматриваемые операторы $\tilde{\otimes}$-ограниченные, то же верно и для π_+. Поэтому биоператор $\dot{m}$, очевидно, будучи ассоциированным с π_+, является согласно теореме 1.1 $\tilde{\otimes}$-ограниченным. $\square$

Теперь мы сконцентрируемся на функторе $A_+ \tilde{\otimes} ?\colon$ $\widetilde{\otimes}$-**Ban** $\to$ $\boldsymbol{A}$-$\widetilde{\otimes}$-**mod**, т. е. на частном случае $X \mathbin{\tilde{\otimes}} ?$, когда $X := A_+$. Для любого $E \in$ $\widetilde{\otimes}$-**Ban** рассмотрим отображение

$$\alpha_E \colon E \to \square(A_+ \mathbin{\tilde{\otimes}} E), \quad y \mapsto e \otimes y.$$

Очевидно, это $\tilde{\otimes}$-оператор между E и $\tilde{\otimes}$-пространством $\square(A_+ \mathbin{\tilde{\otimes}} E)$, где, напомним, $\square$ — забывающий (о внешнем умножении) функтор из $\widetilde{\otimes}$-**Ban** в $\boldsymbol{A}$-$\widetilde{\otimes}$-**mod**. Легко видеть, что семейство операторов $\alpha = \{\alpha_E;\ E \in \widetilde{\otimes}\text{-}\mathbf{Ban}\}$ является естественным преобразованием между этими двумя функторами, действующими на категории $\widetilde{\otimes}$-**Ban**, именно, между тождественным функтором $\mathbf{1}$ и функтором $\square(A_+ \mathbin{\tilde{\otimes}} ?)$.

Когда из контекста ясно, что в конкретном случае мы рассматриваем данный $\tilde{\otimes}$-модуль X просто как $\tilde{\otimes}$-пространство, мы будем писать или $\square X$, или просто X, это не приведёт к путанице. В частности, $A_+ \mathbin{\tilde{\otimes}} X$ и $A_+ \mathbin{\tilde{\otimes}} \square X$ обозначают одинаковый объект.

Предложение 2.5. *Функтор $A_+ \tilde{\otimes} ?$ — функтор свободы относительно предотносительной структуры $\square\colon$ $\boldsymbol{A}$-$\widetilde{\otimes}$-**mod** $\to$ $\widetilde{\otimes}$-**Ban**, и ассоциированное с ним естественное преобразование функторов есть α. (Таким образом, предотносительная категория ($\boldsymbol{A}$-$\widetilde{\otimes}$-**mod**, $\square$) на самом деле является относительной.) Более того, если $E \in$ $\widetilde{\otimes}$-**Ban**, $X \in$ $\boldsymbol{A}$-$\widetilde{\otimes}$-**mod** и $\varphi_0 \colon E \to X$ — $\tilde{\otimes}$-ограниченный оператор, то морфизм φ, фигурирующий в определении 2.5 и теперь действующий из $A_+ \tilde{\otimes} E$ в X, корректно определён как переводящий $(a + \lambda e) \otimes y = a \cdot (e \otimes y) + \lambda(e \otimes y)$ в $a \cdot \varphi_0(y) + \lambda \varphi_0(y)$.*

Доказательство. Согласно определению свободы мы должны взять E, X и φ_0, указанные в формулировке, и показать, что существует единственный морфизм φ, такой что $(\square\varphi)\circ\alpha_E=\varphi_0$; в данном контексте последнее равенство означает просто, что $\varphi(e\otimes y)=\varphi_0(y)$ для любого $y\in E$.

Требуемое φ, будучи морфизмом, должно переводить $(a+\lambda e)\otimes y=a\cdot(e\otimes y)+$ $+\lambda(e\otimes y)$ в $a\cdot\varphi_0(y)+\lambda\varphi_0(y)$, как указано в формулировке. Поэтому φ определено однозначно на элементарных тензорах и, значит, всюду в $A_+\mathbin{\tilde{\otimes}}E$. Единственность тем самым доказана. Перейдём к существованию.

Теперь вспомним об операторах

$$j\colon A_+\to A,\quad k\colon A_+\to\mathbb{C}.$$

Они определяют $\tilde{\otimes}$-ограниченные операторы

$$j\mathbin{\tilde{\otimes}}\mathbf{1}_E\colon A_+\mathbin{\tilde{\otimes}}E\to A\mathbin{\tilde{\otimes}}E,\quad k\mathbin{\tilde{\otimes}}\mathbf{1}_E\colon A_+\mathbin{\tilde{\otimes}}E\to\mathbb{C}\mathbin{\tilde{\otimes}}E,$$

участвующие в (некоммутативной) диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & A\mathbin{\tilde{\otimes}}E \arrow[r, "\mathbf{1}\tilde{\otimes}\varphi_0"] & A\mathbin{\tilde{\otimes}}X \arrow[dr, "\pi_X"] & \\
A_+\mathbin{\tilde{\otimes}}E \arrow[ur, "j\tilde{\otimes}\mathbf{1}"] \arrow[dr, "k\tilde{\otimes}\mathbf{1}"'] & & & X, \\
 & \mathbb{C}\mathbin{\tilde{\otimes}}E \arrow[r, "i"] & E \arrow[ur, "\varphi_0"'] &
\end{tikzcd}$$

где i — стандартная $\tilde{\otimes}$-изометрия между $\mathbb{C}\mathbin{\tilde{\otimes}}X$ и X, переводящая $\lambda\otimes y$ в λy. Теперь определим φ как

$$\pi\circ(\mathbf{1}_A\mathbin{\tilde{\otimes}}\varphi_0)\circ(j\mathbin{\tilde{\otimes}}\mathbf{1}_E)+\varphi_0\circ i\circ(k\mathbin{\tilde{\otimes}}\mathbf{1}_E).$$

Так как все наши операторы являются $\tilde{\otimes}$-ограниченными, то же верно для φ. Далее, нижний ряд операторов в диаграмме немедленно даёт $\varphi(e\otimes y)=\varphi_0(y)$, $y\in E$, что и требовалось. Наконец, для элементарного тензора $u:=(a+\lambda e)\otimes y$ мы имеем $\varphi(u)=a\cdot\varphi_0(y)+\lambda\varphi_0(y)$. С другой стороны, для любого $b\in A$ верхний ряд операторов в диаграмме даёт, что $\varphi(b\cdot u)$, т. е. $\varphi\big((ba+\lambda b)\otimes y\big)$ равно $(ba+\lambda b)\cdot\varphi_0(y)$. Поэтому мы имеем $\varphi(b\cdot u)=b\cdot\varphi(u)$ для любого элементарного тензора u в $A_+\mathbin{\tilde{\otimes}}E$. В силу плотности линейной оболочки этих элементов в последнем пространстве это равенство верно для всех элементов u из $A_+\mathbin{\tilde{\otimes}}E$. Таким образом, φ является морфизмом левых модулей над A. $\square$

Следствие 2.1. *Модули вида $A_+\mathbin{\tilde{\otimes}}E$, $E\in\tilde{\otimes}$-**Ban**, являются проективными объектами в* $\boldsymbol{A}$-$\tilde{\otimes}$-**mod**.

В соответствии со сказанным выше упомянутые левые A-$\tilde{\otimes}$-модули будут называться *свободными*.

Предотносительная категория $(\mathbf{U}\boldsymbol{A}\text{-}\tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{mod},\square)$ также является относительной, и в этом случае конструкция подходящего функтора свободы немного проще. Это функтор

$$A\mathbin{\tilde{\otimes}}?\colon\ \tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{Ban}\longrightarrow\mathbf{U}\boldsymbol{A}\text{-}\tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{mod},$$

и соответствующее естественное преобразование функторов — это семейство

$$\alpha:=\{\alpha_E\colon E\to\square(A_+\mathbin{\tilde{\otimes}}E),\ y\mapsto e\otimes y\},$$

где в настоящий момент e обозначает «внутреннюю» (заданную) единицу в A. (Теперь, конечно, α связывает тождественный функтор $\mathbf{1}$ и функтор $\square(A \mathbin{\tilde{\otimes}} ?)$.) Детали мы оставляем читателю.

Сравним в случае общей алгебры A модули $A_+ \mathbin{\tilde{\otimes}} E$ и $A \mathbin{\tilde{\otimes}} E$. Пусть $\mathbf{in}$ обозначает естественное вложение A в A_+. Так как оператор

$$\square(\mathbf{in} \mathbin{\tilde{\otimes}} \mathbf{1}_E)\colon A \mathbin{\tilde{\otimes}} E \to A_+ \mathbin{\tilde{\otimes}} E$$

имеет правый обратный, именно $j \mathbin{\tilde{\otimes}} \mathbf{1}_E$, он определяет $\tilde{\otimes}$-изоморфизм $A \mathbin{\tilde{\otimes}} \mathbf{1}_E$ на его образ. (На самом деле он даёт $\tilde{\otimes}$-изометрию, но нам сейчас это не нужно.) Поэтому мы можем отождествить $A \mathbin{\tilde{\otimes}} E$ с этим образом и рассматривать $A \mathbin{\tilde{\otimes}} E$ как замкнутый подмодуль в $A_+ \mathbin{\tilde{\otimes}} E$.

Мы возвращаемся к общей схеме гомологии в абстрактной относительной категории $(\mathcal{K}, \square\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L})$ с функтором свободы $\mathcal{F}$ и ассоциированным естественным преобразованием функторов α. Теперь мы покажем, что присутствие функтора свободы на самом деле даёт больше, чем просто класс проективных объектов. Именно, оказывается, что каждый объект является областью значений допустимого морфизма из свободного объекта, и в терминах такого морфизма будет дано работающее эквивалентное определение проективности.

Возьмём произвольное $X \in \mathcal{K}$ и рассмотрим тождественный оператор $\mathbf{1}_{\square X}$ в $\mathcal{L}$. Последний, будучи взят в качестве φ_0 в определении 2.5, определяет морфизм $\mathcal{F}(\square X)$ в X в $\mathcal{K}$, обозначаемый в определении φ. Он заслуживает специального названия и обозначения.

Определение 2.7. Указанный морфизм называется *каноническим морфизмом для X* и обозначается π_X^+.

Предложение 2.6. *Морфизм π_X^+ допустим.*

Доказательство. Полагая в определении 2.5 $\varphi_0 := \mathbf{1}_{\square X}$ и $\varphi := \pi_X^+$, мы видим, что $(\square\pi_X^+) \circ \alpha_{\square X} = \mathbf{1}_{\square X}$. Остальное ясно. $\square$

Теорема 2.2. *Следующие свойства объекта $P \in \mathcal{K}$ эквивалентны*:

1) *P проективен*;
2) *P — ретракт свободного объекта в $\mathcal{K}$*;
3) *канонический морфизм $\pi_P^+\colon \mathcal{F}(\square P) \to P$ является ретракцией.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 3) следует из теоремы 2.1 и предложений 2.2 и 2.6.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 2) очевидна.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) следует из теоремы 2.1 и предложения 2.1. $\square$

Легко понять вид канонического морфизма для нашего основного примера, т. е. (тройной) относительной категории $(\boldsymbol{A}\text{-}\tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{mod}, \square)$. Для данного $X \in \boldsymbol{A}\text{-}\tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{mod}$, взяв $\square X$ в качестве E и $\alpha_{\square X}$ в качестве φ_0, мы видим, что морфизм $\pi_X^+\colon A \mathbin{\tilde{\otimes}} X \to X$ корректно определён тем, что он переводит $(a + \lambda e) \otimes x$, $a \in A$, $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$, в $a \cdot x + \lambda x$. (Если мы вспомним из чистой алгебры, что X является левым модулем над A_+, мы можем отобразить $b \otimes x$, $b \in A_+$,

$x \in X$, в $b \cdot x$.) В частном случае $X := A_+$ (см. предложение 2.4) мы получаем морфизм $\pi^+ \colon A_+ \tilde{\otimes} A_+ \to A_+$, корректно определённый тем, что он переводит $b \otimes c$, $b, c \in A_+$, в bc. (Напомним, что A_+ — алгебра.) Замечая, что умножение в A_+ ассоциировано с π^+ и внешнее умножение в произвольном $X \in \boldsymbol{A}\text{-}\tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{mod}$ ассоциировано с π^+_X, мы немедленно получаем следствие.

Следствие 2.2.

1. *Если алгебра A является $\tilde{\otimes}$-алгеброй, то то же верно и для A_+.*
2. *Если $X \in \boldsymbol{A}\text{-}\tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{mod}$, то X, рассматриваемый как левый модуль над A_+, является $\tilde{\otimes}$-модулем.*

Для категорий $\boldsymbol{A}\text{-}\tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{mod}$ и $\mathbf{U}\boldsymbol{A}\text{-}\tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{mod}$ предыдущая теорема приобретает следующий вид.

Теорема 2.2′. *Пусть A — произвольная* (*унитальная*) *$\tilde{\otimes}$-алгебра. Следующие свойства произвольного* (*соответственно унитального*) *A-$\tilde{\otimes}$-модуля P эквивалентны*:

1) *P проективен в $\boldsymbol{A}\text{-}\tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{mod}$* (*соответственно в $\mathbf{U}\boldsymbol{A}\text{-}\tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{mod}$*);
2) *P является ретрактом модуля вида $A_+ \tilde{\otimes} E$* (*соответственно $A \tilde{\otimes} E$*), *где E является $\tilde{\otimes}$-пространством*;
3) *канонический морфизм $\pi^+_P \colon A_+ \tilde{\otimes} P \to P$* (*соответственно морфизм внешнего произведения $\pi_P \colon A \tilde{\otimes} P \to P$*) *является ретракцией.* □

Мы завершим этот раздел следующим общим наблюдением. Работая с, вообще говоря, неунитальными модулями, мы можем довольно часто проверять их проективность с помощью морфизмов внешнего произведения вместо более сложных канонических морфизмов.

Для любого $X \in \boldsymbol{A}\text{-}\tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{mod}$ замыкание $\operatorname{span}\{a \cdot x;\ a \in A,\ x \in X\}$ обозначим через $A \cdot X$. Очевидно, $A \cdot X$ является подмодулем в X, его называют *существенным подмодулем* X. В частности, существенный подмодуль $A_+ \tilde{\otimes} E$, $E \in \tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{Ban}$, очевидно, есть $A \tilde{\otimes} E$ (отождествленный, напомним, с образом $\mathbf{in} \tilde{\otimes} \mathbf{1}_E$). Модуль X называется *невырожденным* (или *стабильным*, или *существенным*), если $A \cdot X = X$. Также заметим, что для любого морфизма $\varphi \colon X \to Y$ в $\boldsymbol{A}\text{-}\tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{mod}$ мы, очевидно, имеем $\varphi(A \cdot X) \subseteq A \cdot Y$.

Теорема 2.3. *Для проективности модуля $P \in \boldsymbol{A}\text{-}\tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{mod}$ достаточно и, если P невырожден, также необходимо, чтобы морфизм внешнего произведения $\pi \colon A \tilde{\otimes} P \to P$ являлся ретракцией.*

Доказательство. Композиция правого обратного морфизма к π с морфизмом $\mathbf{in} \tilde{\otimes} \mathbf{1}_P$, очевидно, является правым обратным морфизмом для π^+. Применяя предыдущую теорему, получаем достаточность.

Пусть модуль P проективен. Тогда предыдущая теорема даёт морфизм $\rho \colon P \to A_+ \tilde{\otimes} P$, правый обратный к π^+. Так как $P = A \cdot P$, из упомянутых свойств существенных подмодулей следует, что образ ρ лежит в $A \tilde{\otimes} P$. Очевидно, соответствующее коограничение ρ является правым обратным для π. □

Так как унитальные модули над унитальными алгебрами являются невырожденными, мы немедленно получаем следствие.

Следствие 2.3. *Унитальный левый $\tilde{\otimes}$-модуль над унитальной $\tilde{\otimes}$-алгеброй A проективен как объект* $\mathbf{U}\boldsymbol{A}$**-**$\tilde{\otimes}$**-mod** *тогда и только тогда, когда он проективен как объект в* $\boldsymbol{A}$**-**$\tilde{\otimes}$**-mod**.

Вполне может случиться, и мы продемонстрируем это на примерах, что модуль, будучи непроективным в классической теории, становится проективным после некоторого естественного квантования. Примеры противоположного характера также существуют. Однако, если мы будем сравнивать проективность в двух квантовых категориях, существует определённая «односторонняя» связь.

Предложение 2.7. *Пусть X — $\tilde{\otimes}$-модуль над $\tilde{\otimes}$-алгеброй A для случая $\tilde{\otimes} = \overset{\mathrm{h}}{\otimes}$ и, следовательно, $\tilde{\otimes} = \overset{\mathrm{o}}{\otimes}$. Предположим, что X является $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-проективным. Тогда он и $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-проективен.*

Доказательство. Пусть $\rho\colon X \to A_+ \overset{\mathrm{o}}{\otimes} X$ — правый обратный для канонического морфизма для X в $\boldsymbol{A}$**-**$\overset{\mathbf{o}}{\otimes}$**-mod**. Тогда композиция операторов $j_2 \circ \rho\colon X \to A_+ \overset{\mathrm{h}}{\otimes} X$, где j_2 — оператор из раздела 1 (см. диаграмму (1.3)), очевидно, является правым обратным для канонического морфизма для X в $\boldsymbol{A}$**-**$\overset{\mathbf{h}}{\otimes}$**-mod**. Остальное ясно. □

3. Проективные и непроективные идеалы

Мы переходим к одной из наиболее типичных проблем топологической гомологии: какие модули, принадлежащие к тому или иному хорошо известному и «популярному» классу, являются проективными? Фактически это означает прояснение связей между проективностью и свойствами алгебр и модулей, выраженными в традиционных терминах алгебры, анализа и топологии.

Представляется естественным начать с такого важного класса модулей, как идеалы, собственные и несобственные.

Пусть A — $\tilde{\otimes}$-алгебра и I — её левый замкнутый идеал. Очевидно, I является левым A-$\tilde{\otimes}$-модулем относительно внешнего умножения, определённого как $a \cdot x := ax$, $a \in A$, $x \in I$ (т. е. как внутреннее умножение в A). Когда такой модуль является проективным? В частности, этот вопрос касается несобственного идеала A, т. е. самого A. Если последний как левый A-$\tilde{\otimes}$-модуль является проективным, мы будем говорить, что A является *левой проективной $\tilde{\otimes}$-алгеброй*.

Сначала докажем простое достаточное условие.

Предложение 3.1. *Если I как алгебра имеет правую единицу, то это проективный модуль.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\tau\colon A_+ \to I$, $a \mapsto ap$, где p — упомянутая правая единица. Так как умножение в A_+ является $\tilde{\otimes}$-биоператором, τ является $\tilde{\otimes}$-оператором (совместная непрерывность влечёт раздельную непрерывность). Более того, очевидно, это морфизм A-модулей. Наконец, легко убедиться, что $\tau \circ (\mathbf{in}) = \mathbf{1}_I$, где $\mathbf{in}$ — естественное вложение I в A_+. Мы видим, что I является ретрактом в $\boldsymbol{A}$-$\tilde{\otimes}$-**mod** свободного модуля $A_+ = A_+ \tilde{\otimes} \mathbb{C}$, и поэтому согласно пункту 2) теоремы 2.2$'$ он проективен. □

Легко догадаться, что указанное достаточное условие проективности далеко не является необходимым. Перед тем как представить простейший подходящий пример, мы напомним естественный способ квантования очень важного класса банаховых алгебр.

Пусть Ω — локально компактное топологическое пространство. Как обычно, $C_0(\Omega)$ обозначает банахову алгебру (= $\hat{\otimes}$-алгебру) всех непрерывных исчезающих на бесконечности функционалов на Ω с поточечными операциями и sup-нормой. Эта алгебра (более аккуратно, её подлежащее банахово пространство) снабжена следующим специальным квантованием. Рассмотрим изометрический оператор из $C_0(\Omega)$ в $\mathcal{B}\big(l_2(\Omega)\big)$, переводящий функцию $a(t)$ в «диагональный» оператор покоординатного умножения $g(t) \mapsto a(t)g(t)$, $g \in l_2(\Omega)$. Легко убедиться, что норма в пространстве $\mathrm{M}_n\big(C_0(\Omega)\big)$, соответствующая такому квантованию, задаётся как

$$\|a\|_n = \sup\{\|a(t)\|;\ t \in \Omega\},$$

где $a = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n\big(C_0(\Omega)\big)$ и $\|a(t)\|$ — стандартная норма скалярной матрицы $\big(a_{ij}(t)\big) \in \mathrm{M}_n$. (Напомним, что алгебра M_n отождествлена с $\mathcal{B}(\mathbb{C})$.) Указанное квантование $C_0(\Omega)$ будет называться *стандартным*.

Мы напомним, что *равномерная алгебра* — это, по определению, замкнутая подалгебра в некотором пространстве $C_0(\Omega)$. Такая алгебра рассматривается как банахова алгебра и как квантовое пространство с наследуемыми нормой и квантованием; последнее квантование также будет называться *стандартным**. Хорошо известно (и легко проверяется), что каждая равномерная алгебра является $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$- и, следовательно, $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-алгеброй относительно стандартного квантования.

Пример 3.1. Пусть $\mathbb{D}$ — замкнутый единичный диск в $\mathbb{C}$ и $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ — дисковая алгебра, т. е. замкнутая подалгебра в $C(\mathbb{D})$, состоящая из функций, аналитичных во внутренности диска. Рассмотрим максимальный идеал $\mathcal{A}_0(\mathbb{D}) = \{w\colon w(0) = 0\}$ в $\mathcal{A}(\mathbb{D})$.

Из того, что было сказано про норму и квантование равномерной алгебры, легко следует, что отображение из $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ в $\mathcal{A}_0(\mathbb{D})$, переводящее $w(z)$ в $zw(z)$, является $\tilde{\otimes}$-изоморфизмом между левыми $\mathcal{A}(\mathbb{D})$-$\tilde{\otimes}$-модулями $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ и $\mathcal{A}_0(\mathbb{D})$. Так как алгебра $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ унитальна, она является свободным унитальным модулем над

*Действительно, это квантование — частный случай так называемого минимального квантования, процедуры, которая может быть применена к произвольному банахову пространству (см. [10]). Но этот факт в наших лекциях не потребуется.

собой и, следовательно, проективна. Поэтому идеал $\mathcal{A}_0(\mathbb{D})$ также является проективным модулем.

Этот пример показывает, что проективный идеал в $\tilde{\otimes}$-алгебре никоим образом не обязан иметь правую единицу.

Упражнение 3.1. Покажите, что $\mathcal{A}_0(\mathbb{D})$ также является проективным модулем над собой, т. е. левой проективной $\tilde{\otimes}$-алгеброй. И это несмотря на то, что морфизм произведения π_A для такой A не является сюръективным отображением. (В частности, мы видим, что условие на X быть невырожденным в теореме 2.3 не может быть опущено.)

Теперь мы сконцентрируемся на идеалах $\tilde{\otimes}$-алгебр $C_0(\Omega)$. Как хорошо известно, каждый замкнутый идеал I такой алгебры имеет вид

$$I = \{a \in C_0(\Omega)\colon a(t) = 0 \text{ для всех } t \in \Delta\},$$

где Δ — замкнутое подмножество в Ω, так называемая *оболочка* идеала I. Мы напомним также, что открытое множество $\Omega_I := \Omega \setminus \Delta$ совпадает, с точностью до гомеоморфизма, со спектром Гельфанда I как коммутативной банаховой алгебры.

Оказывается, что свойство идеала I в $C_0(\Omega)$ быть или не быть проективным полностью определяется топологией Ω_I. Напомним, что топологическое пространство T называется *паракомпактным*, если каждое открытое покрытие σ пространства T имеет локально конечное измельчение σ_0. Здесь под «измельчением» понимается, что каждое множество, принадлежащее σ_0, содержится в некотором множестве σ, а «локально конечное» означает, что для каждой точки в T существует окрестность, имеющая непустое пересечение только с конечным числом множеств, принадлежащих σ_0.

Теорема 3.1.

1. *Замкнутый идеал в $\tilde{\otimes}$-алгебре $C_0(\Omega)$ является проективным $C_0(\Omega)$-$\tilde{\otimes}$-модулем тогда и только тогда, когда его спектр Гельфанда паракомпактен. В частности, $C_0(\Omega)$ является левой проективной $\tilde{\otimes}$-алгеброй тогда и только тогда, когда Ω — паракомпактное пространство.*
2. *Если замкнутый идеал I в произвольной коммутативной $\tilde{\otimes}$-алгебре A является проективным A-$\tilde{\otimes}$-модулем, то спектр Гельфанда I паракомпактен* (*обобщение части «$\Longrightarrow$» утверждения* 1). *В частности, если коммутативная $\tilde{\otimes}$-алгебра является левой проективной, то её спектр Гельфанда паракомпактен.*

Мы не будем приводить здесь полного доказательства этой теоремы, которое довольно длинное и в некоторых частях техническое (оно приведено в традиционной ситуации, т. е. для $\hat{\otimes}$-алгебр, в [13]). Вместо этого мы детально рассмотрим два проясняющих дело частных случая. Первый будет иллюстрировать «достаточность», второй будет связан с «необходимостью».

Теорема 3.2. *Если Ω — метризуемое компактное пространство, то каждый замкнутый идеал в $\tilde{\otimes}$-алгебре $C_0(\Omega)$ проективен.*

Так как хорошо известная теорема А. Стоуна утверждает, что каждое метризуемое топологическое пространство паракомпактно, этот результат немедленно следует из теоремы 3.1. Однако мы дадим независимое доказательство.

Доказательство. Пусть I — данный идеал. Согласно теореме 2.3 (или согласно пункту 2) теоремы 2.2$'$ и следствию 2.3) достаточно показать, что канонический морфизм $\pi := \pi_I \colon A \tilde{\otimes} I \to I$ имеет правый обратный в $\boldsymbol{C(\Omega)}$-$\tilde{\otimes}$-**mod**.

Пусть $\Delta \subseteq \Omega$ — оболочка I. Так как пространство Ω метризуемо, существует база U_n, $n = 1, 2, \ldots$, окрестностей Δ, такая что замыкание U_{n+1} лежит в U_n. Возьмём $e_n \in I$, такое что $0 \leqslant e_n \leqslant 1$, $e_n(t) = 1$ для $t \notin U_n$ и $e_n(t) = 0$ для $t \in U_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Очевидно, эта последовательность функций — аппроксимативная единица для I. Далее, мы полагаем $y_1 := e_1$ и $y_n := e_n - e_{n-1}$ для $n > 1$. Наконец, положим $z_n := \sqrt{y_n}$ для всех n.

Теперь для произвольного $x \in I$ мы рассмотрим формальный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x z_n \otimes z_n$$

элементарных тензоров в $A \otimes I$. Напомним, что это линейное пространство плотно в банаховом пространстве $A \tilde{\otimes} I$. (Здесь, конечно, под $A \overset{\mathrm{h}}{\otimes} I$ и $A \overset{\mathrm{o}}{\otimes} I$ мы подразумеваем «обычное» банахово пространство первого этажа соответствующего квантового банахова пространства.) Мы хотим доказать, что этот ряд сходится в $A \tilde{\otimes} I$, и одновременно оценить норму его суммы. Для этой цели нам потребуется следующая лемма.

Лемма 3.1. *Для произвольного $a \in C(\Omega)$ и натуральных m, n, $m < n$, рассмотрим сумму*

$$u := \sum_{k=m+1}^{n} a z_n \otimes z_n.$$

Тогда норма этого элемента банахова пространства $A \tilde{\otimes} I$ удовлетворяет соотношению $\|u\| \leqslant 2C$, где $C := \max\{|a(t)| \colon t \in U_{m-1}\}$, если $m > 1$, и $C := \|a\|$, если $m = 1$.

Доказательство. Идея доказательства состоит в том, чтобы представить u в виде, более удобном для наших целей. Именно, рассмотрим в $A \tilde{\otimes} I$ элемент

$$v = \frac{1}{n-m} \sum_{k=1}^{n-m} \left[\left(\sum_{q=1}^{n-m} \zeta^{qk} a z_{m+q} \right) \otimes \left(\sum_{r=1}^{n-m} \zeta^{-rk} z_{m+r} \right) \right],$$

где ζ есть $e^{2\pi i/(n-m)}$ (примитивный корень степени $n - m$ из 1). Так как норма в $A \tilde{\otimes} I$ есть кросснорма (т. е. норма любого элементарного тензора — это произведение норм его тензорных сомножителей), мы имеем

$$\|v\| \leqslant \frac{1}{n-m} \sum_{k=1}^{n-m} \left\| \sum_{q=1}^{n-m} \zeta^{qk} a z_{m+q} \right\| \left\| \sum_{r=1}^{n-m} \zeta^{-rk} z_{m+r} \right\|,$$

где нормы в правой части неравенства являются, как мы помним, sup-нормами в $C(\Omega)$. Далее, для каждого $t \in \Omega$ мы имеем

$$\left|\sum_{q=1}^{n-m} \zeta^{qk} a(t) z_{m+q}(t)\right| \leqslant |a(t)| \sum_{q=1}^{n-m} z_{m+q}(t).$$

Функции $z_n(t)$ выбраны так, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2(t) \leqslant 1$$

и в этой сумме не более двух ненулевых слагаемых. Поэтому

$$\sum_{q=1}^{n-m} z_{n+q}(t) \leqslant \sqrt{2}.$$

Помимо этого, если $t \notin U_n$, то, очевидно, $z_{n+k} = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Поэтому

$$\left|\sum_{q=1}^{n-m} \zeta^{qk} a(t) z_{m+q}(t)\right| \leqslant C\sqrt{2}$$

и

$$\left|\sum_{r=1}^{n-m} \zeta^{qk} z_{m+r}(t)\right| \leqslant \sqrt{2}$$

для всех $t \in \Omega$ и $k = 1, \ldots, n-m$. Комбинируя эти оценки с оценкой $\|v\|$, указанной выше, мы немедленно получаем, что $\|v\| \leqslant 2C$.

Но что такое v? Используя алгебраические свойства операции $\otimes$ и собирая подобные члены, мы видим, что

$$v = \frac{1}{n-m} \sum_{q,r=1}^{n-m} \lambda_{q,r} a z_{m+q} \otimes z_{m+r},$$

где $\lambda_{q,r} = \sum\limits_{k+1}^{n} \zeta^{k(q-r)}$. Но тогда, очевидно, $\lambda_{q,r} = n - m$, если $q = r$, и $\lambda_{qr} = 0$ в противном случае. Поэтому v не что иное, как наше исходное u. Остальное ясно. $\square$

Окончание доказательства теоремы 3.2. Вернёмся к формальному ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x z_n \otimes z_n$, где $x \in I$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Так как $x = 0$ на Δ, существует $m \in \mathbb{N}$, такое что $|x(t)| < \varepsilon$ при $t \in U_m$. Поэтому согласно лемме 3.1 для любого $n > m$

$$\left\|\sum_{k=m+1}^{n} x z_n \otimes z_n\right\| < 2\varepsilon.$$

Таким образом, наш ряд удовлетворяет условию критерия Коши и, следовательно, сходится в банаховом пространстве $C(\Omega) \mathbin{\tilde{\otimes}} I$. Обозначим сумму этого ряда через $\rho_{\tilde{\otimes}}(x)$.

Теперь рассмотрим отображение

$$\rho_{\tilde{\otimes}}\colon I \to C(\Omega) \mathbin{\tilde{\otimes}} I, \quad x \mapsto \rho_{\tilde{\otimes}}(x).$$

Очевидно, это линейный оператор и, более того, морфизм левых $C(\Omega)$-модулей (для начала в смысле чистой алгебры). Более того,

$$\pi \circ \rho_{\tilde{\otimes}}(x) = \pi\left(\lim_{n\to\infty} \sum_1^n x z_k \otimes z_k\right) = \\ = \lim_{n\to\infty} \pi\left(\sum_1^n x z_k \otimes z_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n x z_k^2 = \lim_{n\to\infty} x e_n = x.$$

Таким образом $\pi \circ \rho_{\tilde{\otimes}} = \mathbf{1}_I$, и из всех условий теоремы 2.3 осталось показать только, что $\rho_{\tilde{\otimes}}$ является $\tilde{\otimes}$-оператором.

Лемма 3.1, сейчас рассматриваемая для $m = 1$, даёт, что $\|\rho_{\tilde{\otimes}}(x)\| \leqslant 2\|x\|$. Значит, оператор $\rho_{\tilde{\otimes}}$ ограничен. Конечно, это наблюдение завершает доказательство в «классическом» случае $\tilde{\otimes} = \hat{\otimes}$. Для двух «квантовых» случаев мы должны, кроме того, показать, что оператор $\rho_{\overset{\circ}{\otimes}}$ является *вполне* ограниченным. Из этого будет следовать, что I является $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-проективным, и это согласно предложению 2.7 будет гарантировать также, что он $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-проективен. В дальнейшем отображение $\rho_{\overset{\circ}{\otimes}}$ мы будем обозначать просто ρ.

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ (выбирая размер подходящих матриц) и рассмотрим оператор

$$\rho_n\colon \mathrm{M}_n(I) \to \mathrm{M}_n\bigl(C(\Omega) \overset{\mathrm{o}}{\otimes} I\bigr)$$

соответствующего размножения ρ. Тогда для матрицы $\mathbf{x} = (x_{ij}) \in \mathrm{M}_n(I)$ мы имеем

$$\rho_n(\mathbf{x}) = \bigl(\rho(x_{ij})\bigr) = \lim_{l\to\infty} \rho_n^{(l)}(\mathbf{x}),$$

где $\rho_n^{(l)}(\mathbf{x}) \in \mathrm{M}_n\bigl(C(\Omega) \overset{\mathrm{o}}{\otimes} I\bigr)$ — матрица с элементами $u_{ij}^{(l)} := \sum\limits_{k=1}^{l} x_{ij} z_k \otimes z_k$. Другими словами, если $\dot{m}\colon C(\Omega) \times (C(\Omega) \mathbin{\tilde{\otimes}} I)$ — биоператор внешнего умножения и $\mathbf{z}_l$ — краткое обозначение $\sum\limits_{k=1}^{l} z_k \otimes z_k$, то

$$\rho_n^{(l)}(\mathbf{x}) = \dot{m}_{n,1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}_l).$$

Здесь

$$\dot{m}_{n,1}\colon \mathrm{M}_n\bigl(C(\Omega)\bigr) \times \bigl(C(\Omega) \overset{\mathrm{o}}{\otimes} I\bigr) \to \mathrm{M}_n\bigl(C(\Omega) \overset{\mathrm{o}}{\otimes} I\bigr)$$

есть $(n, 1)$-е полное размножение $\dot{m}$, которое обсуждалось в разделе 1. Мы отождествляем, конечно, $C(\Omega) \overset{\mathrm{o}}{\otimes} I$ с $\mathrm{M}_{1\times 1}\bigl(C(\Omega) \overset{\mathrm{o}}{\otimes} I\bigr)$ и $\mathrm{M}_n\bigl(C(\Omega) \overset{\mathrm{o}}{\otimes} I\bigr)$ с $\mathrm{M}_{n\times 1}\bigl(C(\Omega) \overset{\mathrm{o}}{\otimes} I\bigr)$.

Наконец, напомним, что биоператор $\dot{m}$ является согласно предложению 2.3 вполне ограниченным. (В действительности в нашей конкретной ситуации он даже вполне сжимающий, но нам это не потребуется.) Так как вполне ограниченная норма $\dot{m}$ есть по определению верхняя граница (обычных) норм всех полных размножений этого биоператора и они несомненно включают $\dot{m}_{n,1}$, мы немедленно имеем $\|\dot{m}_{n,1}\| \leqslant \|\dot{m}\|_{\overset{\circ}{\otimes}}$ и, следовательно, $\bigl\|\rho_n^{(l)}(\mathbf{x})\bigr\| \leqslant \|\dot{m}\|_{\overset{\circ}{\otimes}}\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{z}_l\|$. Используя лемму 3.1 снова, теперь в простейшем случае $a \equiv 1$ и $m = 1$, мы видим, что $\|\mathbf{z}_l\| \leqslant 2$ и, следовательно, $\bigl\|\rho_n^{(l)}(\mathbf{x})\bigr\| \leqslant 2\|\dot{m}\|_{\overset{\circ}{\otimes}}\|\mathbf{x}\|$. Так как это неравенство справедливо для всех l, мы имеем предельное равенство $\|\rho_n(\mathbf{x})\| \leqslant 2\|\dot{m}\|_{\overset{\circ}{\otimes}}\|\mathbf{x}\|$, и следовательно, $\|\rho_n\| \leqslant 2\|\dot{m}\|_{\overset{\circ}{\otimes}}$ для всех n. Таким образом, оператор ρ является вполне ограниченным (и, более того, $\|\rho\|_{\overset{\circ}{\otimes}} \leqslant 2\|\dot{m}_{\overset{\circ}{\otimes}}\|$). $\square$

Мы переходим к примеру идеала с «топологически плохим» спектром.

Обозначим через Φ отрезок трансфинитной прямой, ограниченный первым несчётным кардиналом $\aleph_1$. Напомним, что Φ — компактное топологическое пространство относительно топологии, индуцированной порядком (см., например, [11, с. 82]). Хорошо известно (и легко доказывается), что топологическое пространство Φ имеет следующее довольно экзотическое свойство: если $a(\aleph_1) = 0$, то $a(t) = 0$ для достаточно больших счётных ординалов t. Другими словами, a обращается в нуль в некоторой окрестности $\aleph_1$ в Φ.

Мы сконцентрируем наше внимание на $\tilde{\otimes}$-алгебре $C(\Phi)$ и на её максимальном идеале $I := \{a \in C(\Phi)\colon a(\aleph_1) = 0\}$.

Теорема 3.3. *$C(\Phi)$-$\tilde{\otimes}$-модуль I не является проективным.*

Так как спектр Гельфанда $\Phi \setminus \{\aleph_1\}$ — один из наиболее известных примеров непаракомпактного топологического пространства, этот результат также напрямую следует из теоремы 3.1. Однако мы снова считаем поучительным дать независимое доказательство.

Доказательство. Предположим, что I, напротив, является проективным. Тогда теорема 2.3 даёт морфизм $\rho\colon I \to C(\Phi) \mathbin{\tilde{\otimes}} I$ в $\boldsymbol{C(\Phi)}$**-$\tilde{\otimes}$-mod**, правый обратный для $\pi := \pi_I\colon C(\Phi) \mathbin{\tilde{\otimes}} I \to I$. Наша цель состоит в том, чтобы показать, что существование этого гипотетического ρ приводит к противоречию.

Введём биоператор $\mathcal{R}\colon C(\Phi) \times I \to C(\Phi \times \Phi)$, переводящий пару $a \in C(\Phi)$, $x \in I$ в функцию $u(s,t) := a(s)x(t)$, $s,t \in \Phi$. Конечно, этот биоператор является сжимающим, но мы хотим показать, что, более того, он мультипликативно сжимающий (относительно стандартного квантования участвующих банаховых пространств, которое обсуждалось выше). С этой целью мы для каждого $n = 1, 2, \dots$ рассмотрим n-е мультипликативное размножение $\mathcal{R}$ (см. раздел 1). В данном контексте это биоператор

$$\mathcal{R}_n\colon \mathrm{M}_n\bigl(C(\Phi)\bigr) \otimes \mathrm{M}_n(I) \to \mathrm{M}_n\bigl(C(\Phi \otimes \Phi)\bigr),$$

переводящий пару $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n\bigl(C(\Phi)\bigr)$, $\mathbf{x} = (x_{ij}) \in \mathrm{M}_n(I)$ в матрицу $\mathbf{u} \in \mathrm{M}_n\bigl(C(\Phi \otimes \Phi)\bigr)$ с элементами $u_{ij} := \sum\limits_{k=1}^{n} \mathcal{R}(a_{ik}, x_{kj})$.

Для всех $s, t \in \Phi$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ мы имеем $u_{ij}(s,t) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}(s)x_{kj}(t)$. Следовательно, скалярная матрица $\mathbf{u}(s,t) = \bigl(u_{ij}(s,t)\bigr)$ с фиксированными s, t является произведением скалярных матриц $\mathbf{a}(s) = \big(a_{ij}(s)\big)$ и $\mathbf{x}(t) = \big(x_{ij}(t)\big)$. Поэтому, принимая во внимание конкретное квантование наших пространств, мы имеем

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_n(\mathbf{a},\mathbf{x})\| = \|\mathbf{u}\| = \sup\{\|\mathbf{u}(s,t)\|;\ s,t\in\Phi\} \leqslant\\ \leqslant \sup\{\|\mathbf{a}(s)\|\,\|\mathbf{x}(t)\|;\ s,t\in\Phi\} \leqslant\\ \leqslant (\sup\{\|\mathbf{a}(s)\|;\ s\in\Phi\})(\sup\{\|\mathbf{x}(t)\|;\ t\in\Phi\}) = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{x}\|.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\|\mathcal{R}_n\| \leqslant 1$ для всех n. Это означает, что биоператор $\mathcal{R}$ является мультипликативно сжимающим, а следовательно (см. раздел 1), вполне сжимающим. Поэтому согласно теореме 1.1 для любого выбора $\tilde{\otimes}$ существует $\tilde{\otimes}$-ограниченный оператор $R\colon C(\Phi)\,\tilde{\otimes}\, I \to C(\Phi\times\Phi)$, однозначно определённый тем, что он переводит элементарный тензор $a\otimes x$ в $u(s,t) := a(s)x(t)$.

Лемма 3.2. *Пусть $v\in C(\Phi)\,\tilde{\otimes}\, I$ и $s\in\Phi$. Тогда функция $a(t) := [R(v)](s,t)$ принадлежит I.*

Доказательство. Утверждение очевидно для элементарных тензоров и, следовательно, оно верно для их линейной оболочки. Но пространство $[R(v)](s,t)$ плотно в $C(\Phi)\,\tilde{\otimes}\, I$, оператор R непрерывен и I замкнут. Остальное ясно. □

Продолжение доказательства теоремы 3.3. Напомним, что $C(\Phi)\tilde{\otimes} I$ имеет структуру левого $C(\Phi)$-модуля. Пространство $C(\Phi\times\Phi)$ также левый $C(\Phi)$-модуль с внешним умножением, заданным формулой $[a\cdot u](s,t) := a(s)u(s,t)$. Беря элементарные тензоры в $C(\Phi)\,\tilde{\otimes}\, I$ и используя плотность их линейной оболочки в этом пространстве, мы немедленно видим, что построенный оператор R является морфизмом $C(\Phi)$-модулей. То же верно и для оператора $\Delta\colon C(\Phi\times\Phi)\to C(\Phi)$, $u(s,t)\mapsto b(s) := u(s,s)$ (действующего с помощью ограничения на диагональ в $\Phi\times\Phi$).

Лемма 3.3. *Диаграмма*

$$\begin{tikzcd} C(\Phi)\,\tilde{\otimes}\, I \arrow[r, "R"] \arrow[d, shift right, "\pi"'] & C(\Phi\times\Phi) \arrow[d, "\Delta"] \\ I \arrow[u, shift right, "\rho"'] \arrow[r, "\mathbf{in}"] & C(\Phi), \end{tikzcd}$$

где $\mathbf{in}$ *есть естественное вложение, коммутативна* (*другими словами,* $\Delta\circ R = \mathbf{in}\circ\pi$ *и* $\Delta\circ R\circ\rho = \mathbf{in}$).

Доказательство. Очевидно, беря в качестве v элементарный тензор в $C(\Phi)\,\tilde{\otimes}\, I$, мы имеем $\Delta\big(R(v)\big) = (\mathbf{in})\big(\pi(v)\big)$. Комбинируя это наблюдение с фактом плотности линейной оболочки элементарных тензоров в пространстве $C(\Phi)\,\tilde{\otimes}\, I$ и используя непрерывность всех нужных отображений, мы немедленно получаем первое требуемое равенство. Второе равенство следует из первого, скомбинированного с соотношением $\pi\circ\rho = \mathbf{1}_I$. □

Окончание доказательства теоремы 3.3. Для любого счётного ординала α через $e_\alpha\in I$ обозначим функцию, такую что $e_\alpha(t) = 1$, если $t\leqslant\alpha$, и $e_\alpha(t) = 0$, если $t > \alpha$. Обозначим через E_α функцию $R \circ \rho \in C(\Phi \otimes \Phi)$. Если α и β, $\alpha < \beta$, — два счётных ординала, мы имеем $e_\alpha \cdot e_\beta = e_\alpha e_\beta = e_\alpha$, и поэтому

$$E_\alpha = [R \circ \rho](e_\alpha \cdot e_\beta) = e_\alpha \cdot \big([R \circ \rho](e_\beta)\big) = e_\alpha \cdot E_\beta.$$

Отсюда следует, в частности, что $\alpha < \beta$ влечёт

$$E_\alpha(\alpha, \beta) = E_\beta(\alpha, \beta). \tag{3.1}$$

Для всех $\alpha, s \in \Phi$ соотношение $E_\alpha(s, s) = [\Delta \circ R \circ \rho](s)$, будучи скомбинированным с леммой 3.3, даёт $E_\alpha(s, s) = e_\alpha(s)$. В частности, получаем, что

$$E_\alpha(s, s) = 1, \quad \text{если} \quad s \leqslant \alpha. \tag{3.2}$$

Теперь мы переходим к построению некоторой возрастающей последовательности счётных ординалов α_k, $k = 1, 2, \ldots$. Ординал α_1 мы выберем произвольно. Предположим, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ уже выбраны. Рассмотрим функцию $a_k(t) := E_{\alpha_k}(\alpha_k, t)$, $t \in \Phi$. Согласно лемме 3.2 $a_k \in I$, и поэтому, как уже упоминалось выше, существует счётный ординал α_{k+1}, такой что $E_{\alpha_k}(\alpha_k, t) = 0$, когда $t \geqslant \alpha_{k+1}$. Так как $E_{\alpha_k}(\alpha_k, \alpha_k) = 1$ (см. (3.2)), мы имеем $\alpha_{k+1} > \alpha_k$.

Таким образом, последовательность α_k построена по индукции. Легко убедиться, что она сходится и её предел, скажем ω, всё ещё счётный ординал. Это наблюдение оказывается принципиальным.

Что есть $E_\omega(\omega, \omega)$? С одной стороны, согласно (3.2) (с ω в качестве α) $E_\omega(\omega, \omega) = 1$. С другой стороны, учитывая непрерывность функции $E_\omega(s, t)$, равенство (3.1) (с α_k в качестве α и ω в качестве β) и, наконец, способ построения наших ординалов α_k, мы имеем

$$E_\omega(\omega, \omega) = \lim_{k \to \infty} E_\omega(\alpha_k, \omega) = \lim_{k \to \infty} E_{\alpha_k}(\alpha_k, \omega) = 0.$$

Мы приходим к противоречию. $\square$

Проективные идеалы в коммутативных банаховых и квантовых банаховых алгебрах, помимо хороших топологических свойств их спектров, указанных в утверждении 2) теоремы 3.1, обладают рядом специальных аналитических и геометрических свойств. Рассмотрим подробнее наиболее прозрачный случай максимального идеала I в унитальной коммутативной $\tilde{\otimes}$-алгебре A. В дальнейшем Ω будет спектром Гельфанда алгебры A, $\partial\Omega$ — границей Шилова Ω, s — точкой в Ω, представляющей I, и I^2 — топологическим квадратом I, т. е. замыканием $\operatorname{span}\{xy;\ x, y \in I\}$.

Теорема 3.4.

1. *Если $s \in \partial\Omega$, то $I^2 = I$. Кроме того, существует такая константа $C > 0$, что для любого $t \in \Omega$ существует $x \in I$ (т. е. $x \in A$, для которого $x(s) = 0$), такой что $a(t) = 1$ и $\|x\| < C$.*
2. (Л. И. Пугач). *Если $s \notin \partial\Omega$, то $\dim I/I^2 = 1$. Кроме того, и это основное утверждение, существует окрестность U элемента s в топологии Гельфанда на Ω, которая является аналитическим диском.*

Напомним, что последнее утверждение означает существование такого гомеоморфизма $\omega\colon \mathbb{D}_0 \to U$, где $\mathbb{D}_0$ — открытый единичный диск в $\mathbb{C}$, что для каждого $a \in A$ функция $z \mapsto a\bigl(\omega(z)\bigr)$, $z \in \mathbb{D}_0$, является голоморфной.

Доказательство теоремы 3.4 можно найти в [14, 24].

Упражнение 3.2. Докажите, используя предыдущую теорему, что максимальные идеалы в банаховой алгебре $C_n[0,1]$, состоящей из n раз непрерывно дифференцируемых функций на $[0,1]$, не являются проективными.

Теперь мы обратимся к алгебрам последовательностей. Следующий пример — алгебра суммируемых последовательностей l_1, также обозначаемая $l_1(\mathbb{N})$, с покоординатным умножением. Пусть $l_1(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, или, для краткости, l_1^2, обозначает банахово пространство двойных суммируемых последовательностей. Мы рассматриваем его как левый банахов l_1-модуль с внешним умножением $[a\cdot x](m,n) := a(m)x(m,n)$, $a \in l_1$, $x \in l_1^2$. Здесь и ниже мы обозначаем члены рассматриваемых последовательностей через $a(m)$ и $x(m,n)$ вместо a_m и x_{mn}.

Пример 3.2. Мы хотим показать, что l_1 является левым $\hat{\otimes}$-проективным модулем. Для этого рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} l_1(\mathbb{N}) \hat{\otimes} l_1(\mathbb{N}) \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & l_1(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \arrow[dl, "\nabla"] \\ & l_1(\mathbb{N}), & \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

где i — стандартный изометрический изоморфизм, переводящий $a \otimes b$ в двойную последовательность $x(m,n) := a(m)b(n)$, π — оператор произведения и ∇ «ограничивает на диагональ», переводя x в a, $a(n) := x(n,n)$. Ясно, что все эти отображения являются морфизмами в $\boldsymbol{l_1}$-$\hat{\otimes}$-**mod** и что диаграмма коммутативна.

Положим $\Delta\colon l_1 \to l_1^2$, $a \mapsto x$, где $x(n,n) := a(n)$ и $x(m,n) := 0$, если $m \neq n$. Очевидно, что это также морфизм в той же категории, правый обратный к ∇. Поэтому $\rho := i^{-1} \circ \Delta$ — морфизм в $\boldsymbol{l_1}$-$\hat{\otimes}$-**mod**, правый обратный к π. Так как рассматриваемая алгебра, очевидно, невырожденна, применение теоремы 2.3 завершает доказательство.

Замечание. Мы рассмотрели только «$\hat{\otimes}$-случай». Однако l_1 может быть превращена в $\overset{h}{\otimes}$- и, следовательно, в $\overset{o}{\otimes}$-алгебру относительно так называемого максимального квантования, которое будет обсуждаться ниже. Похожий аргумент мог бы быть использован, чтобы показать, что наша алгебра также проективна в обоих «квантовых» смыслах. В действительности во всех трёх теориях l_1 имеет намного более сильное свойство: она, как говорят, бипроективна. Традиционная версия этого утверждения доказана в [13], а квантовые версии — в [5].

До сих пор наши идеалы в $\tilde{\otimes}$-алгебрах в вопросе их проективности вели себя одинаково для всех трёх теорий. Другими словами, наши результаты не зависели от того, какое конкретно из трёх тензорных произведений мы выбираем. Однако это не универсальное явление. Теперь мы представим по-видимому простейший пример алгебры, которая ведёт себя различно в традиционной и в квантовой ситуации.

Вместо l_1 рассмотрим банахову алгебру $l_2 = l_2(\mathbb{N})$, снова с покоординатным умножением. Через $l_2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ или, для краткости, через l_2^2 обозначим гильбертово пространство двойных квадратично суммируемых последовательностей. Подобно «l_1-случаю», это левый банахов l_2-модуль с внешним умножением $[a \cdot x](m, n) := a(m)x(m, n)$. В дальнейшем мы будем использовать стандартное отождествление гильбертова пространства l_2^2 с гильбертовым тензорным квадратом $l_2 \dot{\otimes} l_2$. Напомним, что соответствующий изометрический изоморфизм однозначно определён тем, что переводит двойную последовательность $a(k)b(m)$, $a, b \in l_2$, $k, m = 1, 2, \ldots$, в $a \dot{\otimes} b$. В частности, орт (= элемент естественного ортонормального базиса) $e_{mk} \in l_2^2$, определённый условием $e_{mk}(s, t) = 1$, если $s = m$, $t = k$, и $e_{mk}(s, t) = 0$ в противном случае, отождествляется с $e_m \dot{\otimes} e_k$, тензорным произведением двух ортов в l_2. Мы будем попеременно использовать оба обозначения, e_{mk} и $e_m \dot{\otimes} e_k$.

Мы переходим к квантованию l_2 и l_2^2. Среди множества возможных способов сделать это мы выберем так называемое *столбцовое квантование*. Ниже мы обсудим такое квантование для произвольного гильбертова пространства, но в настоящий момент нам нужны только эти два частных случая. Столбцовое квантование l_2 — изометрический оператор $l_2 \to \mathcal{B}(l_2)$, переводящий a в оператор $\breve{a}$, который отправляет e_1 в a, а другие орты — в 0. (Таким образом мы ставим в соответствие заданной квадратично суммируемой последовательности оператор, которому отвечает бесконечная матрица, у которой первый столбец совпадает с нашей последовательностью, а на остальных местах стоят нули. Отсюда и термин «столбцовое квантование».) Аналогично столбцовое квантование l_2^2 — изометрический оператор из этого пространства в $\mathcal{B}(l_2^2)$, переводящий x в оператор $\breve{x}$, определённый правилами $e_{11} \mapsto x$ и $e_{mk} \mapsto 0$ для других двойных индексов.

Сделаем полезное наблюдение. Мы можем отождествить вектор $a \in l_2$ с оператором $\mathbb{C} \to l_2$, $1 \mapsto a$. Тогда мы можем рассматривать матрицу, скажем $\mathbf{a}$, в $\mathrm{M}_n(l_2)$ как матрицу с операторными элементами. Такая матрица отвечает оператору из $\mathbb{C}^n$ в nl_2, и, как легко видеть, $\|\mathbf{a}\|$ — в точности норма этого оператора. Таким образом, $\mathrm{M}_n(l_2)$ может быть отождествлена с $\mathcal{B}(l_2)$ и аналогично $\mathrm{M}_n(l_2^2)$ — с $\mathcal{B}(l_2^2)$.

Предложение 3.2. *Существует вполне изометрический изоморфизм*

$$R\colon l_2(\mathbb{N}) \overset{\mathrm{h}}{\otimes} l_2(\mathbb{N}) \to l_2(\mathbb{N} \times \mathbb{N}),$$

корректно определённый тем, что он переводит $e_k \otimes e_m$ в e_{km}.

Доказательство. Введём биоператор $\mathcal{R}\colon l_2 \times l_2 \to l_2^2$, $(a, b) \mapsto x$, $x(k, m) := := a(k)b(m)$, и покажем, что он является мультипликативно сжимающим.

Зафиксируем n и рассмотрим мультипликативное размножение

$$\mathcal{R}_n\colon \mathrm{M}_n(l_2) \times \mathrm{M}_n(l_2) \to \mathrm{M}_n(l_2^2).$$

Возьмём произвольные $\mathbf{a} = (a_{ij})$, $\mathbf{b} = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_n(l_2)$. Тогда по определению матрица $\mathcal{R}_n(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ имеет элементы

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} \mathcal{R}(a_{ik}, b_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \dot{\otimes} b_{kj}.$$

(Мы помним и будем помнить об отождествлении l_2^2 с $l_2 \dot{\otimes} l_2$.)

Рассмотрим операторы $\check{\mathbf{a}}$, $\check{\mathbf{b}} \in \mathcal{B}(nl_2)$, которым отвечают матрицы с операторными элементами $\check{a}_{ij} \colon l_2 \to l_2$ и $\check{b}_{ij} \colon l_2 \to l_2$, такие что $\check{a}_{ij}$ переводит e_1 в a_{ij}, $\check{b}_{ij}$ переводит e_1 в b_{ij} и оба оператора переводят остальные орты в 0. Рассмотрим оператор $\check{\mathbf{c}} \in \mathcal{B}(nl_2^2)$, которому отвечает матрица с операторными элементами $\check{c}_{ij} \colon l_2^2 \to l_2^2$, $\check{c}_{ij}$ переводит $e_{11} = e_1 \dot{\otimes} e_1$ в c_{ij}, а другие орты — в 0. Заметим, что $\check{c}_{ij}$ есть в точности $\sum\limits_{k=1}^{n} \check{a}_{ik} \dot{\otimes} \check{b}_{kj}$. По определению столбцового квантования мы имеем $\|\mathbf{a}\| = \|\check{\mathbf{a}}\|$, $\|\mathbf{b}\| = \|\check{\mathbf{b}}\|$ и $\|\mathcal{R}_n(\mathbf{a}, \mathbf{b}\| = \|\check{\mathbf{c}}\|$.

Теперь мы введём ещё два оператора $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}} \in \mathcal{B}(nl_2)^2$. Им отвечают следующие матрицы: первый имеет операторные элементы $\hat{a}_{ij} := \check{a}_{ij} \dot{\otimes} \mathbf{1} \colon l_2 \dot{\otimes} l_2 \to l_2 \dot{\otimes} l_2$, а второй — $\hat{b}_{ij} := \mathbf{1} \dot{\otimes} \check{b}_{ij} \colon l_2 \dot{\otimes} l_2 \to l_2 \dot{\otimes} l_2$. Посмотрим на композицию $\hat{\mathbf{a}} \circ \hat{\mathbf{b}}$ этих операторов. ij-й элемент её матрицы есть

$$\sum_{k=1}^{n} \hat{a}_{ik} \hat{b}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (\check{a}_{ik} \dot{\otimes} \mathbf{1})(\mathbf{1} \dot{\otimes} \check{b}_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} (\check{a}_{ik} \dot{\otimes} \check{b}_{kj}) = \check{c}_{ij}.$$

Таким образом, $\hat{\mathbf{a}} \circ \hat{\mathbf{b}}$ есть не что иное, как $\check{\mathbf{c}}$.

Так как $\hat{\mathbf{a}}$ может быть представлен как $\check{\mathbf{a}} \dot{\otimes} \mathbf{1} \in \mathcal{B}(nl_2 \dot{\otimes} l_2)$, мы имеем $\|\hat{\mathbf{a}}\| = \|\check{\mathbf{a}}\| = \|\mathbf{a}\|$. Аналогично представление $\hat{\mathbf{b}}$ как $\mathbf{1} \dot{\otimes} \check{\mathbf{b}} \in \mathcal{B}(l_2 \dot{\otimes} nl_2)$ даёт $\|\hat{\mathbf{b}}\| = \|\check{\mathbf{b}}\| = \|\mathbf{b}\|$. Следовательно, мы имеем

$$\|\mathcal{R}_n(\mathbf{a}, \mathbf{b}\| = \|\check{\mathbf{c}}\| \leqslant \|\hat{\mathbf{a}}\| \, \|\hat{\mathbf{b}}\| = \|\check{\mathbf{a}}\| \, \|\check{\mathbf{b}}\| = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|.$$

Таким образом, биоператор $\mathcal{R}$ действительно является мультипликативно сжимающим. Раз так, то согласно теореме 1.1 $\mathcal{R}$ задаёт вполне сжимающий оператор $R \colon l_2 \overset{\mathrm{h}}{\otimes} l_2 \to l_2^2$, действующий на элементарных тензорах предписанным образом. Наша цель — показать, что R — вполне изометрический изоморфизм.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ возьмём соответствующее размножение

$$R_n \colon \mathrm{M}_n(l_2 \overset{\mathrm{h}}{\otimes} l_2) \to \mathrm{M}_n(l_2^2).$$

Очевидно, что элементы вида $\sum\limits_{k=1}^{N} e_k \otimes b_k$ для всех возможных $b_k \in l_2$ и $N \in \mathbb{N}$ образуют плотное подпространство в $l_2 \otimes l_2$. Отсюда следует, что матрицы вида $\mathbf{u} = (u_{ij})$, где $u_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{N} e_k \otimes b_{ij}^{(k)}$ для некоторых $b_{ij}^{(k)} \in l_2$ и $N \in \mathbb{N}$, образуют плотное подпространство в $\mathrm{M}_n(l_2) \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \mathrm{M}_n(l_2)$. Поэтому достаточно зафиксировать такое $\mathbf{u}$ и показать, что $\|\mathbf{u}\| \leqslant \|R_n(\mathbf{u})\|$.

Рассмотрим две прямоугольные матрицы $\mathbf{v} \in \mathrm{M}_{n,Nn}(l_2)$ и $\mathbf{w} \in \mathrm{M}_{Nn,n}(l_2)$. Первая имеет вид «блоков-строк»

$$\begin{pmatrix} \dots & \mathbf{v}_k & \dots \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{v}_k = (v_{k,ij}) \in \mathrm{M}_n(l_2)$ — диагональная матрица с элементами e_k на главной диагонали и 0 на других местах для любого $k = 1, \dots, N$. Вторая имеет вид «блоков-столбцов»

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{w}_k \\ \vdots \end{pmatrix},$$

где для любого $k = 1, \dots, N$ $\mathbf{w}_k \in \mathrm{M}_n(l_2)$ имеет элементы $w_{ij} := b_{ij}^{(k)}$. Легко проверить, что наша исходная матрица $\mathbf{u}$ — это в точности произведение Эффроса $\mathbf{v} \odot \mathbf{w}$. Поэтому формула (1.1) с l_2 в качестве E и F даёт оценку $\|\mathbf{u}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|$. Что можно из этого получить?

Первое, что нас интересует, — это $\|\mathbf{v}\|$. Ввиду столбцового квантования l_2 это число, в соответствии со сказанным выше, есть норма оператора $\hat{v}\colon \mathbb{C}^{Nn} \to nl_2$, переводящего орты в $\mathbb{C}^{Nn}$ в копии N ортов $e_1, \dots, e_N \in l_2$, принадлежащих различным гильбертовым слагаемым $nl_2 = l_2 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} l_2$. Так как все эти векторы в nl_2 являются попарно ортогональными, оператор $\hat{v}$ — изометрия. Поэтому $\|\hat{v}\|$ и, следовательно, $\|\mathbf{v}\|$ равны 1.

Обратимся к $\|\mathbf{w}\|$. Это норма оператора из $\mathbb{C}^n$ в Nnl_2, который отображает произвольную n-строку $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ в Nn-строку $\Bigl(\dots, \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j b_{ij}^k, \dots\Bigr)$, $k = 1, \dots, N$, $i = 1, \dots, n$, векторов из l_2. Поэтому по определению нормы в гильбертовой сумме

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \max \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \biggl\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j b_{ij}^k \biggr\|^2,$$

где максимум берётся по всем $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$, $\sum\limits_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 = 1$.

$\|R_n(\mathbf{u})\|$ — это норма оператора, который отображает ту же строку ξ в n-строку (на этот раз векторов в $l_2^2 = l_2 \dot{\otimes} l_2$) $(\dots, x_i, \dots)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, где

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \biggl(\sum_{k=1}^{N} [e_k \dot{\otimes} b_{ij}^k] \biggr) = \sum_{k=1}^{N} \biggl[e_k \dot{\otimes} \sum_{j=1}^{n} \xi_j b_{ij}^k \biggr].$$

Снова используя структуру нормы в гильбертовой сумме, а также попарную ортогональность векторов $e_k \dot{\otimes} (\cdot)$, $k = 1, \dots, N$, мы получаем

$$
\begin{aligned}
\|R_n(\mathbf{w})\|^2 &= \max \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \Big\| e_k \mathbin{\dot\otimes} \sum_{j=1}^{n} \xi_j b_{ij}^k \Big\|^2 = \\
&= \max \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \|e_k\|^2 \Big\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j b_{ij}^k \Big\|^2 = \max \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \Big\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j b_{ij}^k \Big\|^2,
\end{aligned}
$$

где максимум берётся по тем же самым ξ, что и раньше. Из этого следует, что $\|R_n(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{w}\|$.

Комбинируя последнее равенство с тем, что уже известно о нормах $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, мы получаем, что $\|\mathbf{u}\| \leqslant \|R_n(\mathbf{u})\|$. Поэтому R, будучи вполне сжимающим, является вполне изометрическим. Вместе с очевидным наблюдением, что образ R плотен в l_2^2, это даёт требуемый результат. $\square$

Предложение 3.3. *Банахова алгебра l_2 с покоординатным умножением является $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$- и, следовательно, $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-алгеброй относительно столбцового квантования. Более того, соответствующий морфизм произведения включается в коммутативную диаграмму*

$$
\begin{tikzcd}
l_2(\mathbb{N}) \overset{\mathrm{h}}{\otimes} l_2(\mathbb{N}) \arrow[rr, "R"] \arrow[dr, "\pi_{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}}"'] & & l_2(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \arrow[dl, "\nabla"] \\
& l_2(\mathbb{N}), &
\end{tikzcd}
$$

где ∇ — вполне сжимающий оператор, отображающий x в a, $a(n) := x(n,n)$ (сравните с оператором из диаграммы (3.3), который имеет то же обозначение).

Доказательство. Сначала мы покажем, что ∇ вполне сжимающий. (На самом деле это частный случай будущего предложения 5.2, но здесь мы дадим более прозрачное доказательство.) Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим размножение $\nabla_n \colon \mathrm{M}_n(l_2^2) \to \mathrm{M}_n(l_2)$ и возьмём произвольный элемент $\mathbf{x} = (x_{ij}) \in \mathrm{M}_n(l_2^2)$. Будучи отождествленным с оператором в $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n, nl_2^2)$, наш $\mathbf{x}$ переводит $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ в n-строку $\Big(\ldots, \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j x_{ij}, \ldots\Big)$. Поэтому

$$
\|\mathbf{x}(\xi)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{j=1}^{n} \xi_j x_{ij} \Big|^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{k,m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \xi_j x_{ij,km} \Big|^2,
$$

где $x_{ij,km}$ — km-я координата двойной последовательности x_{ij}. Рассматриваемый как оператор из $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n, nl_2)$, $\nabla_n(\mathbf{x})$ переводит ξ в $\Big(\ldots, \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j \nabla(x_{ij}), \ldots\Big)$. Поэтому, вспомнив, чем являются координаты $\nabla(x_{ij})$, мы имеем

$$
\| [\nabla_n(\mathbf{x})](\xi)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \xi_j x_{ij,kk} \Big|^2 .
$$

Мы видим, что $\| [\nabla_n(\mathbf{x})](\xi)\| \leqslant \|\mathbf{x}(\xi)\|$ для любой строки ξ и, следовательно, $\|\nabla_n(\mathbf{x})\| \leqslant \|\mathbf{x}\|$. Таким образом, ∇ имеет требуемое свойство.

Учитывая предыдущее предложение, получаем, что композиция $\nabla \circ R$ является вполне сжимающим оператором, отображающим элементарные тензоры в произведение их множителей. Но по теореме 1.1 существование такого оператора эквивалентно мультипликативной ограниченности умножения в l_2. Таким образом, l_2 является $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-алгеброй, остальное ясно. □

Теорема 3.5.

1. *Банахова алгебра l_2 не является $\hat{\otimes}$-проективной.*
2. *$\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-алгебра l_2 является $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-проективной.*

Доказательство. 1. Рассмотрим биоператор $\mathcal{S}\colon l_2 \times l_2 \to l_1$, отображающий пару $(\ldots, a_k, \ldots)$, $(\ldots, b_k, \ldots)$ в $(\ldots, a_k b_k, \ldots)$; согласно неравенству Коши—Буняковского он корректно определён и ограничен. Следовательно, он задаёт ассоциированный ограниченный оператор $S\colon l_2 \hat{\otimes} l_2 \to l_1$. Рассматривая действие R на элементарных тензорах, мы видим, что композиция $\mathbf{in} \circ S\colon l_2 \hat{\otimes} l_2 \to l_2$, где $\mathbf{in}\colon l_1 \to l_2$ — естественное вложение, является в точности морфизмом произведения $\pi_{\hat{\otimes}}$ для *$\hat{\otimes}$-алгебры* l_2. Отсюда следует, что образ $\pi_{\hat{\otimes}}$ есть l_1, а не всё l_2. Следовательно, $\pi_{\hat{\otimes}}$, не будучи сюръективным, не может иметь правого обратного отображения. Остальное ясно.

2. Действуя так же, как в примере 3.2, мы определяем $\Delta\colon l_2 \to l_2^2$, $a \mapsto x$, где $x(n,n) := a(n)$ и $x(m,n) := 0$, если $m \neq n$. После отождествления $\mathrm{M}_n(l_2)$ с $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n, nl_2)$ и $\mathrm{M}_n(l_2^2)$ с $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n, nl_2^2)$ рассуждения, очень близкие к использованным для ∇ в предыдущем предложении, показывают, что Δ — вполне изометрический оператор. В то же время он, очевидно, является морфизмом l_2-модулей и правым обратным к ∇. Поэтому, добавляя этот морфизм в коммутативную диаграмму, мы видим, что $\rho := i^{-1} \circ \Delta$ есть морфизм в $\boldsymbol{l_2}$-$\overset{\mathbf{h}}{\otimes}$-**mod**, правый обратный к $\pi_{\overset{\mathrm{h}}{\otimes}}$. Остальное ясно. □

Замечание. Будучи рассматриваемой как $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-алгебра, банахова алгебра l_2 также является левой проективной. Это следует, например, из хорошо известного факта, что банаховы квантовые пространства $l_2 \overset{\mathrm{o}}{\otimes} l_2$ и $l_2 \overset{\mathrm{h}}{\otimes} l_2$ совпадают с точностью до вполне изометрического изоморфизма (см. [10, с. 163]). Более того, l_2 как $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-алгебра (и как $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-алгебра) имеет намного более сильное свойство бипроективности, которое было упомянуто в предыдущем замечании (см. [5]).

В заключение мы перейдём от функциональных алгебр к групповым алгебрам.

Пусть G — локально компактная группа, $L_1(G)$ — банахово пространство функций (более точно, их классов эквивалентности), которые интегрируемы относительно левоинвариантной меры Хаара на G. Это классический пример банаховой алгебры. Подходящее умножение называется свёрткой и определено с помощью интеграла Хаара

$$a * b(s) := \int_G a(t)b(t^{-1}s)\,dt.$$

В то же время, после появления квантового функционального анализа, $L_1(G)$ обычно рассматривается как квантовое банахово пространство относительно так называемого максимального квантования.

Мы напомним, что квантование банахова пространства E называется *максимальным*, если норма в $\mathrm{M}_n(E)$ («n-го этажа») есть супремум норм, заданных всеми возможными квантованиями E. Соответствующее квантовое банахово пространство также называется *максимальным* и часто обозначается $\max E$. Легко можно показать, что каждый ограниченный оператор из $\max E$ в произвольное квантовое пространство автоматически вполне ограничен. Также известно, что для любого квантового банахова пространства F существует вполне изометрический изоморфизм между квантовыми банаховыми пространствами $\max E \overset{\mathrm{o}}{\otimes} F$ и $\max(E \hat{\otimes} F)$, оставляющий элементарные тензоры неподвижными [8, с. 289]. Комбинируя эти два факта, мы видим, что любая банахова алгебра A, снабжённая максимальным квантованием, есть $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-алгебра.

Далее, говоря о $L_1(G)$ как о квантовом банаховом пространстве, мы всегда подразумеваем максимальное квантование*.

Таким образом, мы видим, что $L_1(G)$ не только банахова алгебра (т. е. $\hat{\otimes}$-алгебра), но также $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-алгебра (однако в общем случае, как можно показать, не $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-алгебра).

Теорема 3.6. *Алгебра $L_1(G)$ является левой проективной как $\hat{\otimes}$-алгебра и как $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-алгебра.*

Доказательство. Через $\pi_{\hat{\otimes}}$ и $\pi_{\overset{\mathrm{o}}{\otimes}}$ обозначим соответствующие морфизмы произведения для $L_1(G)$ в $\boldsymbol{A}$-$\hat{\otimes}$-**mod** и в $\boldsymbol{A}$-$\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-**mod**. Напомним, что наша алгебра невырожденна (более того, по теореме Коэна о факторизации каждая её функция — свёрточное произведение двух других). Следовательно, согласно теореме 2.3 достаточно показать, что $\pi_{\hat{\otimes}}$ ($\pi_{\overset{\mathrm{o}}{\otimes}}$) имеет правый обратный морфизм в $\boldsymbol{A}$-$\hat{\otimes}$-**mod** (соответственно в $\boldsymbol{A}$-$\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-**mod**).

Рассмотрим банахово пространство $L_1(G \times G)$ функций, интегрируемых относительно левоинвариантной меры Хаара на $G \times G$. Очевидно, это $L_1(G)$-$\hat{\otimes}$-модуль относительно внешнего умножения

$$a \cdot u(s,t) := \int_G a(r)u(r^{-1}s,t)\,dr, \quad a \in L_1(G), \quad u \in L_1(G \times G)$$

*То же квантование $L_1(G)$ могло бы быть введено альтернативным способом как так называемое квантование предсопряжённого пространства; здесь мы имеем в виду, конечно, предсопряжённое пространство для $L_\infty(G) \subseteq \mathcal{B}(L_2(G))$ с его стандартным квантованием. Но сейчас мы не будем использовать это наблюдение.

(«свёртка по первой переменной»). Это пространство участвует в диаграмме

$$\begin{tikzcd} L_1(G)\hat{\otimes} L_1(G) \arrow[rr, "\mathbf{ig}"] \arrow[dr, "\pi_{\hat{\otimes}}"'] & & L_1(G\times G) \arrow[dl, "\Pi"] \\ & L_1(G), & \end{tikzcd}$$

где $\mathbf{ig}$ — хорошо известный изометрический изоморфизм Гротендика (отображающий $a\otimes b$ в функцию $u(s,t):=a(s)b(t)$) и Π действует следующим образом: $u\mapsto a(s):=\int\limits_G u(t,t^{-1}s)\,dt$. Легко проверить, что $\mathbf{ig}$ и Π являются морфизмами левых $L_1(G)$-модулей и диаграмма коммутативна.

Теперь фиксируем произвольное компактное множество в G меры Хаара 1 и обозначим через χ его характеристическую функцию. Основной ингредиент нашего доказательства — это отображение $\varrho\colon L_1(G)\to L_1(G\times G)$, $a\mapsto u(s,t):=\chi(t^{-1})a(st)$.

Пусть $\Delta(s)$, $s\in G$, обозначает, как обычно, модулярную функцию группы G. Используя хорошо известные соотношения

$$\int\limits_G a(st)\,ds=\Delta(t^{-1})\int\limits_G a(s)\,ds$$

и

$$\int\limits_G b(t^{-1})\Delta(t^{-1})\,dt=\int\limits_G b(t)\,dt,$$

$a,b\in L_1(G)$, вместе с теоремой Фубини, получаем

$$\|\varrho(a)\|=\int\limits_{G\times G}\chi(t^{-1})|a(st)|\,d(s\times t)=\int\limits_G\chi(t^{-1})\Delta(t^{-1})\biggl(\int\limits_G|a(s)|\,ds\biggr)dt=$$
$$=\biggl(\int\limits_G\chi(t^{-1})\Delta(t^{-1})\,dt\biggr)\|a\|=\int\limits_G\chi(t)\,dt\,\|a\|=\|a\|.$$

Таким образом, ϱ — изометрический оператор. Далее,

$$\varrho(a*b)(s,t)=\chi(t^{-1})[a*b](st)=\chi(t^{-1})\int\limits_G a(r)b(r^{-1}st)\,dr=$$
$$=\int\limits_G a(r)\bigl(\chi(t^{-1})b(r^{-1}st)\bigr)\,dr=\bigl[a\cdot\bigl(\varrho(b)\bigr)\bigr](s,t),$$

и следовательно, ϱ — морфизм левых $L_1(G)$-модулей. Окончательно имеем

$$\Pi\bigl(\varrho(a)\bigr)=\int\limits_G[\varrho(a)](t,t^{-1}s)\,dt=\int\limits_G\chi(s^{-1}t)a(tt^{-1}s)\,dt=a(s)\int\limits_G\chi(s^{-1}t)\,dt=a(s),$$

и следовательно, $\Pi\circ\varrho = \mathbf{1}_{L_1(G)}$. Комбинируя все эти наблюдения, мы видим, что ϱ — морфизм в $\boldsymbol{L_1(G)}$-$\hat{\otimes}$-**mod**, правый обратный к Π. Отсюда следует, что $\rho_{\hat{\otimes}} := \mathbf{gr}^{-1}\circ\varrho$ — морфизм в той же категории, правый обратный к $\pi_{\hat{\otimes}}$. Это завершает доказательство в традиционном ($\hat{\otimes}$-) контексте.

Теперь вспомним про сжимающий оператор

$$j_1\colon L_1(G)\mathbin{\hat{\otimes}} L_1(G) \to L_1(G)\mathbin{\overset{\circ}{\otimes}} L_1(G),$$

который обсуждался в разделе 1 (здесь, конечно, в качестве E и F берётся $L_1(G))$[*]. Положим $\rho_{\overset{\circ}{\otimes}} := j_1\circ\rho_{\hat{\otimes}}$. Так как j_1, очевидно, является морфизмом левых $L_1(G)$-модулей, то же верно для $\rho_{\overset{\circ}{\otimes}}$. Далее, конечно, мы имеем $\pi_{\overset{\circ}{\otimes}}\circ j_1 = \pi_{\hat{\otimes}}$ и, следовательно, $\pi_{\overset{\circ}{\otimes}}\circ\rho_{\overset{\circ}{\otimes}} = \pi_{\overset{\circ}{\otimes}}\circ j_1\circ\rho_{\hat{\otimes}} = \mathbf{1}_{L_1(G)}$. Наконец, в силу выбора максимального квантования $L_1(G)$ оператор $\rho_{\overset{\circ}{\otimes}}$, будучи ограниченным, автоматически вполне ограничен. Из этого следует, что $\rho_{\overset{\circ}{\otimes}}$ является морфизмом в $\boldsymbol{L_1(G)}$-$\hat{\otimes}$-**mod**, правым обратным к $\pi_{\overset{\circ}{\otimes}}$. Это завершает доказательство в $\overset{\circ}{\otimes}$-контексте. □

Дэйлс и Поляков [9] в контексте традиционных гомологий доказали или опровергли проективность (так же как и инъективность и плоскость) нескольких других важных банаховых модулей над $L_1(G)$.

Перед тем как завершить этот раздел, нам бы хотелось сказать несколько слов о другом типе групповых алгебр. Мы имеем в виду так называемые алгебры Фурье локально компактных групп, введённые Эймаром в 1964 году. Постепенно пришло понимание того, что эти алгебры играют в гармоническом анализе очень важную роль, сравнимую с ролью L_1-алгебр. Более того, оба класса алгебр довольно тесно связаны. Именно, двойственные пространства L_1-алгебры и алгебры Фурье произвольной локально компактной группы, будучи снабжены определённой дополнительной структурой, оказываются в некотором естественном отношении двойственности. Эта двойственность, открытая Г. И. Кацем и Л. И. Вайнерманом и независимо М. Эноком и Ж.-М. Шварцем и определённая в общем контексте так называемых алгебр Каца, может рассматриваться как «правильное» обобщение классической двойственности Понтрягина на неабелевы группы. Этот материал представлен в [12].

Пусть G — локально компактная группа и $L_2(G)$ — гильбертово пространство функций, квадратично интегрируемых относительно левоинвариантной меры Хаара на G. Через $A(G)$ обозначим множество функций на G вида $\varphi = \xi * \check{\eta}$, где $\xi,\eta\in L_2(G)$ и $\check{\eta}(t) := \eta(t^{-1})$, $t\in G$. (Легко убедиться, что $A(G)$ — плотное подмножество в $C_0(G)$.) Фундаментальный и нетривиальный факт заключается в том, что $A(G)$ — банахова алгебра относительно поточечного умножения и нормы

$$\|\varphi\| := \inf\{\|\xi\|\,\|\eta\|\colon \varphi = \xi*\check{\eta},\ \xi,\eta\in L_2(G)\}.$$

[*]В действительности этот конкретный оператор — изометрический изоморфизм, но нам это не нужно.

Банахова алгебра $A(G)$ называется *алгеброй Фурье группы* G. Она всегда невырожденна и является унитальной тогда и только тогда, когда G компактна.

Является ли эта алгебра левой проективной? Ответ, конечно, положительный, если G абелева. Действительно, пусть $\hat{G}$ — локально компактная группа, двойственная по Понтрягину группе G. Хорошо известно, что преобразование Фурье $F\colon L_1(\hat{G}) \to C_0(G)$ имеет в качестве образа $A(G)$ и, будучи коограниченным на $A(G)$, определяет изометрический изоморфизм между соответствующими банаховыми алгебрами. Поэтому проективность $\tilde{\otimes}$-алгебры $A(G)$ для абелевой G может рассматриваться как частный случай теоремы 3.6.

Но этот результат не может быть расширен на случай неабелевых групп. Причина заключается в том, что существуют группы G, такие что канонический морфизм $\pi\colon A(G) \hat{\otimes} A(G) \to A(G)$ не только не является ретракцией в $\boldsymbol{A(G)}$**-$\hat{\otimes}$-mod**, но даже не является сюръективным отображением. Это было показано Штейнигером для случая дискретной группы $\mathbb{F}_2$, свободной группы с двумя образующими. Так как, как было уже упомянуто, каждая алгебра Фурье является невырожденной, из теоремы 2.3 следует, что $A(\mathbb{F}_2)$ *не является левой проективной $\hat{\otimes}$-алгеброй*.

Положение, однако, меняется, если мы будем рассматривать алгебры Фурье в контексте квантового функционального анализа. Пусть $\mathrm{VN}(G)$ — алгебра фон Ноймана G, т. е. минимальная алгебра фон Ноймана на $L_2(G)$, которая содержит все левые сдвиги операторов. Тогда, как это хорошо известно, $\mathrm{VN}(G)$ является (с точностью до изометрического изоморфизма) двойственным банаховым пространством для $A(G)$. (Заметим, что соответствующая двойственность корректно определена для $a \in \mathrm{VN}(G)$ и $\varphi \in A(G)$, $\varphi = \xi * \check{\eta}$, $\xi, \eta \in L_2(G)$, соотношением $(a, \varphi) = \langle a(\eta), \bar{\xi} \rangle$.) Далее, так как $\mathrm{VN}(G)$ — подпространство в $\mathcal{B}\bigl(L_2(G)\bigr)$, замкнутое по операторной норме, то оно автоматически квантовое банахово пространство относительно стандартного квантования, которое обсуждалось в разделе 1. Теперь мы напомним, что если банахово пространство является предсопряжённым пространством для «пространства первого этажа» некоторого квантового банахова пространства, то оно может быть снабжено некоторым специальным квантованием «операторного предсопряжённого пространства» [10, с. 317]. Это в точности то, что мы делали с $A(G)$. Как было показано Эффросом и Руаном [10], квантовое банахово пространство $A(G) \overset{\mathrm{o}}{\otimes} A(G)$ вполне изометрически изоморфно $A(G \times G)$, и из этого легко следует, что $A(G)$ является $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-алгеброй (однако, вообще говоря, это не $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-алгебра).

Следующая теорема здесь будет только сформулирована. Это частный случай общего результата Руана и Ксу [26], касающегося алгебр Каца. Аристов [5] и независимо Вуд [30] дали её прямое доказательство.

Теорема 3.7. *Если G — дискретная группа, то $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-алгебра $A(G)$ является левой проективной.*

В действительности эти авторы доказали, что для дискретной группы G алгебра $A(G)$ обладает намного более сильным свойством, так называемой бипроективностью. К сожалению, мы не имеем возможности обсуждать это здесь.

4. Пространственно проективные операторные алгебры на банаховых пространствах

Пусть E — банахово пространство, пока (ненадолго) произвольное. Пусть $\mathcal{B}(E)$ — банахова алгебра всех ограниченных операторов на E, рассматриваемая, как обычно, с операцией композиции в качестве умножения и с операторной нормой, обозначаемой $\|\cdot\|_\infty$. В этом разделе мы расширим смысл термина «операторная алгебра»: теперь *операторная алгебра на E* — произвольная подалгебра $\mathcal{B}(E)$, которая является банаховой алгеброй относительно некоторой нормы $\|\cdot\| \geqslant \|\cdot\|_\infty$.

Если A — такая алгебра, то, помимо её левых идеалов, немедленно приходит в голову ещё один важный пример A-модуля. Именно, E сама, очевидно, есть левый банахов A-модуль относительно внешнего умножения $a \cdot x := a(x)$, $a \in A$, $x \in E$ (другими словами, внешнее умножение — действие оператора на вектор). Этот специальный A-модуль называется *пространственным* или иногда *естественным*.

Определение 4.1. Операторная алгебра A на банаховом пространстве E называется *пространственно $\hat{\otimes}$-проективной* (или, когда нет опасности путаницы, просто *пространственно проективной*), если её пространственный левый A-$\hat{\otimes}$-модуль E проективен.

Заметим, что в этом разделе мы рассматриваем только традиционную версию понятия проективности. В частности, причина этого заключается в том, что мы не можем предложить разумного квантования $\mathcal{B}(E)$ для негильбертова пространства E.

Мы переходим к обсуждению одного из типичных вопросов гомологической теории операторных алгебр: какие операторные алгебры являются пространственно проективными?

Начнём с довольно важного достаточного условия пространственной проективности. Для $x \in E$ и $f \in E^*$ через $x \bigcirc f$ обозначим оператор на E, отображающий y в $[f(y)]x$. Если $x, f \neq 0$, то $x \bigcirc f$, очевидно, является оператором ранга 1 (в действительности $\operatorname{Im}(x \bigcirc f) = \operatorname{span}\{x\}$) и $\|x \bigcirc f\|_\infty = \|x\|\,\|f\|$. Очевидно, для любых $a \in \mathcal{B}(E)$, $x, y \in E$, $f \in E^*$ мы имеем

$$a(x \bigcirc f) = a(x) \bigcirc f \tag{4.1}$$

и, в частности,

$$(x \bigcirc f)(y \bigcirc f) = [f(y)]x \bigcirc f. \tag{4.2}$$

Известно (и легко доказывается), что каждый ограниченный оператор ранга 1 имеет вид $x \bigcirc f$ для некоторых $x \in E$, $f \in E^*$.

Зафиксируем на время некоторый ненулевой элемент $f \in E^*$ и положим $C_f := \{x \bigcirc f;\ x \in E\}$.

Определение 4.2. Подмножество в $\mathcal{B}(E)$ вида C_f, $f \neq 0$, называется *столбцом операторов ранга* 1.

Теорема 4.1. *Пусть операторная алгебра A на банаховом пространстве E содержит столбец операторов ранга* 1*, скажем C_f, $f \in E^*$. Тогда она пространственно проективна.*

Лемма 4.1. *Множество C_f — замкнутый левый главный идеал в A, порождённый идемпотентными элементами.*

Доказательство. Из соотношения (4.1) следует, что C_f — левый идеал в $\mathcal{B}(E)$ и, следовательно, в A. Возьмём такой $y \in E$, что $f(y) = 1$. Тогда для любого $x \in E$ из соотношения (4.2) следует, что $p := y \bigcirc f$ является идемпотентным элементом в A и C_f порождается p. Окончательно, если последовательность $a_n \in C_f$ сходится к a в A, то $a_n = a_n p$ влечёт $a = ap$. Следовательно, идеал C_f замкнут. $\square$

Доказательство теоремы 4.1. Пусть A_+ — унитализация A как банаховой алгебры. Рассмотрим естественное вложение $\mathbf{in}\colon C_f \to A_+$; конечно, это морфизм в $\boldsymbol{A}$-$\hat{\otimes}$-$\mathbf{mod}$. Далее, согласно лемме 4.1 C_f порождается некоторым идемпотентным элементом, скажем p. Рассмотрим отображение $\tau\colon A_+ \to C_f$, $a \mapsto ap$; очевидно, это морфизм в $\boldsymbol{A}$-$\hat{\otimes}$-$\mathbf{mod}$, такой что $\tau \circ (\mathbf{in}) = \mathbf{1}_{C_f}$. Мы видим, что C_f — ретракт A_+ в $\boldsymbol{A}$-$\hat{\otimes}$-$\mathbf{mod}$. Так как последний модуль является свободным модулем (ранга 1), из утверждения 2) теоремы 2.2$'$ (с $\mathbb{C}$ в качестве E) следует, что первый модуль является проективным.

Теперь рассмотрим отображение $i\colon C_f \to E$, $x \bigcirc f \mapsto x$; очевидно, это биекция. Из соотношения (4.1) следует, что i — морфизм левых A-модулей, и из оценки $\|x \bigcirc f\| \geqslant \|x \bigcirc f\|_\infty = \|x\|\,\|f\|$ следует, что i — ограниченный оператор. Но идеал C_f, будучи замкнутым в A, является банаховым пространством. Поэтому, применяя теорему Банаха, мы видим, что обратный оператор для i также ограничен, следовательно, i — изоморфизм в $\boldsymbol{A}$-$\hat{\otimes}$-$\mathbf{mod}$. Но мы уже знаем, что левый A-$\hat{\otimes}$-модуль C_f проективен. Следовательно, то же верно и для E. $\square$

Обязательно ли пространственно проективная операторная алгебра содержит столбец операторов ранга 1? Конечно нет: достаточно заметить, что алгебра скалярных операторов $\{\lambda \mathbf{1}_E\}$ несомненно является пространственно проективной. Однако вопрос становится более интересным, если мы ограничимся рассмотрением так называемых неразложимых алгебр. Напомним, что операторная алгебра A на банаховом пространстве E называется *неразложимой*, если не существует разложения E в прямую сумму двух нетривиальных замкнутых подпространств, инвариантных относительно A. Очевидно, что операторная алгебра, обладающая столбцом операторов ранга 1, всегда неразложима. Может быть, внутри класса неразложимых алгебр пространственно проективны в точности те, которые обладают столбцом операторов ранга 1?

Оказывается, что для некоторых важных классов операторных алгебр ответ положителен. Неудивительно, что большинство результатов этого сорта касаются наиболее изученного случая операторных алгебр на гильбертовых пространствах. Позже мы увидим, что оба обсуждаемых свойства эквивалентны для неразложимых операторных C^*-алгебр. Теперь мы сформулируем похожий результат для другого класса операторных алгебр, на этот раз существенно несамосопряжённых.

Пусть A — операторная алгебра на гильбертовом пространстве H. Через $\mathrm{Lat}(A)$ обозначим множество инвариантных подпространств этой алгебры. Напомним, что A называется *рефлексивной*, если всякий элемент $a \in \mathcal{B}(H)$, такой что каждое пространство в $\mathrm{Lat}(A)$ инвариантно относительно a, принадлежит A. (Мы немедленно видим, что рефлексивная алгебра всегда слабо операторно замкнута и, следовательно, равномерно замкнута в $\mathcal{B}(H)$.) Рефлексивная алгебра называется *CSL-алгеброй* (CSL является аббревиатурой для «commutative subspace lattice»), если все проекторы на подпространства из $\mathrm{Lat}(A)$ коммутируют. Наиболее популярные CSL-алгебры — это так называемые *гнездовые алгебры*, определённые как рефлексивные алгебры A с линейно упорядоченным по включению множеством $\mathrm{Lat}(A)$. Эти алгебры могут рассматриваться как разумные бесконечномерные обобщения алгебры верхних треугольных матриц. Конечно, гнездовые алгебры неразложимы.

Теорема 4.2 (Ю. О. Головин). *Пусть A — неразложимая CSL-алгебра на гильбертовом пространстве H. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *A пространственно проективна*;
2) *замыкание алгебраической суммы всех подпространств в $\mathrm{Lat}(A)$, отличных от H, не совпадает с H*;
3) *A содержит столбец операторов ранга 1.*

Доказательство дано в [1].

Заметим, что для гнездовой алгебры второе условие означает, что H как наибольший элемент линейно упорядоченного множества $\mathrm{Lat}(A)$ имеет непосредственного предшественника.

Пример 4.1. Возьмём конкретное гильбертово пространство $L_2(0,\infty)$ и положим $H_s := \{f \in L_2(0,\infty)\colon f(t) = 0,\ \text{если } 0 < t < s\}$ для любого $s > 0$. Теперь рассмотрим две гнездовые алгебры: A_1 с $\mathrm{Lat}\, A_1 := \{H_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ и A_2 с $\mathrm{Lat}\, A_2 := \{H_s;\ s > 0\}$. Тогда согласно результату Головина первая алгебра является пространственно проективной (укажите её столбец операторов ранга 1), в то время как вторая — нет.

Тем не менее неразложимые операторные алгебры без столбца операторов ранга 1 существуют. Вот по-видимому простейший пример этой ситуации.

Упражнение 4.1. Покажите, что операторная алгебра на $\mathbb{C}^2$, состоящая из операторов, которые в естественном базисе имеют матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

является пространственно проективной и неразложимой, но не содержит никакого столбца операторов ранга 1.

Заметим, что указанная алгебра не является ни рефлексивной, ни полупростой; таким образом, она довольно «плохая». Следующий результат, на этот раз касающийся «очень хорошей» алгебры, намного более интересен.

Теорема 4.3 (С. Б. Табалдыев). *Существует равномерно замкнутая операторная алгебра на гильбертовом пространстве со следующими свойствами*:

1) *она неразложима, рефлексивна и полупроста*;
2) *она коммутативна и, следовательно, не содержит столбца операторов ранга* 1;
3) *тем не менее она пространственно проективна.*

Конкретная алгебра, предложенная С. Б. Табалдыевым, была им названа соболевской алгеброй. Она действует на соболевском пространстве $W^1[0,1]$ функций $f \in L_2[0,1]$, обобщённые производные f' которой также являются регулярными обобщёнными функциями из $L_2[0,1]$. Как хорошо известно, $W^1[0,1]$ — гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt + \int_0^1 f'(t)\overline{g'(t)}\,dt.$$

Соболевская алгебра состоит из всех операторов m_f, $f \in W^1[0,1]$, действующих поточечным умножением, т. е. $m_f\colon g \mapsto fg$, $f \in W^1[0,1]$ (детали можно найти в [29, с. 207—209]).

Однако если мы заменим условие неразложимости на более строгое условие неприводимости, то примеры этого сорта станут невозможны.

Предложение 4.1 (С. Б. Табалдыев). *Пусть A — пространственно проективная операторная алгебра на банаховом пространстве. Если вдобавок A неприводима, то тогда она содержит столбец операторов ранга* 1.

Доказательство можно найти в [29, с. 204].

В хорошо известном классе операторных алгебр, промежуточном между неразложимыми и неприводимыми алгебрами, ситуация неясна.

Проблема. Пусть *топологически* неприводимая операторная алгебра на банаховом пространстве пространственно проективна. Следует ли из этого, что она содержит столбец операторов ранга 1?

Если нам вдобавок известно, что наша алгебра A на E является полупростой и, кроме того, или A, или E обладают свойством аппроксимации, то она неприводима, и, как следствие, ответ в этом случае положителен (С. Б. Табалдыев [29, с. 205]).

5. Проективность гильбертовых модулей

С этого момента мы снова рассматриваем алгебры и модули как объекты квантового и классического функционального анализа и, соответственно, свободно используем обозначение $\tilde{\otimes}$ «неспециализированного» тензорного произведения. Кроме того, термин «операторная алгебра» снова означает только равномерно замкнутую подалгебру в $\mathcal{B}(H)$.

В этом разделе мы сконцентрируем внимание на другом выдающемся классе $\tilde{\otimes}$-модулей, так называемых гильбертовых модулях над C^*-алгебрами. Мы представим критерий проективности этих модулей и, как частный случай, опишем все пространственно проективные операторные C^*-алгебры. Окажется, что оба эти результата зависят от нашего выбора гомологической теории (т. е. от выбора $\tilde{\otimes}$). Мы увидим, что «квантовый» подход даёт нам больший класс проективных модулей, чем «классический». Однако, если мы оставим класс C^*-алгебр и обратимся к несамосопряжённым операторным алгебрам, мы встретимся с довольно различными явлениями. Это будет показано в самом конце раздела.

Вот основной объект нашего изучения в этом разделе.

Определение 5.1. Пусть A — C^*-алгебра. Левый банахов A-модуль H называется *гильбертовым A-модулем*, если его подлежащее пространство является гильбертовым и, кроме того, имеет место тождество $\langle a \cdot x, y\rangle = \langle x, a^* \cdot y\rangle$.

Техническое замечание. Мы должны предупредить читателя, что терминология, касающаяся этих модулей, ещё не устоялась в литературе. Фактически, имеется не менее пяти различных объектов, носящих в различных статьях название гильбертовых модулей (см. [19, с. 79]).

Очевидно, что понятие гильбертова модуля над C^*-алгеброй эквивалентно понятию представления C^*-алгебры в гильбертовом пространстве. (Мы подразумеваем, конечно, инволютивное представление.) Именно, если A и H соответственно алгебра и модуль, то отображение $T\colon A \to \mathcal{B}(H)$, $a \mapsto T(a)$, $x \mapsto a \cdot x$, $x \in H$, очевидно, является инволютивным представлением. Оно будет называться *представлением, ассоциированным с модулем H*. Обратно, если нам дано представление A, скажем T, то H немедленно становится гильбертовым A-модулем с внешним умножением $a \cdot x := [T(a)](x)$, $a \in A$, $x \in H$.

Излишне говорить, что наиболее естественные примеры гильбертовых модулей даются пространственными модулями над операторными C^*-алгебрами.

В предыдущем определении в той форме, в которой оно дано, говорится о $\hat{\otimes}$-модуле над $\hat{\otimes}$-алгеброй. Но мы покажем, что, фактически, оно даёт автоматически $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-модуль над $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-алгеброй и, следовательно, $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-модуль над $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-алгеброй относительно некоторых разумных квантований A и H. Это хорошо известные стандартное и соответственно столбцовое квантования. Напомним их определения.

Для данной (абстрактной) C^*-алгебры A мы всегда берём квантование, задаваемое её произвольно выбранным точным представлением в гильбертовом пространстве H. Другими словами, в качестве квантования мы берём произвольный инъективный $*$-гомоморфизм A в $\mathcal{B}(H)$; напомним, что он автоматически изометричен. Заметим, что после этого алгебра $\mathrm{M}_n(A)$, $n = 1, 2, \ldots$, сама становится C^*-алгеброй (будучи C^*-подалгеброй $\mathcal{B}(nH)$). Мы напоминаем, что $*$-изоморфизмы C^*-алгебр автоматически изометричны. Поэтому получающееся квантовое банахово пространство не зависит от частного выбора точного представления. Указанное квантование C^*-алгебры будет называться *стандартным*.

Заметим, что каждый $*$-гомоморфизм между C^*-алгебрами, квантованными указанным способом, автоматически является вполне сжимающим (поскольку его размножения также являются $*$-гомоморфизмами между C^*-алгебрами и поэтому сжимающие).

C^*-алгебра, снабжённая стандартным квантованием, становится $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$- и, следовательно, $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-алгеброй. Действительно, для любого $n = 1, 2, \ldots$ пространство $\mathrm{M}_n(A)$ само является C^*-алгеброй и соответствующее размножение биоператора умножения в A является умножением в этой C^*-алгебре. Следовательно, последний биоператор является сжимающим.

Теперь мы переходим к квантованию H. Хорошо известно, что гильбертовы пространства могут быть квантованы большим числом различных способов, и многие из них очень полезны в изучении различных проблем функционального анализа. Для наших настоящих целей, однако, нужно только одно конкретное квантование. Как мы увидим, это обобщение конкретного квантования пространств l_2 и l_2^2, рассмотренного в разделе 2.

Далее мы будем обозначать через $x \bigcirc y$, $x, y \in H$, оператор ранга 1 в H, отображающий z в $\langle z, y \rangle x$ (сравните с обозначением $x \bigcirc f$ в предыдущем разделе). Зафиксируем произвольный единичный вектор $e \in H$ и рассмотрим отображение $H \to \mathcal{B}(H)$, $x \mapsto x \bigcirc e$; оно, конечно, является изометрическим оператором и поэтому квантованием H. Это специальное квантование называется *столбцовым квантованием*, и получающееся квантовое пространство называется *столбцовым гильбертовым пространством* или просто *столбцовым пространством*. Легко убедиться, что матричная норма этого квантового пространства не зависит от конкретного выбора $e \in H$. Более того, для любого n банахово пространство $\mathrm{M}_n(H)$ может быть отождествлено с пространством $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n, nH)$, если мы отождествим $(n \times n)$-матрицу с элементами из H с оператором из $\mathbb{C}^n$ в nH, задаваемым этой матрицей. (Этот оператор действует на векторе $\mathbb{C}^n$, записанном как столбец из комплексных чисел, умножением данной матрицы на этот столбец.)

Предложение 5.1. *Любой гильбертов модуль H над C^*-алгеброй A является A-$\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-модулем и, следовательно, A-$\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-модулем относительно стандартного квантования A и столбцового квантования H. Более того, внешнее умножение $\dot{m}\colon A \times H \to H$ является мультипликативно сжимающим биоператором.*

Доказательство. Фиксируем натуральное n и рассмотрим соответствующее мультипликативное размножение $\dot{m}$, т. е. биоператор

$$\dot{m}^{(n)} \colon \mathrm{M}_n(A) \times \mathrm{M}_n(H) \to \mathrm{M}_n(H),$$

отображающий пару $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(A)$, $\mathbf{x} = (x_{ij}) \in \mathrm{M}_n(H)$ в матрицу с элементами $y_{ij} := \sum\limits_{k=1}^{n} \dot{m}(a_{ik}, x_{kj}) \in H$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Мы должны показать, что этот биоператор является сжимающим.

Пусть $T \colon A \to \mathcal{B}(H)$ — представление, ассоциированное с нашим модулем. Тогда мы, очевидно, имеем $y_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} [T(a_{ik})](x_{kj})$. Напомним, что H является столбцовым пространством, и поэтому можно отождествить $\mathrm{M}_n(H)$ с $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n, nH)$. Пусть T_n — размножение T. Тогда, используя предыдущее равенство, легко убедиться, что $\dot{m}^{(n)}(\mathbf{a}, \mathbf{x})$, теперь оператор в $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n, nH)$, оказывается композицией операторов $[T_n(\mathbf{a})] \circ \mathbf{x}$. Но T, будучи $*$-гомоморфизмом C^*-алгебр, является вполне сжимающим. Таким образом, $\|T_n(\mathbf{a})\| \leqslant \|\mathbf{a}\|$ и, следовательно, $\|\dot{m}^{(n)}(\mathbf{a}, \mathbf{x})\| \leqslant \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{x}\|$. А это в точности то, что нам нужно. □

С этого момента, говоря о гильбертовом модуле H как о $\tilde{\otimes}$-модуле над $\tilde{\otimes}$-алгеброй A, мы всегда будем подразумевать в обоих «квантовых» случаях стандартное квантование A и столбцовое квантование H.

Мы начинаем подготавливать теорему, которая опишет проективные гильбертовы модули. Первое хорошо известное наблюдение представляет независимый интерес.

Предложение 5.2. *Пусть $\varphi \colon H \to K$ — ограниченный оператор между двумя столбцовыми пространствами. Тогда он автоматически вполне ограничен и* $\|\varphi\|_{\mathrm{cb}} = \|\varphi\|$.

Доказательство. Зафиксируем натуральное n и рассмотрим оператор

$$\varphi \mathbin{\dot{\otimes}} \mathbf{1} \colon nH = H \mathbin{\dot{\otimes}} \mathbb{C}^n \to K \mathbin{\dot{\otimes}} \mathbb{C}^n = nK.$$

Отождествляя $\mathrm{M}_n(H)$ с $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n, nH)$ и $\mathrm{M}_n(K)$ с $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n, nK)$, мы замечаем, что n-е размножение $\varphi_n \colon \mathrm{M}_n(H) \to \mathrm{M}_n(K)$ оператора φ переводит $a \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n, nH)$ в композицию операторов $(\varphi \mathbin{\dot{\otimes}} \mathbf{1}) \circ a \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n, nK)$. Поэтому $\|\varphi_n(a)\| \leqslant \|\varphi \mathbin{\dot{\otimes}} \mathbf{1}\| \, \|a\| = \|\varphi\| \, \|a\|$. Остальное ясно. □

Следующий класс морфизмов модулей будет одним из основных наших средств. Поэтому он заслуживает специального названия.

Определение 5.2. Пусть X — левый $\tilde{\otimes}$-модуль над (пока произвольной) $\tilde{\otimes}$-алгеброй A. Тогда любой $\tilde{\otimes}$-ограниченный морфизм из X в базисную алгебру A называется *модульным характером* X или просто *характером* X, если нет опасности путаницы.

Мы скажем, что левый A-$\tilde{\otimes}$-модуль X имеет *достаточное множество характеров*, если для любого $x \in X$, $x \neq 0$, существует такой характер χ модуля X, что $\chi(x) \neq 0$.

Из абстрактной алгебры хорошо известно, что любой проективный левый модуль над алгеброй имеет достаточное множество характеров (теперь мы имеем в виду, конечно, алгебраический прототип последнего понятия). Нам будет нужна функционально-аналитическая версия этого результата. Сначала мы докажем подготовительное утверждение, которое будет использовано прямо сейчас, а также для дальнейших задач позже.

В дальнейшем для любого вектора $e \in H$ через $\check{e}$ мы будем обозначать функционал $y \mapsto \langle y, e\rangle$ на H. Если E — произвольное $\tilde{\otimes}$-пространство, такой функционал определяет оператор $\mathbf{1} \tilde{\otimes} \check{e}\colon E \tilde{\otimes} H \to E \tilde{\otimes} \mathbb{C}$. Отождествляя $E \tilde{\otimes} \mathbb{C}$ с E, мы можем рассмотреть $\mathbf{1} \tilde{\otimes} \check{e}$ как морфизм из $E \tilde{\otimes} H$ в E, корректно определённый тем, что он переводит $x \otimes y$, $x \in E$, $y \in H$, в $\langle y, e\rangle x$.

Предложение 5.3. *Пусть H и E определены как выше, а u — ненулевой вектор в $E \tilde{\otimes} H$. Тогда существует вектор $e \in H$, $e \neq 0$, такой что морфизм $\mathbf{1} \tilde{\otimes} \check{e}\colon E \tilde{\otimes} H \to A$ переводит u в ненулевой вектор в H.*

Доказательство. Мы увидим, что требуемый e может быть найден среди векторов произвольного ортонормального базиса в H. Зафиксируем такой базис и обозначим его через e_ν, $\nu \in \Lambda$.

Через $N(\Lambda)$ обозначим семейство всех конечных подмножеств Λ, направленное с помощью отношения включения, и для любого $\lambda \in N(\Lambda)$ обозначим через $p_\lambda\colon H \to H$ проектор на конечномерное гильбертово пространство $K_\lambda := \operatorname{span}\{e_\nu;\ \nu \in \Lambda\}$. Из предложения 5.2 следует, что $\|p_\lambda\|_{\mathrm{cb}} = 1$ для всех $\lambda \in N(\Lambda)$. Следовательно, для всех λ мы имеем $\|\mathbf{1} \tilde{\otimes} p_\lambda\|_{\mathrm{cb}} = 1$ для оператора $\mathbf{1} \tilde{\otimes} p_\lambda\colon E \tilde{\otimes} H \to E \tilde{\otimes} H$. Из последнего равенства легко следует оценка

$$\|v - (\mathbf{1} \tilde{\otimes} p_\lambda)(v)\| \leqslant 2\|v - w\| + \|w - (\mathbf{1} \tilde{\otimes} p_\lambda)(w)\|$$

для всех $v, w \in A \tilde{\otimes} H$ и $\lambda \in N(\Lambda)$.

Мы утверждаем, что для любого $v \in E \tilde{\otimes} H$ сеть $(\mathbf{1} \tilde{\otimes} p_\lambda)(v)$ сходится к v. Действительно, так как каждый $y \in H$ — предел $p_\lambda(y)$, это так, если v — элементарный тензор. Следовательно, это верно для всех сумм элементарных тензоров и, по предыдущему неравенству, для их предельных точек, т. е. для всех $v \in E \tilde{\otimes} H$.

Так как наш элемент u ненулевой, то $(\mathbf{1} \tilde{\otimes} p_\lambda)(u) \neq 0$ по крайней мере для одного λ. Следовательно, по аддитивности существует такой элемент $\nu \in \Lambda$, что оператор $\mathbf{1} \tilde{\otimes} q_\nu$, где q_ν — проектор ранга 1 $e_\nu \bigcirc e_\nu$, не отображает u в нуль. Но для каждого элементарного тензора $v \in E \tilde{\otimes} H$, скажем $v := x \otimes y$, мы имеем

$$(\mathbf{1} \tilde{\otimes} q_\nu)(v) = x \otimes \langle y, e_\nu\rangle e_\nu = (\mathbf{1} \tilde{\otimes} \check{e_\nu})(x \otimes y) \otimes e_\nu = (\mathbf{1} \tilde{\otimes} \check{e_\nu})(v) \otimes e_\nu.$$

Теперь снова работает обычный переход от элементарных тензоров к произвольным элементам $E \tilde{\otimes} H$, и мы имеем $(\mathbf{1} \tilde{\otimes} q_\nu)(u) = (\mathbf{1} \tilde{\otimes} \check{e_\nu})(u) \otimes e_\nu$. Остальное ясно. □

Замечание. В действительности, если ограничиться $\hat{\otimes}$-случаем, предыдущее предложение может быть существенно усилено. Именно, пусть A — банахова алгебра и X — левый проективный банахов A-модуль. Возьмём подлежащие банаховы пространства A и X и предположим, что по крайней мере одно из них обладает свойством аппроксимации. Тогда, как было замечено Ю. В. Селивановым, X имеет достаточное множество характеров. Детали можно найти, например, в [13, утверждение 4.4].

Предложение 5.4. *Пусть H — левый $\tilde{\otimes}$-модуль над C^*-алгеброй A. Предположим, что модуль H невырожден и проективен. Тогда он имеет достаточное множество характеров.*

Доказательство. Зафиксируем ненулевой $x \in X$. Согласно теореме 2.3 существует морфизм $\rho\colon H \to A \tilde{\otimes} H$, являющийся правым обратным к соответствующему морфизму внешнего произведения и потому инъективный. В частности, $u := \rho(x) \neq 0$.

Применим предыдущее предложение, беря A в качестве E и данный u. Мы получаем оператор $\mathbf{1} \tilde{\otimes} \check{e}\colon A \tilde{\otimes} H \to A$, такой что $\mathbf{1} \tilde{\otimes} \check{e}(u) \neq 0$. Рассматривая его действие на элементарных тензорах, мы видим, что это морфизм в $\boldsymbol{A}$**-**$\hat{\otimes}$**-mod**. Остаётся положить $\chi := (\mathbf{1} \tilde{\otimes} \check{e}) \circ \rho$. $\square$

Позднее окажется, что в рамках «квантовых» гомологий проективные гильбертовы модули в точности те, которые обладают достаточным множеством характеров. В то же время в «классическом» контексте модули с достаточным множеством характеров не обязаны быть проективными.

Теперь мы введём важное понятие, которое будет участвовать в формулировке основного результата.

Определение 5.3. Пусть A является C^*-алгеброй. Проектор, т. е. самосопряжённый идемпотентный элемент, $p \in A$, $p \neq 0$, называется *элементарным*, если pap кратен p для любого $a \in A$.

Пусть p — элементарный проектор в C^*-алгебре A. Введём множество

$$I_p := \{ap\colon a \in A\}.$$

Другими словами, I_p — главный левый идеал в A, порождённый p. Напомним несколько хорошо известных фактов из структурной теории C^*-алгебр.

Предложение 5.5.

1. *I_p — минимальный левый идеал в A (другими словами, неприводимый подмодуль A-модуля A). Обратно, любой минимальный левый идеал в A имеет вид I_p для некоторого элементарного проектора $p \in A$. Более того, отображение $p \mapsto I_p$ — биекция между множеством элементарных проекторов в A и множеством минимальных левых идеалов в A.*
2. *Идеал I_p всегда замкнут, и его норма, индуцированная из A, является нормой гильбертова пространства. Более того, она порождается скалярным произведением, корректно определённым равенством $\langle ap, bp\rangle p = pb^*ap$, $a, b \in A$.*

Доказательство можно найти, например, в [25, гл. IV, § 10].

В действительности мы можем сказать больше.

Предложение 5.6. *Идеал I_p как подмодуль A является гильбертовым A-модулем. Более того, его квантование как подпространства A и его столбцовое квантование дают одну и ту же матричную норму.*

Доказательство. Пусть $a, b, c, d \in A$ и $x := cp$, $y := dp \in I_p$. Тогда

$$\langle ax, y\rangle p = \langle acp, dp\rangle p = pd^*acp = \langle cp, a^*dp\rangle p = \langle x, a^*y\rangle p,$$

и следовательно, мы получаем первое утверждение.

Далее, возьмём матрицу $\mathbf{x} = (x_{ij}) \in \mathrm{M}_n(I_p)$. Обозначим через $\|\mathbf{x}\|_1$ её норму относительно стандартного квантования A и через $\|\mathbf{x}\|_2$ её норму относительно столбцового квантования.

Так как $\|\cdot\|_1$ является нормой C^*-алгебры, сопряжённая матрица $\mathbf{x}^*$ имеет элементы $(x^*)_{ij} := (x_{ji})^*$, число $\|\mathbf{x}\|_2^2$ является нормой матрицы $\mathbf{y} := \mathbf{x}^*\mathbf{x}$ с элементами

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(x^*)_{ik}x_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(x_{ki})^*x_{kj} = \sum_{k=1}^{n}p(x_{ki})^*x_{kj}p = \sum_{k=1}^{n}\langle x_{kj}, x_{ki}\rangle p.$$

Отсюда, очевидно, следует, что $\|\mathbf{x}\|_1^2$ — норма скалярной $(n\times n)$-матрицы $\boldsymbol{\alpha}$ с элементами $\alpha_{ij} := \sum\limits_{k=1}^{n}\langle x_{kj}, x_{ki}\rangle$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

С другой стороны, $\|\mathbf{x}\|_2$ — норма соответствующего оператора в $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n, nH)$, и следовательно, $\|\mathbf{x}\|_2^2$ — норма композиции операторов $\mathbf{f} \circ \mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$, где $\mathbf{f} \in \mathcal{B}(nH, \mathbb{C}^n)$ — оператор, сопряжённый к $\mathbf{x}$. Очевидно, последний оператор имеет матрицу $(f_{ij} \in H^*)$, где $f_{ij}\colon H \to \mathbb{C}$ переводит y в $\langle y, x_{ji}\rangle$. Остаётся заметить, что $\mathbf{f} \circ \mathbf{x}$ задаётся той же самой матрицей $\boldsymbol{\alpha}$. □

Далее гильбертовы A-модули вида I_p, где p — элементарный проектор в A, будут называться *элементарными гильбертовыми A-модулями*.

Теперь мы почти готовы к тому, чтобы получить простейший частный случай будущей общей теоремы и, делая это, описать «элементарные блоки» для постройки произвольных проективных гильбертовых модулей. Этот начальный результат будет касаться *неприводимых гильбертовых модулей*, т. е. ненулевых гильбертовых модулей без собственных подмодулей (в чисто алгебраическом смысле), кроме $\{0\}$*.

Теорема 5.1. *Пусть H — неприводимый гильбертов модуль над C^*-алгеброй A, рассматриваемой как $\tilde{\otimes}$-модуль над $\tilde{\otimes}$-алгеброй. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *H является $\tilde{\otimes}$-проективным;*
2) *H имеет достаточное множество характеров (в $\boldsymbol{A}$-$\tilde{\otimes}$-**mod**);*
3) *H имеет по меньшей мере один ненулевой характер (в $\boldsymbol{A}$-$\tilde{\otimes}$-**mod**);*
4) *H алгебраически изоморфен элементарному гильбертову A-модулю;*

---

*Отметим, что согласно теореме Кадисона о представлениях гильбертов модуль над C^*-алгеброй без собственных *замкнутых* подмодулей автоматически не имеет никаких собственных подмодулей.

5) *H является $\tilde{\otimes}$-изометрически $\tilde{\otimes}$-изоморфным элементарному гильбертову A-$\tilde{\otimes}$-модулю.*

В частности (*благодаря чисто алгебраическому условию* 3)), *класс проективных неприводимых гильбертовых A-$\tilde{\otimes}$-модулей не зависит от конкретного выбора $\tilde{\otimes}$, т. е. он один и тот же во всех трёх теориях.*

Что касается заключительного утверждения теоремы, мы позднее увидим, что вне класса неприводимых модулей ситуация совершенно иная.

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) обеспечивается предложением 5.4.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) ясна.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 4). Пусть χ — ненулевой характер H. Так как модуль H неприводим, χ — инъективное отображение и, следовательно, его коограничение $\chi^0\colon H \to \operatorname{Im}(\chi)$ — алгебраический изоморфизм A-модулей. Отсюда следует, что под-A-модуль $\operatorname{Im}(\chi)$ в A также неприводим и, следовательно, это минимальный левый идеал в A. Осталось воспользоваться первым пунктом предложения 5.5.

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 5). Пусть $i\colon H \to I_p$ — алгебраический изоморфизм A-модулей. Возьмём $x \in H$, такой что $i(x) = p$. Так как i инъективен и $i(p \cdot x) = p[i(x)] = p$, мы имеем $p \cdot x = x$. Теперь возьмём произвольные $y, z \in H$. Так как модуль H неприводим, существуют $a, b \in A$, такие что $y = a \cdot x = ap \cdot x$ и $z = b \cdot x = bp \cdot x$ и, следовательно, $i(y) = ap$ и $i(z) = bp$. Поэтому, используя вид скалярного произведения в I_p (см. пункт 2 предложение 5.5) и определение гильбертова модуля, имеем

$$\|x\|^2\langle i(y), i(z)\rangle = \|x\|^2\langle ap, bp\rangle = \langle\langle ap, bp\rangle x, x\rangle = \langle\langle ap, bp\rangle p \cdot x, x\rangle = \\ = \langle(pb^*ap) \cdot x, x\rangle = \langle ap \cdot x, bp \cdot x\rangle = \langle y, z\rangle.$$

Таким образом, оператор $\|x\|i$ — изометрический изоморфизм из H на I_p, и это завершает наше рассуждение в $\hat{\otimes}$-случае. Так как в обоих «квантовых» случаях пространства H и (согласно предложению 5.6) I_p имеют столбцовое квантование, остальное следует из предложения 5.2.

Докажем импликацию 5) $\Longrightarrow$ 1). Так как p является правой единицей для I_p, последний является $\tilde{\otimes}$-проективным по предложению 3.1. $\square$

Наиболее прозрачным частным случаем этой теоремы является, по-видимому, следующее утверждение. С этого момента термин «пространственно $\tilde{\otimes}$-проективная операторная C^*-алгебра» означает, что пространственный модуль над этой алгеброй является $\tilde{\otimes}$-проективным.

Теорема 5.2. *Пусть A — неприводимая операторная C^*-алгебра на гильбертовом пространстве H. Тогда A является пространственно $\tilde{\otimes}$-проективной тогда и только тогда, когда она содержит все компактные операторы, т. е. $A \supseteq \mathcal{K}(H)$.*

Доказательство. Докажем часть $\Longleftarrow$. Так как A вместе с $\mathcal{K}(H)$ содержит множество столбцов операторов ранга 1, модуль H является $\hat{\otimes}$-проективным по теореме 4.1. Следовательно, заключительное утверждение предыдущей теоремы гарантирует, что H, будучи неприводимым модулем, также является $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$- и $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-проективным.

Докажем часть $\Longrightarrow$. Из предыдущей теоремы следует, что A содержит элементарный проектор, скажем p. Возьмём произвольные $x, y \in \mathrm{Im}(p)$, $x \neq 0$. Так как A неприводима, то x — её циклический вектор. Следовательно, $y = a(x)$ для некоторого $a \in A$. Мы напомним, что pap кратен p, поэтому $y = [pap](x)$ кратен $x = p(x)$. Отсюда следует, что p — оператор ранга 1. Но хорошо известно (и легко доказывается, сделайте это!), что если неприводимая C^*-алгебра содержит по меньшей мере один оператор ранга 1, то она содержит все компактные операторы. Остальное ясно. $\square$

Напомним, что неразложимая операторная C^*-алгебра автоматически неприводима. Поэтому мы можем выполнить обещание, данное в предыдущем разделе. Именно, как прямое следствие предыдущей теоремы мы получаем, что каждая пространственно проективная неразложимая операторная C^*-алгебра обязательно обладает столбцом операторов ранга 1.

Контрпример. Рассмотрим хорошо известную фермионную (или CAR-) алгебру. Она неприводима, но не содержит компактных операторов. Следовательно, она не является пространственно $\tilde{\otimes}$-проективной, какое бы конкретное $\tilde{\otimes}$ мы ни выбрали. То же верно для общих алгебр Глимма.

В действительности модули, участвующие в теореме 5.2, допускают полную классификацию. Мы вынуждены ограничиться простой формулировкой соответствующего результата. Далее слово «изоморфизм» означает всё, что можно себе представить: от чисто алгебраического изоморфизма (через топологический изоморфизм банаховых модулей) до вполне изометрического изоморфизма квантовых модулей.

Мы напомним, что проекторы p и q в C^*-алгебре A называются *эквивалентными* или, более точно, *эквивалентными в смысле Мюррея и фон Ноймана*, если существует $v \in A$ (называемый *частичной изометрией*), такой что $v^*v = p$ и $vv^* = q$ и, следовательно, как показывает простое вычисление, $v = vp = qv$ и $v^* = pv^* = vq^*$.

Следующее утверждение [17, предложение 21] довольно просто, и мы оставляем его доказательство читателю.

Предложение 5.7. *Пусть p и q — элементарные проекторы в A. Тогда они эквивалентны тогда и только тогда, когда $paq \neq 0$ для некоторого $a \in A$, и тогда и только тогда, когда A-модули I_p и I_q изоморфны.*

Это предложение, будучи скомбинированным с предыдущей теоремой, немедленно приводит к следующей теореме.

Теорема 5.3. *Соответствие $p \mapsto I_p$ индуцирует биекцию между множеством классов эквивалентности элементарных проекторов в A и множеством классов изоморфизма неприводимых проективных A-$\tilde{\otimes}$-модулей.* $\square$

Упражнение 5.1. Пусть A — операторная C^*-алгебра, содержащая по меньшей мере один оператор ранга 1. Покажите, что все неприводимые проективные A-$\widetilde{\otimes}$-модули совпадают, с точностью до изоморфизма, с пространственными A-модулями.

Мы переходим от неприводимых к общим гильбертовым модулям. К сожалению, недостаток пространства и времени удерживает нас от подробного описания и классификации проективных объектов внутри этих классов модулей. Тем не менее мы попытаемся осветить некоторые основные моменты с достаточной степенью полноты.

Начнём с того, что сообщим некоторую полезную информацию о поведении характеров наших модулей (см. [4]). Однако для наших конкретных целей нам нужна только часть соответствующего общего результата.

Теорема 5.4. *Пусть H — гильбертов модуль над C^*-алгеброй A и $\chi\colon H \to A$ — его ненулевой характер. Тогда образ χ содержит элементарный проектор.*

К сожалению, у нас нет возможности представить здесь полное доказательство этой теоремы.Однако мы укажем его основные этапы. Мы надеемся, что читатель сможет восстановить все пропущенные детали, пользуясь данными леммами.

Сначала, опираясь существенно на «гильбертовость» и «C^*-материи», мы получаем довольно техническую лемму.

Лемма 5.1. *Пусть $x \in H$ и $a := \chi(x)$. Предположим, что существуют самосопряжённые нормированные элементы $b_1, \dots, b_n \in A$, такие что $b_k b_l = b_l b_k = 0$, $k, l = 1, \dots, n$, и для некоторого $\theta > 0$ мы имеем $\|b_k a\| \geqslant \theta$, $k = 1, \dots, n$. Тогда число n этих элементов не превосходит $(\theta)^{-2}\|\chi\|^2\|x\|^2$.*

Из этой леммы, используя аппарат непрерывного функционального исчисления в C^*-алгебрах, можно вывести следующую лемму.

Лемма 5.2. *Пусть a — ненулевой положительный элемент в образе χ и $\Omega \subset \mathbb{R}^+$ — его спектр. Тогда этот спектр состоит из изолированных точек, за исключением, возможно, 0.*

Благодаря этой лемме мы можем применить «δ-функционалы» к элементам образа χ. С их помощью получается следующая лемма.

Лемма 5.3. *Пусть a и Ω будут как выше. Тогда образ χ содержит такой проектор p, что $pa = ap = pap$ и последний элемент является ненулевым кратным p.*

Эта лемма влечёт ещё одну лемму.

Лемма 5.4. *Если проектор $\operatorname{Im}(\chi)$ не является элементарным, то он строго мажорирует другой проектор в $\operatorname{Im}(\chi)$.*

С другой стороны, лемма 5.1, будучи источником сформулированных лемм, также влечёт лемму 5.5.

Лемма 5.5. *Пусть $p = p_0 > p_1 > \ldots > p_n$ — семейство строго убывающих ненулевых проекторов в A и $p = \chi(x)$ для некоторого $x \in H$. Тогда $n \leqslant \|\chi\|^2 \|x\|^2$. В качестве следствия получаем, что каждый проектор в образе χ мажорирует проектор, который минимален в A.*

Теперь можно получить сформулированную теорему, комбинируя три последних леммы.

В качестве второго шага к основным результатам мы используем предыдущую теорему, чтобы получить предложение 5.8.

Предложение 5.8. *Пусть H — гильбертов модуль над C^*-алгеброй. Предположим, что H имеет ненулевой характер. Тогда он имеет замкнутый неприводимый подмодуль, изоморфный некоторому элементарному гильбертову модулю.*

Доказательство. Пусть χ — упомянутый характер. Тогда согласно предыдущей теореме существует $x \in H$ и элементарный проектор $p = \chi(x)$. Заменяя x на $p \cdot x$, мы можем предположить, что $p \cdot x = x$. Возьмём подмодуль $H_x := \{a \cdot x;\ a \in H\}$. Наша цель — показать, что это в точности то, что нам нужно.

Пусть последовательность $y_n = a_n \cdot x \in H_x$ сходится к $y \in H$. Так как отображение χ непрерывно, то $\chi(y_n) = a_n \cdot \chi(x) = a_n p \in I_p$ сходится к $\chi(y)$. Так как I_p замкнут, то $\chi(y) = ap$ для некоторого $a \in A$. Но тогда

$$a \cdot x = ap \cdot x = \lim_{n \to \infty} (a_n p \cdot x) = \lim_{n \to \infty} (a_n p \cdot x) = \lim_{n \to \infty} (a_n \cdot x) = \lim_{n \to \infty} y_n = y.$$

Поэтому $y \in H_x$ и, следовательно, H_x замкнут.

Далее, χ, очевидно, отображает H_x на I_p. Рассмотрим соответствующее биограничение $\chi_0\colon H_x \to I_p$. Конечно, это морфизм A-модулей. Возьмём $y \in H_x$, $y = a \cdot x$. Тогда $y = ap \cdot x$. Поэтому если $y \neq 0$, то $ap \neq 0$ и, следовательно, $\chi_0(y) = \chi(a \cdot x) = a\chi(x) = ap \neq 0$. Мы видим, что χ_0 — инъективный морфизм H_x на I_p. Следовательно, это изоморфизм. Остальное ясно. □

Теперь мы в состоянии получить следующую теорему веддерберновского типа для гильбертовых модулей.

Теорема 5.5. *Пусть H — такой гильбертов модуль над C^*-алгеброй A, что множество его характеров является достаточным. Тогда H разлагается в гильбертову сумму своих замкнутых неприводимых подмодулей. Более того, каждый из этих подмодулей изоморфен элементарному гильбертову модулю.*

Доказательство. Если K является замкнутым подмодулем в H, то «прямая разность» $H \ominus K$, очевидно, также подмодуль в H. Это позволяет вывести требуемое утверждение из предыдущей теоремы с помощью ритуального танца вокруг леммы Цорна. Соответствующее частично упорядоченное множество является множеством всех семейств попарно ортогональных подмодулей в H, изоморфных некоторому элементарному гильбертову модулю. Детали мы оставляем читателю. □

Формально эта теорема принадлежит к теории представлений (= модулей) C^*-алгебр. Но её влияние на теорию гомологий очевидно. Мы напомним, что гильбертов модуль, являющийся проективным в смысле как минимум одной из наших трёх теорий гомологий, автоматически удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и, таким образом, имеет разложение веддерберновского типа указанного вида. Теперь мы на пороге теоремы, показывающей, что в обеих «квантовых» теориях гомологий обратное тоже верно. Как следствие мы получим полное описание $\tilde{\otimes}$-проективных гильбертовых модулей для $\tilde{\otimes} = \overset{\mathrm{h}}{\otimes}$ и $\tilde{\otimes} = \overset{\mathrm{o}}{\otimes}$.

Мы хотим переупорядочить наше разложение, группируя изоморфные слагаемые. Как можно ожидать согласно теореме 5.3, множество классов эквивалентности элементарных проекторов в A играет важную роль. Мы обозначим его $\mathcal{P}(A)$ или просто $\mathcal{P}$. Будет удобно отождествить $\mathcal{P}$ с некоторым фиксированным (произвольно выбранным) максимальным семейством взаимно неэквивалентных элементарных проекторов в A и соответственно писать, скажем, $p \in \mathcal{P}$. Если $\beta\colon \mathcal{P} \to \bar{\mathbb{N}}$ — произвольная функция, принимающая значения в кардиналах, мы обозначим через $\beta(p)I_p$ гильбертову сумму $\beta(p)$ копий гильбертова пространства I_p и введём как один из наших основных объектов квантовый столбец гильбертова A-модуля $\dot{\bigoplus}\{\beta(p)I_p\colon p \in \mathcal{P}\}$, будем обозначать его I^β. Если $\mathcal{P}$ пусто, мы полагаем $I^\beta := 0$.

Теорема 5.6. *Следующие свойства невырожденного гильбертова модуля H над C^*-алгеброй A эквивалентны*:

1) *H проективен как $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-модуль над $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-алгеброй*;
2) *H проективен как $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-модуль над $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-алгеброй*;
3) *H имеет достаточное множество характеров*;
4) *H вполне изометрически изоморфен гильбертовой сумме семейства элементарных A-модулей, т. е.* (*по теореме* 5.3) *I^β для некоторого $\beta\colon \mathcal{P} \to \bar{\mathbb{N}}$.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) следует из предложения 2.7. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) — это предложение 5.3. Импликация 3) $\Longrightarrow$ 4) — это теорема 5.5.

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 1). Мы намерены снова использовать теорему 2.3. Соответственно, наша цель — получить вполне ограниченный морфизм A-модулей $\rho\colon I^\beta \to A \overset{\mathrm{o}}{\otimes} I^\beta$, правый обратный к морфизму внешнего произведения $\pi := \pi_{I^\beta}$. Мы получим такой морфизм, и в дальнейшем вдобавок окажется, что он вполне сжимающий (и даже ещё лучше, см. упражнение 5.2).

Для любого $p \in \mathcal{P}$ мы обозначим через $\overline{\beta(p)}$ отрезок трансфинитной прямой от 1 до $\beta(p)$. Если $m \in \overline{\beta(p)}$, мы обозначим через I_p^m «m-ю копию» I_p в гильбертовой сумме $\beta(p)I_p$. Далее для $x \in I_p$ ($\subseteq A$) обозначение x^m говорит, что мы рассматриваем соответствующую копию x в I_p^m.

Обозначим через I_0^β линейную оболочку или, что теперь то же самое, прямую линейную сумму всех I_p^m, $p \in \mathcal{P}$, $m \in \overline{\beta(p)}$. Рассмотрим линейный оператор $\rho_0\colon I_0^\beta \to A \overset{\circ}{\otimes} I^\beta$, корректно определённый тем, что он отображает копию $x^m \in I_p^m$ элемента $x \in I_p$ в $\rho_0(x^m) := x \otimes p^m$. Заметим, что для любых $x^m \in I_p^m$ и $a \in A$ мы имеем $\rho_0(a \cdot x^m) = \rho_0\bigl((a\cdot x)^m\bigr) = ax \otimes p^m = a \cdot (x \otimes p^m) = a \cdot \rho_0(x^m)$ и $\pi\bigl(\rho_0(x^m)\bigr) = x \cdot p^m = (xp)^m = x^m$. По линейности из этого следует, что оператор ρ_0 удовлетворяет соотношениям

$$\rho_0(a \cdot y) = a \cdot \rho_0(y) \tag{5.1}$$

и

$$\pi\bigl(\rho_0(y)\bigr) = y \tag{5.2}$$

для всех $a \in A$ и $y \in I_0^\beta$.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и произвольную матрицу $\mathbf{y} = (y_{ij}) \in \mathrm{M}_n(I_0^\beta)$. Сначала мы покажем, что для матрицы $\mathbf{u} := \rho_{0n}(\mathbf{y}) \in \mathrm{M}_n(A \overset{\circ}{\otimes} I^\beta)$, где ρ_{0n} — размножение ρ_0 (т. е. для $\mathbf{u}$ с элементами $u_{ij} := \rho_0(y_{ij}) \in A \overset{\circ}{\otimes} I^\beta$) мы имеем* $\|\mathbf{u}\| \leqslant \|\mathbf{y}\|$.

Так как I_0^β — прямая сумма пространств I_p^m, мы можем выразить матричные элементы y_{ij} в виде

$$y_{ij} = \sum_{l=1}^{L} \sum_{k=1}^{K} x_{lk,ij}^k.$$

В этом выражении $x_{lk,ij}^k \in I_{p_l}^{m_k}$ есть m_k-я копия некоторого элемента $x_{lk,ij} \in I_{p_l}$, где $p_l \in \mathcal{P}$, $l = 1, \ldots, L$, — некоторые элементарные проекторы, $m_k \in \overline{\beta(p_l)}$, $k = 1, \ldots, K$, — ординалы, и с этого момента мы пишем для краткости индекс k вместо m_k.

Для каждого $l = 1, \ldots, L$ возьмём линейную оболочку всех $x_{lk,ij}$ в I_{p_l} и затем некоторый ортонормальный базис, скажем $e_{l1}, \ldots, e_{lM_l}$, этой линейной оболочки. Тогда мы имеем для всех подходящих l, k, i, j выражения

$$x_{lk,ij} = \sum_{m=1}^{M_l} \lambda_{lkm,ij} e_{lm}$$

и, следовательно,

$$x_{lk,ij}^k = \sum_{m=1}^{M_l} \lambda_{lkm,ij} e_{lm}^k$$

для некоторого $\lambda_{lkm,ij} \in \mathbb{C}$.

Следующее важное свойство введённых векторов будет использоваться немного позже.

---

*Продвинутый читатель догадается, что наши рассуждения близки к доказательству хорошо известного факта, что $\overset{\circ}{\otimes}$-произведение двух гильбертовых столбцов есть снова гильбертов столбец. Более того, мы могли бы, после некоторых приготовлений, использовать этот факт для доказательства того, что образ ρ действительно содержится в таком $\overset{\circ}{\otimes}$-произведении. Но это не сделает нашу жизнь намного проще. Мы предпочитаем прямое доказательство, которое представляется нам более поучительным.

Лемма 5.6.

1. *Для всех* $l = 1, \dots, L$, $m, m' = 1, \dots, M_l$ *мы имеем* $e^*_{lm} e_{lm'} = p_l$, *если* $m = m'$, *и* $e^*_{lm} e_{lm'} = 0$, *если* $m \neq m'$.
2. *Для всех* $l, l' = 1, \dots, L$, $l \neq l'$ *и всех* $m = 1, \dots, M_l$, $m' = 1, \dots, M^{m'}$ *мы имеем* $e^*_{l'm'} e_{lm} = 0$.

Доказательство. 1. Так как векторы e_{lm} для всех m принадлежат I_{p_l}, мы имеем $e_{lm} = e_{lm} p_l$. Поэтому, используя вид скалярного произведения в I_{p_l} (см. второе утверждение предложения 5.5), мы имеем $e^*_{lm} e_{lm'} = p_l e^*_{lm} e_{lm'} p_l = \langle e_{lm}, e_{lm'} \rangle p_l$. Остальное ясно.

2. Предположим, что, напротив, $e^*_{l'm'} e_{lm} \neq 0$. Обозначим для краткости этот элемент через a. Так как $a = p_{l'} e^*_{l'm'} e_{lm} p_l$, мы имеем $a^* a = p_l a^* p^*_{l'} a p_l$ и $aa^* = p_{l'} a p^*_l a^* p_{l'}$. Поэтому $a^* a$ кратен p_l, в то время как aa^* кратен $p_{l'}$. Положим $b := a / \|a\|$. Из C^*-тождества для нормы в A немедленно следует, что $b^* b = p_k$ и $bb^* = p_l$. Но это означает, что проекторы p_l и p_k, несмотря на то что они представляют различные элементы $\mathcal{P}$, эквивалентны. Мы приходим к противоречию. □

Продолжение доказательства теоремы 5.6. Напоминая, что I^β имеет столбцовое квантование I^β, мы отождествляем матрицу $\mathbf{y}$ с соответствующим оператором в $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n, (I^\beta)^n)$, также обозначаемым $\mathbf{y}$. Этот оператор отображает $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ в

$$\mathbf{y}(\xi) = \biggl(\sum_{j=1}^n \xi_j y_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^n \xi_j y_{nj} \biggr).$$

i-й вектор в этой n-строке есть

$$\sum_{j=1}^n \xi_j y_{ij} = \sum_{j=1}^n \xi_j \biggl(\sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K x^k_{lk,ij} \biggr) =$$
$$= \sum_{j=1}^n \xi_j \biggl(\sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \biggl(\sum_{m=1}^{M_l} \lambda_{lkm,ij} e^k_{lm} \biggr) \biggr) = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^{M_l} \biggl(\sum_{j=1}^n \xi_j \lambda_{lkm,ij} \biggr) e^k_{lm}.$$

Так как система e^k_{lm} для всех возможных l, k, m ортонормальна в I^β, мы имеем

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \max \sum_{i=1}^n \biggl\| \sum_{j=1}^n \xi_j y_{ij} \biggr\|^2 = \max \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^{M_l} \biggl| \sum_{j=1}^n \xi_j \lambda_{lkm,ij}) \biggr|^2, \tag{5.3}$$

где максимум берётся по всем $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$, $\sum\limits_{j=1}^n |\xi_j|^2 = 1$.

Держа в памяти сказанное выше, обратимся к матрице $\mathbf{u} := \rho_{0n}(\mathbf{y})$. Её элементы имеют вид

$$u_{ij} = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K x_{lk,ij} \otimes p^k_l.$$

(Напомним, что через p_l^k мы обозначаем копии p_l в $I_l^{m_k}$.) Поэтому

$$u_{ij}=\sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{K}\Big[\Big(\sum_{m=1}^{M_l}\lambda_{lkm,ij}e_{lm}\Big)\otimes p_l^k\Big]=\sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M_l}\lambda_{lkm,ij}[e_{lm}\otimes p_l^k].$$

Чтобы представить это в немного более удобной форме, для всех l, m, k, i, j, участвующих в вычислениях выше, и для всех $s=1,\dots,L$ мы положим $\mu_{slkm,ij}{:=}\lambda_{lkm,ij}$, если $s=l$, и $\mu_{slkm,ij}{:=}0$ в противном случае. Тогда, очевидно, мы имеем

$$u_{ij}=\sum_{s,l=1}^{L}\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M_l}\mu_{slkm,ij}[e_{lm}\otimes p_s^k]. \tag{5.4}$$

Заметим, что в этой формуле участвуют $N:=M_1+\ldots+M_L$ элементов $e_{lm}\in A$ и KL векторов $p_s^k\in I^\beta$. Для краткости мы произвольно перенумеруем двойные индексы $(\cdot)_{lm}$ одиночными числами $t=1,\dots,N$ и двойные индексы $(\cdot)_s^k$ одиночными числами $r=1,\dots,KL$. С этого момента мы будем писать e_t, q_r и $\mu_{tr,ij}$ вместо соответствующих элементов e_{lm}, векторов p_s^k и комплексных чисел $\mu_{slkm,ij}$. Формула (5.4) преобразуется в

$$u_{ij}=\sum_{t=1}^{N}\sum_{r=1}^{KL}\mu_{tr,ij}[e_t\otimes q_r]. \tag{5.5}$$

Мы введём следующие три матрицы.

1°. Матрица $\mathbf{v}\in\mathrm{M}_{n,Nn}(A)$. Она имеет вид «блок-строки»

$$(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_t,\dots,\mathbf{v}_N),$$

где $\mathbf{v}_t=(v_{t,ij})\in\mathrm{M}_n(A)$ для любого $t=1,\dots,N$ является диагональной матрицей с элементами e_t на основной диагонали и 0 на других местах.

2°. Некоторая матрица, более точно строка, $\mathbf{w}\in\mathrm{M}_{1,KL}(I^\beta)$. Она имеет вид

$$(q_1,\dots,q_r,\dots,q_{KL}).$$

3°. Некоторая скалярная («обычная») матрица $\gamma\in\mathrm{M}_{NKLn,n}(\mathbb{C})$. Она имеет вид «блок-столбца»

$$\begin{pmatrix}\vdots\\ \gamma_{tr}\\ \vdots\end{pmatrix},$$

где соответствующие блоки являются $(n\times n)$-матрицами $\gamma_{tr}:=(\mu_{tr,ij})$, $t=1,\dots,N$, $r=1,\dots,KL$.

Теперь посмотрим на тензорное произведение $\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}$. Согласно сказанному выше, это матрица в $\mathrm{M}_{n\times 1,Nn\times KL}(A\otimes I^\beta)$, имеющая, очевидно, вид «блок-строки» $(\dots,\mathbf{z}_{tr},\dots)$, $1\leqslant t\leqslant N$, $1\leqslant s\leqslant KL$, где $\mathbf{z}_{tr}\in\mathrm{M}_n(A\otimes I^\beta)$ — диагональная матрица с элементами $e_t\otimes q_r$ на главной диагонали и 0 на других местах. Мы упорядочиваем эти матрицы слева направо в лексикографическом порядке.

Мы пришли к основному наблюдению. Из структуры наших матриц легко следует, что $(n\times n)$-матрица $(v\otimes w)\gamma$ имеет на ij-м месте, $1\leqslant i,j\leqslant n$, элементы $\sum\limits_{t=1}^{N}\sum\limits_{r=1}^{KL}\mu_{tr,ij}[e_t\otimes q_r]$. Но согласно (5.5) эти элементы — в точности u_{ij}. Мы получили равенство $\rho_0(\mathbf{y})=\mathbf{u}=(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})\gamma$. Следовательно, мы можем применить формулу (1.2), где мы берём, конечно, A в качестве E, I^β в качестве F, наши конкретные матрицы, снова обозначенные как $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ и γ, и тождественную матрицу в $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ в качестве α. Это даёт оценку

$$\|\rho_{0n}(\mathbf{y})\|\leqslant\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\,\|\gamma\|. \tag{5.6}$$

Но что мы можем сказать о нормах наших трёх матриц?

Лемма 5.7. $\|\mathbf{v}\|=\|\mathbf{w}\|=1$, *в то время как* $\|\gamma\|=\|\mathbf{y}\|$.

Доказательство. Рассмотрим сначала $\mathbf{v}\in\mathrm{M}_{n,Nn}(A)$. Норма этой прямоугольной матрицы есть по определению норма квадратной матрицы в $\mathrm{M}_{Nn}(A)$ с $\mathbf{v}$ в качестве верхнего блока-строки и с 0 на других местах; мы сохраняем для этой квадратной матрицы то же самое обозначение $\mathbf{v}$. Но $\mathrm{M}_{Nn}(A)$ — C^*-алгебра, поэтому $\|\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{v}^*\mathbf{v}\|$. Далее, $\mathbf{v}^*\mathbf{v}$ может быть представлена как блочная матрица размера $N\times N$ с блоками из $\mathrm{M}_n(A)$. В этой «большой» матрице блок с индексом tr, $1\leqslant t,r\leqslant N$, есть, очевидно, $(n\times n)$-матрица с $e_t^*e_r$ на главной диагонали и 0 на других местах. Теперь мы напомним, что через e_t мы начали, после произвольной перенумерации, обозначать векторы e_{lm}, $l=1,\ldots,L$, $m=1,\ldots,M_l$, и что эти векторы были предметом леммы 5.6. Очевидно, что в новых обозначениях наших векторов лемма 5.6 утверждает в точности, что $e_t^*e_r=p_t$, если $t=r$, и $e_t^*e_r=0$ в противном случае. Следовательно, наша «большая» матрица $\mathbf{v}^*\mathbf{v}$ не имеет ненулевых элементов, кроме как на главной диагонали, и они являются ненулевыми проекторами. Из этого следует, конечно, что $\|\mathbf{v}^*\mathbf{v}\|=1$, и следовательно, $\|\mathbf{v}\|=1$.

Теперь мы обратимся к строке $\mathbf{w}=(q_1,\ldots,q_{KL})\in\mathrm{M}_{1,KL}(I^\beta)$. В силу столбцового квантования I^β её норма — норма оператора в $\mathcal{B}(\mathbb{C}^{KL},I^\beta)$, отвечающего этой строке. Этот оператор отображает t-й орт (= вектор естественного базиса) в $\mathbb{C}^{KL}$ в q_t. Напомним, что через q_t мы начали, после произвольной перенумерации, обозначать векторы p_l^k, $l=1,\ldots,L$, $k=1,\ldots,K$, и что эти векторы, в силу их выбора, образуют ортонормальную систему в I^β. Это означает, конечно, что наш оператор является изометрическим. Следовательно, $\|\mathbf{w}\|=1$.

Наконец, возьмём скалярную матрицу γ. Её норма есть норма соответствующего оператора в $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^{NKLn})$. Это означает, что

$$\|\gamma\|^2=\max\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{N}\sum_{r=1}^{KL}\left|\sum_{j=1}^{n}\xi_j\mu_{tr,ij}\right|^2,$$

где максимум берётся по всем $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{C}^n$, $\sum\limits_{j=1}^{n}|\xi_j|^2=1$. Напомним, что через $\mu_{tr,ij}$ мы начали, после произвольной перенумерации, обозначать комплексные числа $\mu_{slkm,ij}$, $s,l=1,\ldots,L$, $k=1,\ldots,K$, $m=1,\ldots,M_l$, и последние были взяты равными $\lambda_{lkm,ij}$, если $s=l$, и 0 в противном случае. Поэтому мы имеем

$$\|\gamma\|^2=\max\sum_{i=1}^{n}\sum_{s,l=1}^{L}\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M_l}\left|\sum_{j=1}^{n}\xi_j\mu_{slkm,ij}\right|^2=\max\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M_l}\left|\sum_{j=1}^{n}\xi_j\lambda_{lkm,ij}\right|^2,$$

где максимум берётся по тем же ξ, что и раньше. Мы видим, что $\|\gamma\|=\|\mathbf{y}\|$. $\square$

Окончание доказательства теоремы 5.6. Лемма 5.7 вместе с оценкой (5.6) даёт $\|\rho_{0n}(\mathbf{y})\|\leqslant\|\mathbf{y}\|$ для любых $n\in\mathbb{N}$ и $\mathbf{y}\in\mathrm{M}_n(I_0^\beta)$. Таким образом, оператор $\rho_{0n}\colon\mathrm{M}_n(I_0^\beta)\to\mathrm{M}_n(A\overset{\circ}{\otimes}I^\beta)$ сжимающий. В частности, полагая $n=1$, мы видим, что наш исходный оператор $\rho_0\colon I_0^\beta\to A\overset{\circ}{\otimes}I^\beta$ сжимающий. Так как I_0^β есть плотное подпространство в I^β, ρ_0 имеет единственное продолжение до сжимающего оператора $\rho\colon I^\beta\to A\overset{\circ}{\otimes}I^\beta$. Ясно, что для любого n соответствующее размножение $\rho_n\colon\mathrm{M}_n(I^\beta)\to\mathrm{M}_n(A\overset{\circ}{\otimes}I^\beta)$ есть просто продолжение по непрерывности ρ_{0n}, и поэтому оно также сжимающее. Мы видим, что ρ является *вполне* сжимающим.

Осталось заметить, что из равенства (5.1) и непрерывности ρ следует, что ρ является морфизмом A-модулей, а из равенства (5.2) следует, что ρ есть правый обратный для канонического проектора π. Применение теоремы 2.3 завершает доказательство. $\square$

Упражнение 5.2. Покажите, что только что построенный морфизм ρ в действительности вполне изометричен.

Таким образом, мы только что увидели, что «квантово проективные» гильбертовы модули над C^*-алгеброй в точности те, которые могут быть построены из «элементарных блоков», описанных в теореме 5.1, с помощью взятия произвольных гильбертовых сумм.

Переходя от «квантового» к «классическому» контексту, мы обнаруживаем, что ситуация становится более сложной.

Причина появления новых трудностей состоит в следующем. Теперь, пытаясь доказать, что модуль типа I^β является $\hat{\otimes}$-проективным, мы будем стараться построить морфизм из такого модуля в пространство $A\otimes I^\beta$, где последнее снабжено $\hat{\otimes}$-нормой. Но эта норма определённо больше, чем $\overset{\circ}{\otimes}$-норма, с которой мы только что работали. Поэтому оператор из I^β в $A\otimes I^\beta$, который ограничен относительно $\overset{\circ}{\otimes}$-нормы в последнем пространстве, может оказаться неограниченным после замены этой нормы на $\hat{\otimes}$-норму. Более того, можно заметить, что конкретный морфизм ρ_0, построенный в предыдущем доказательстве, теперь, вообще говоря, не является ограниченным.

Тем не менее «классически проективные» гильбертовы модули также могут быть полностью описаны, и это может быть сделано с помощью некоторой модификации морфизма ρ_0, обсуждавшегося выше. Существующее доказательство соответствующего результата в целом труднее, чем теорема 5.6 (и это несмотря на то, что мы имеем «только один этаж», с которым работаем). Мы представим здесь только формулировку.

Определение 5.4. Функция со значениями в кардиналах $\beta\colon \mathcal{P} \to \bar{\mathbb{N}}$ является *существенно конечной*, если мощность $\beta(p)$ конечна для всех $p \in \mathcal{P}$, таких что $\dim I_p = \infty$.

Теорема 5.7. *Пусть H — невырожденный гильбертов модуль над C^*-алгеброй A. Тогда следующие его свойства эквивалентны*:

1) *H является $\hat{\otimes}$-проективным*;
2) *существует существенно конечная функция со значениями в кардиналах $\beta\colon \mathcal{E} \to \bar{\mathbb{N}}$, такая что H является топологически изоморфным банахову A-модулю I^β*;
3) *существует существенно конечная функция со значениями в кардиналах $\beta\colon \mathcal{E} \to \bar{\mathbb{N}}$, такая что H является изометрически изоморфным банахову A-модулю I^β.*

Полное доказательство приведено в [17].

Контрпример. Пусть A — операторная C^*-алгебра, действующая на гильбертовом пространстве H и содержащая по меньшей мере один оператор ранга 1 и, следовательно, всё $\mathcal{K}(H)$. Возьмём произвольный проектор p ранга 1. Тогда легко убедиться, что $\dim I_p = \infty$. (В действительности A-модуль I_p изоморфен пространственному модулю H, сравните с упражнением 5.1.) Поэтому теоремы 5.6 и 5.7 показывают, что A-модуль $\aleph_0 I_p$, гильбертова сумма счётного семейства копий I_p, является $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$- и $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-проективным, но не $\hat{\otimes}$-проективным.

В действительности более сложная часть доказательства теоремы 5.7 приведена только для того, чтобы продемонстрировать, что такой модуль не является $\hat{\otimes}$-проективным.

Напомним, что внутри класса неприводимых модулей $\tilde{\otimes}$-проективные гильбертовы модули допускают полную классификацию (теорема 5.3). Эта классификация может быть расширена на общие $\tilde{\otimes}$-проективные гильбертовы модули. Для этого, помимо упомянутых теорем, мы используем следующее предложение.

Предложение 5.9. *Пусть $\beta, \beta'\colon \mathcal{P} \to \bar{\mathbb{N}}$ — две произвольные функции со значениями в кардиналах. Если гильбертовы модули H^β и $H^{\beta'}$ являются топологически изоморфными, то $\beta = \beta'$.*

Доказательство можно найти в [17, теорема 4].

Теоремы 5.6 и 5.7, скомбинированные с этим предложением, дают теорему, сформулированную ниже. Там в «классической» части 1) слово «изоморфизм» означает или топологический, или, согласно нашим пожеланиям, изометрический изоморфизм банаховых модулей. В «квантовой» части 2) теоремы тот же термин означает топологический изоморфизм банаховых модулей или вполне изометрический изоморфизм квантовых банаховых модулей.

Теорема 5.8. *Пусть A — C^*-алгебра, $\mathcal{P}$ — множество классов эквивалентности её элементарных проекторов. Соответствие $\beta \mapsto H^\beta$ задаёт*:

1) *биекцию между классом всех существенно конечных функций со значениями в кардиналах на $\mathcal{P}$ и классом классов изоморфизма невырожденных $\hat{\otimes}$-проективных гильбертовых модулей над A;*
2) *биекцию между классом произвольных функций со значениями в кардиналах на $\mathcal{P}$ и классом классов изоморфизма невырожденных $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-проективных (или, эквивалентно, $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-проективных) гильбертовых модулей над A.*

В продолжение серии наших наиболее прозрачных иллюстраций, начатой теоремой 5.2 и упражнением 5.1, читателю предлагается выполнить следующее упражнение.

Упражнение 5.3. Пусть A как в контрпримере выше. Принимая теорему 5.8 на веру, показать, что произвольный $\tilde{\otimes}$-проективный гильбертов A-модуль имеет, с точностью до изоморфизма, вид mH, где m есть однозначно определённый кардинал. Эта мощность должна быть конечной в «классическом» случае и может быть произвольной в «квантовом» случае.

Замечание. В контексте этого упражнения заметим, что A-модули $\aleph_0 H$ и $\aleph H$ не являются топологически изоморфными, но они определённо алгебраически изоморфны. Таким образом, мы видим, что многообразие типов изоморфизма, рассмотренных в предыдущей теореме, не может включать (в противоположность сказанному в теореме 5.3) чисто алгебраические изоморфизмы модулей.

Всё время наши модули предполагались невырожденными. Однако при этом мы не потеряли в общности. Вырожденные модули не создают новых проблем.

Упражнение 5.4. Пусть H — произвольный гильбертов модуль над C^*-алгеброй A, H_e — его невырожденный подмодуль. Покажите, что

1) если A унитален, то H является $\tilde{\otimes}$-проективным тогда и только тогда, когда H_e является $\tilde{\otimes}$-проективным;
2) если A не является унитальным и H является $\tilde{\otimes}$-проективным, то H является невырожденным, т. е. $H = H_e$.

6. Алгебры Веддерберна и пространственно проективные C^*-алгебры

Теперь мы сконцентрируемся на выдающемся частном случае гильбертовых модулей, а именно случае пространственных модулей над операторными C^*-алгебрами. Теоремы 5.6 и 5.7, будучи применены к этим модулям, приводят к полному описанию пространственно проективных C^*-алгебр в обоих контекстах, классическом и квантовом. В действительности это описание, теорема 6.2, эквивалентно комбинации теорем 5.6 и 5.7: одно может быть выведено из другого (см. [17, 19]). Рассуждение имеет технический характер. Мы опустим его, ограничившись следующим намёком на общее положении вещей.

Упражнение 6.1. Пусть A — операторная C^*-алгебра и H — пространственный A-модуль. Пусть p — элементарный проектор в A и x — вектор в образе p. Покажите, что множество $H_{p,x} := \{a(x);\ a \in A\}$ — неприводимый замкнутый подмодуль H, изоморфный I_p. Затем покажите, что если A имеет достаточное множество характеров, то верно и обратное: каждый неприводимый подмодуль H имеет вид $H_{p,x}$ для некоторых p и x как выше.

Вместо того чтобы углубляться в детали доказательств, мы расскажем больше о связи пространственной проективности операторных алгебр с некоторыми старыми вопросами структурной теории операторных алгебр.

Как мы увидим, условия пространственной проективности операторной алгебры окажутся эквивалентными (или тесно связанными) с существованием того, что разумно назвать веддерберновской структурой этой алгебры, напрямую связанной с классической структурной теоремой Веддерберна для полупростых конечномерных операторных алгебр. Мы имеем в виду знаменитый результат, установленный в начале XX века. На современном языке он может быть сформулирован следующим образом.

Теорема Веддерберна. *Пусть A — невырожденная алгебра операторов, действующих на конечномерном линейном пространстве H. Предположим, что A полупроста. Тогда существуют разложения*

$$H = \bigoplus \{H'_m;\ m = 1, \dots, n\}$$

и для любого m $H'_m = H_m \otimes K_m$, такие что A состоит из всех операторов $\mathbf{a}$ со следующими свойствами:

1) *H'_m, $m = 1, \dots, n$, — инвариантные подпространства a;*
2) *ограничение $\mathbf{a}$ на каждое H'_m, $m = 1, \dots, n$, имеет вид $\mathbf{b} \otimes \mathbf{1}$, где $\mathbf{b}$ — оператор, действующий на H_m, и $\mathbf{1}$ — тождественный оператор на K_m.*

На более традиционном языке матриц описанная структура, очевидно, означает следующее. Операторы в A изображаются в некотором базисе в H блочно-диагональными матрицами, и каждый из этих «больших» блоков является, в свою очередь, скалярной блок-матрицей. Другими словами, оператор в A имеет блок-матрицу вида

$$\begin{pmatrix}
a & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\
0 & a & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & a & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & b & \dots & 0 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & b & 0 & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}.$$

Здесь размеры «маленьких» блоков $a, b, c, \ldots$ равны соответственно $\dim H_1$, $\dim H_2, \ldots$, т. е. линейным размерностям левых тензорных множителей. С другой стороны, числа тождественных «маленьких» блоков внутри «больших» блоков равны соответственно $\dim K_1, \dim K_2, \ldots$, т. е. размерностям правых тензорных множителей.

Со становлением функционального анализа некоторые люди, и главное фон Нойманн, начали интересоваться возможным функционально-аналитическим (т. е. бесконечномерным) обобщением этой теоремы. Мы напомним, что этот интерес был одним из главных импульсов, которые привели фон Нойманна к открытию объектов, которые теперь называются «алгебрами фон Ноймана» (см., например, [28]). Наиболее желаемая структура алгебр, которая может рассматриваться как «правильный» бесконечномерный аналог классической веддерберновской структуры, может быть описана в следующих терминах.

Пусть H — произвольное гильбертово пространство. Предположим, что H представлено в виде гильбертовой суммы

$$H = \dot{\bigoplus}\{H'_\nu;\ \nu \in \Lambda\}$$

и каждое H'_ν, в свою очередь, представлено как гильбертово тензорное произведение $H'_\nu = H_\nu \dot{\otimes} K_\nu$. В этой ситуации мы будем говорить, для краткости, что дано *двойное разложение* (H_ν, K_ν), $\nu \in \Lambda$, пространства H. Мы будем говорить, что указанное двойное разложение является *существенно конечным**, если для любого ν по меньшей мере одна из гильбертовых размерностей пространств H_ν и K_ν конечна.

Пусть (H_ν, K_ν), $\nu \in \Lambda$, — двойное разложение гильбертова пространства H и для некоторого $\nu \in \Lambda$ A_ν — операторная алгебра на H_ν. Мы будем обозначать через $A_\nu \dot{\otimes} \mathbf{1}$ алгебру всех операторов, действующих как $a \dot{\otimes} \mathbf{1}$, $a \in A_\nu$, на $H_\nu \dot{\otimes} K_\nu$ и как нуль на $H \ominus (H_\nu \dot{\otimes} K_\nu)$. Далее, $\bigoplus_\infty$ будет обозначать прямую сумму (= l_∞-сумму) операторных алгебр.

Определение 6.1. Операторная алгебра A на H называется *операторной алгеброй Веддерберна*, если она имеет вид $\bigoplus_\infty\{\mathcal{B}(H_\nu) \dot{\otimes} \mathbf{1};\ \nu \in \Lambda\}$ для некоторого двойного разложения (H_ν, K_ν), $\nu \in \Lambda$ пространства H. Другими словами, A состоит из всех ограниченных операторов, действующих как $a \dot{\otimes} \mathbf{1}$, $a \in \mathcal{B}(H_\nu)$, на $H_\nu \dot{\otimes} K_\nu$.

Иногда мы будем использовать выражение «алгебра Веддерберна, ассоциированная с таким-то и таким-то двойным разложением», его смысл ясен.

На матричном языке это означает, что алгебра Веддерберна A состоит из всех операторов, задаваемых, в точности как на диаграмме выше, диагональными блок-матрицами, такими что каждый «большой» блок — скалярная блок-матрица. Однако теперь это сделано относительно некоторого *ортонормального* базиса в H, и, конечно, мы должны говорить об ограниченных операторах.

*Эта новая «существенная конечность» тесно связана со свойством функций со значениями в кардиналах, носящим то же название, введённым в разделе 5. Об этом можно догадаться, сравнив первое утверждение теоремы 5.8 с теоремой 6.2.

Помимо этого, теперь число «больших» блоков, размеры «маленьких» блоков $a, b, c, \ldots$ и числа тождественных «маленьких» блоков, расположенных на главных диагоналях «больших» блоков, являются произвольными кардиналами.

Условие существенной конечности данного двойного разложения, очевидно, означает для соответствующих алгебр Веддерберна следующее. Любой из «больших» блоков матриц операторов, принадлежащих этим алгебрам, должен иметь по меньшей мере одно из следующих двух свойств: или этот блок как блочная матрица имеет конечный размер, или «маленькие» блоки, принадлежащие этому «большому», являются матрицами конечного размера. (Число «больших» блоков, конечно, ничем не ограничивается и может быть произвольным кардиналом.)

Очевидно, каждая алгебра Веддерберна является алгеброй фон Ноймана с дискретным (= изоморфным $l_\infty(\cdot)$) центром. Известно, что в начале 1930-х годов фон Нойманн предположил, что обратное тоже верно. Но в 1935 году совместно с Мюрреем он обнаружил, что каждая алгебра фон Ноймана со скалярным центром, т. е. фактор, не обязательно должна быть алгеброй Веддерберна. Теперь, в ретроспективе, мы знаем, что соответствующий контрпример, знаменитые «непрерывные» факторы, представляет собой одно из главных открытий математики XX века.

Какого вида дополнительные условия, наложенные на алгебру фон Ноймана, выделяют алгебры Веддерберна? Почтенная алгебраическая традиция предлагает посмотреть на такие условия в мире гомологий. Действительно, можно доказать следующую теорему.

Теорема 6.1.

1. *Класс всех алгебр Веддерберна совпадает с классом пространственно* $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$*-проективных и с классом пространственно* $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$*-проективных алгебр фон Ноймана.*
2. *Класс алгебр Веддерберна, ассоциированных с существенно конечными двойными разложениями, совпадает с классом пространственно* $\hat{\otimes}$*-проективных алгебр фон Ноймана.*

Оригинальное доказательство второй части этой теоремы можно найти в [15]. Это был самый ранний результат, касающийся гомологических свойств гильбертовых модулей.

Мы видим, в частности, что класс квантовых пространственно проективных алгебр фон Ноймана шире, чем класс традиционно пространственно проективных алгебр фон Ноймана. Чтобы предъявить простейшую иллюстрацию, рассмотрим бесконечномерное гильбертово пространство, скажем H_0. Пусть A — то, что называется алгеброй $\mathcal{B}(H_0)$ в стандартной форме. Это означает, что мы полагаем $H := H_0 \dot{\otimes} H_0$ и берём в качестве A алгебру $\mathcal{B}(H_0) \dot{\otimes} \mathbf{1}$. Так как условие существенной конечности, очевидно, не выполнено, наша алгебра является пространственно проективной в квантовой, но не в традиционной теории гомологий.

Но что происходит в большем классе произвольных (вообще говоря, не слабо операторно замкнутых) операторных C^*-алгебр? Чтобы сформулировать подходящий критерий, введём новый термин.

Определение 6.2. Мы скажем, что (пока произвольная) операторная алгебра A на H является *согласованной с двойным разложением* (H_ν, K_ν), $\nu \in \Lambda$, этого пространства, если для любого $\nu \in \Lambda$ существует операторная алгебра A_ν на H_ν со следующими свойствами:

1) A является подалгеброй в $\bigoplus_\infty\{A_\nu \dot{\otimes} \mathbf{1};\ \nu \in \Lambda\}$;
2) для любого $\nu \in \Lambda$ алгебра A_ν содержит по меньшей мере один столбец операторов ранга 1.

Выбирая подходящий ортонормальный базис в H, мы видим, что операторы в A изображаются матрицами, состоящими из «больших» и «маленьких» блоков, как выше. (Разница состоит в том, что сейчас A не обязана содержать все такие операторы.) Смысл дополнительного условия состоит в том, что мы можем выбрать наш ортонормальный базис таким образом, что, беря матрицы операторов в A и смотря на любой из их «маленьких» блоков, мы можем найти в этом блоке все возможные матрицы с нулевыми элементами вне первого столбца.

Зафиксируем двойное разложение (H_ν, K_ν), $\nu \in \Lambda$, пространства H. Очевидно, среди всех операторных алгебр, которые согласованы с этим разложением, существует наибольшая, и она является соответствующей алгеброй Веддерберна. Кроме того, ясно также, что среди этих алгебр нет минимальной.

Однако такая наименьшая алгебра существует, если мы ограничимся рассмотрением C^*-операторных алгебр (т. е. самосопряжённых). Действительно, если A — C^*-алгебра, то же верно для всех A_ν, $\nu \in \Lambda$. Так как любая A_ν содержит столбец операторов ранга 1, то, будучи самосопряжённой, она содержит все операторы конечного ранга и, следовательно, являясь равномерно замкнутой, она содержит все компактные операторы. Таким образом, $A \supseteq \mathcal{K}(H_\nu)$. Но A также является равномерно замкнутой, на этот раз в $\mathcal{B}(H)$. Поэтому A содержит алгебру $\bigoplus_0\{\mathcal{K}(H_\nu)\dot{\otimes}\mathbf{1};\ \nu \in \Lambda\}$, где $\bigoplus_0$ — символ для ограниченной суммы (= c_0-суммы) операторных алгебр. Следовательно, $\bigoplus_0\{\mathcal{K}(H_\nu)\dot{\otimes}\mathbf{1};\ \nu \in \Lambda\}$ — наименьшая C^*-алгебра, согласованная с заданным двойным разложением нашего гильбертова пространства*.

Теперь мы в состоянии сформулировать обещанную «пространственную» версию теорем 5.6 и 5.7.

Теорема 6.2. *Пусть A — операторная C^*-алгебра, действующая на гильбертовом пространстве H. Тогда*

1) *A пространственно $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-проективна тогда и только тогда, когда A пространственно $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-проективна, и тогда и только тогда, когда A является согласованной с некоторым двойным разложением H;*

*Если алгебры $\bigoplus_\infty\{A_\nu \dot{\otimes} \mathbf{1};\ \nu \in \Lambda\}$ заслуживают того, чтобы быть названными «алгебрами Веддерберна» среди алгебр фон Ноймана, то для алгебр $\bigoplus_0\{\mathcal{K}(H_\nu) \dot{\otimes} \mathbf{1};\ \nu \in \Lambda\}$, возможно, разумно потребовать того же почётного титула среди *общих* операторных C^*-алгебр.

2) *A пространственно $\hat{\otimes}$-проективна тогда и только тогда, когда A является согласованной с некоторым существенно конечным двойным разложением H.*

Другими словами, пространственная проективность A в любой из двух квантовых гомологических теорий означает в точности то, что для некоторого двойного разложения (H_ν, K_ν), $\nu \in \Lambda$, пространства H мы имеем включения

$$\bigoplus\nolimits_0 \{\mathcal{K}(H_\nu) \dot{\otimes} \mathbf{1};\ \nu \in \Lambda\} \subseteq A \subseteq \bigoplus\nolimits_\infty \{\mathcal{B}(H_\nu) \dot{\otimes} \mathbf{1};\ \nu \in \Lambda\}.$$

В то же время пространственная проективность A в традиционной теории гомологий означает, что то же включение имеет место относительно некоторого *существенно конечного* двойного разложения заданного гильбертова пространства.

Что может произойти, если мы перейдём к произвольным, не обязательно самосопряжённым, операторным алгебрам? В контексте квантовой теории гомологий часть «$\Longleftarrow$» предыдущего критерия все ещё выполнена.

Предложение 6.1 [19]. *Произвольная операторная алгебра на H, согласованная с некоторым двойным разложением H, является пространственно $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$- и $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-проективной.*

Однако в традиционной теории соответствующее достаточное условие пространственной проективности больше не подходит. В действительности нет гарантии, даже если мы предполагаем, что все тензорные множители, участвующие в заданном двойном разложении, имеют конечные размерности. Рассмотрим, например, гильбертово пространство

$$(\mathbb{C} \dot{\otimes} \mathbb{C}) \dot{\oplus} (\mathbb{C}^2 \dot{\otimes} \mathbb{C}^2) \dot{\oplus} (\mathbb{C}^3 \dot{\otimes} \mathbb{C}^3) \dot{\oplus} \ldots.$$

Как было показано в [19, с. 22—24], существует операторная алгебра, согласованная с подходящим двойным разложением, которая не является пространственно $\tilde{\otimes}$-проективной.

Полное описание пространственно $\hat{\otimes}$-проективных операторных алгебр, согласованных с двойными разложениями гильбертовых пространств, были получены М. Е. Поляковым [2].

Таким образом мы видим, что гильбертов модуль над операторной алгеброй может быть одновременно проективным в квантовых гомологических теориях и непроективным в классической гомологической теории («после забывания о квантовании»). Но есть и обратные феномены: существуют банаховы модули, которые проективны в традиционном контексте, но теряют это свойство после некоторого их квантования и квантования их базисных алгебр. Мы завершим наши лекции примером такого сорта, данным О. Ю. Аристовым и пока не опубликованным. Он сильно опирается на следующую конструкцию $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-алгебры, предложенную [7].

Фиксируем бесконечномерное гильбертово пространство H и рассмотрим множество $\mathcal{N}(H)$ ядерных (= следового класса) операторов на H. Мы напомним, что $\mathcal{N}(H)$ является банаховой алгеброй относительно так называемой ядерной нормы и что как банахово пространство оно изометрически изоморфно пространству $H \hat{\otimes} \bar{H}$, где $\bar{H}$ обозначает пространство, комплексно сопряжённое H. Соответствующий изоморфизм (идущий от фон Ноймана) корректно определяется тем, что переводит каждый оператор ранга 1 $x \bigcirc y$, $x, y \in H$, в $x \otimes y$. Блечер и Ле Мерди обнаружили, что существует такое квантование $\mathcal{N}(H)$, что эта алгебра становится $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-алгеброй. В свете теоремы Блечера, упомянутой в разделе 1, это утверждение эквивалентно следующему (довольно неожиданному!) утверждению: существует топологический изоморфизм банаховой алгебры $\mathcal{N}(H)$ на некоторую *равномерно замкнутую* операторную алгебру на некотором гильбертовом пространстве (и это несмотря на то, что исходная — ядерная — норма в $\mathcal{N}(H)$ ни в каком смысле не эквивалентна операторной норме).

Вот конструкция Д. Блечера и К. Ле Мерди. Рассмотрим H и $\bar{H}$ как квантовые пространства, но на этот раз не относительно столбцового квантования, как мы привыкли, а с максимальным квантованием (обсуждавшимся в разделе 3). Возьмём тензорное произведение Хаагерупа $\max H \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \max \bar{H}$. Оказывается, что банахово пространство первого этажа этого квантового банахова пространства совпадаёт, с точностью до изометрического изоморфизма, с $\mathcal{N}(H)$.

Объясним, почему это так. Начнём с того, что мы имеем сжимающий оператор $j_2 \circ j_1 \colon H \hat{\otimes} \bar{H} \to \max H \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \max \bar{H}$ (сравните с диаграммой (1.3)). Мы рассматриваем квантовое банахово пространство $H_{\mathrm{r}} \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \bar{H}_{\mathrm{c}}$. Здесь и далее $\bar{H}_{\mathrm{c}}$ обозначает гильбертово пространство $\bar{H}$, снабжённое нашим обычным столбцовым квантованием, а H_{r} обозначает так называемое строчечное гильбертово пространство. (Напомним, что последнее определяется как H, квантованное с помощью изометрического оператора $H \to \mathcal{B}(\bar{H})$, $x \mapsto e \bigcirc x$, где e — произвольный фиксированный вектор в $\bar{H}$.) Хорошо известно (и нетрудно доказывается), что существует сжимающий оператор из $H_{\mathrm{r}} \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \bar{H}_{\mathrm{c}}$ в $\mathcal{N}(H)$, переводящий элементарный тензор $x \otimes y$ в оператор ранга 1 $x \bigcirc y$. Собирая всю эту информацию, мы получаем цепочку сжимающих операторов

$$\mathcal{N}(H) \longrightarrow H \hat{\otimes} H \longrightarrow \max H \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \max \bar{H} \longrightarrow H_{\mathrm{r}} \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \bar{H}_{\mathrm{c}} \longrightarrow \mathcal{N}(H),$$

где третья стрелка изображает оператор, тождественный на элементарных тензорах, и другие стрелки изображают операторы, которые обсуждались выше. Так как композиция всех четырёх операторов, очевидно, является тождественным оператором на $\mathcal{N}(H)$, композиция двух первых операторов является требуемым изометрическим изоморфизмом. Заметим, что это отображение, так же как его классический прототип, участвующий в нашей конструкции, отождествляет операторы ранга 1 с элементарными тензорами.

Таким образом, мы можем снабдить пространство $\mathcal{N}(H)$ квантованием, индуцированным из квантового банахова пространства $\max H \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \max \bar{H}$. Существенно, что результирующее квантовое банахово пространство является $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-алгеброй, другими словами, умножение в $\mathcal{N}(H)$ — мультипликативно ограниченный биоператор. По теореме 1.1 это означает существование соответствующего оператора произведения, т. е. вполне ограниченного линейного оператора $\pi\colon \mathcal{N}(H) \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \mathcal{N}(H) \to \mathcal{N}(H)$, однозначно определённого тем, что он переводит элементарные тензоры $a \otimes b$, $a, b \in \mathcal{N}(H)$, в ab.

Чтобы получить такой оператор, мы вначале рассмотрим билинейный функционал скалярного произведения $\mathcal{F}\colon \max \bar{H} \times H_{\mathrm{c}} \to \mathbb{C}$, $(y, x) \mapsto \langle x, y\rangle$. Покажем, что он является мультипликативно сжимающим. Поставим в соответствие каждому $x \in H$ оператор $\hat{x}\colon \mathbb{C} \to H$, $\lambda \mapsto \lambda x$, а каждому $y \in \bar{H}$ — оператор $\tilde{y}\colon H \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \langle z, y\rangle$. Тогда, отождествляя $\mathbb{C}$ с $\mathcal{B}(\mathbb{C})$, мы видим, что $\mathcal{F}(y, x)$ есть не что иное, как композиция $\tilde{y} \circ \hat{x}$. Теперь фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим матрицы $\mathbf{y} = (y_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\max \bar{H})$ и $\mathbf{x} = (x_{ij}) \in \mathrm{M}_n(H_{\mathrm{c}})$. Тогда для n-го мультипликативного размножения $\mathcal{F}_n$ билинейного функционала $\mathcal{F}$ мы видим, что $\mathcal{F}_n(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ — матрица $\mathbf{z} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}^n)$ с элементами $z_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x_{ik}, y_{kj}\rangle$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Заметим, что это в точности матрица операторной композиции $\tilde{\mathbf{y}} \circ \hat{\mathbf{x}}$, где $\hat{\mathbf{x}}\colon \mathbb{C}^n \to \mathcal{B}(nH)$ — оператор, которому соответствует матрица с элементами $\hat{x}_{ij}$, и $\tilde{\mathbf{y}}\colon \mathcal{B}(nH) \to \mathbb{C}^n$ — оператор, которому соответствует матрица с элементами $\tilde{y}_{ij}$. Следовательно, $\|\mathcal{F}_n(\mathbf{y}, \mathbf{x})\| \leqslant \|\tilde{\mathbf{y}}\| \, \|\hat{\mathbf{x}}\|$. Но $\|\hat{\mathbf{x}}\|$ по определению столбцового гильбертова пространства есть норма $\mathbf{x}$, а $\|\tilde{\mathbf{y}}\|$ есть норма $\mathbf{y}$ n-го этажа недавно обсуждаемого строчечного гильбертова пространства $\bar{H}$. Излишне говорить, что $\|\tilde{\mathbf{y}}\| \leqslant \|\mathbf{y}\|_{\max}$, где $\|\cdot\|_{\max}$ обозначает норму n-го этажа максимального квантования соответствующего пространства. Поэтому $\|\mathcal{F}_n(\mathbf{y}, \mathbf{x})\| \leqslant \|\mathbf{y}\|_{\max} \|\mathbf{x}\|$.

Мы видим, что $\mathcal{F}$ действительно мультипликативно сжимающий и, следовательно, он определяет ассоциированный вполне ограниченный линейный функционал $F\colon \max \bar{H} \overset{\mathrm{h}}{\otimes} H_{\mathrm{c}} \to \mathbb{C}$. Этот функционал нам понадобится немного позже. Прямо сейчас мы будем использовать композицию F со сжимающим оператором $J\colon \max \bar{H} \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \max H \to \max \bar{H} \overset{\mathrm{h}}{\otimes} H_{\mathrm{c}}$, тождественным на элементарных тензорах. Обозначим, для краткости, $F \circ J$ через G. Конечно, $G\colon \max \bar{H} \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \max H \to \mathbb{C}$ также является вполне сжимающим функционалом, действующим на элементарных тензорах в точности как F.

Теперь рассмотрим цепочку операторов

$$
\begin{gathered}
(\max H \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \max \bar{H}) \overset{\mathrm{h}}{\otimes} (\max H \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \max \bar{H}) \longrightarrow \\
\longrightarrow \max H \overset{\mathrm{h}}{\otimes} (\max \bar{H}) \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \max H \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \max \bar{H} \xrightarrow{\mathbf{1} \overset{\mathrm{h}}{\otimes} G \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \mathbf{1}} \\
\xrightarrow{\mathbf{1} \overset{\mathrm{h}}{\otimes} G \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \mathbf{1}} \max H \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \mathbb{C} \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \max \bar{H} \longrightarrow \max H \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \max \bar{H}.
\end{gathered}
$$

Здесь первая стрелка обозначает вполне изометрический изоморфизм, задаваемый с помощью ассоциативности тензорного произведения Хаагерупа, а последняя обозначает отождествление, определённое $x \otimes \lambda \otimes y \mapsto \lambda(x \otimes y)$. Их композиция после отождествления $\max H \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \max \bar{H}$ с $\mathcal{N}(H)$ даёт вполне сжимающий оператор $\pi\colon \mathcal{N}(H) \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \mathcal{N}(H) \to \mathcal{N}(H)$, однозначно определённый тем, что он переводит элементарные тензоры $(x_1 \bigcirc y_1) \otimes (x_2 \bigcirc y_2)$ в $\langle x_2, y_1\rangle x_1 \bigcirc y_2$, т. е. в $(x_1 \bigcirc y_1)(x_2 \bigcirc y_2)$. Так как линейная оболочка операторов ранга 1 плотна в $\mathcal{N}(H)$, мы видим, что π действительно требуемый оператор произведения.

Таким образом, алгебра $\mathcal{N}(H)$ превращена в $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-алгебру по рецепту Блечера и Ле Мерди. О. Ю. Аристов замечает, что пространственный $\mathcal{N}(H)$-модуль H, снабжённый на этот раз нашим обычным столбцовым квантованием, есть $\mathcal{N}(H)$-$\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-модуль. Он рассуждает следующим образом. Согласно теореме 1.1 достаточно показать, что оператор внешнего произведения $\pi_H\colon \mathcal{N}(H) \overset{\mathrm{h}}{\otimes} H_{\mathrm{c}} \to H_{\mathrm{c}}$, $a \otimes x \mapsto a(x)$, $a \in \mathcal{N}(H)$, $x \in H$, корректно определён и вполне ограничен. После отождествления $\mathcal{N}(H)$ с $\max H \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \max \bar{H}$ это то же самое, что задать вполне ограниченный оператор из $(\max H \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \max \bar{H}) \overset{\mathrm{h}}{\otimes} H_{\mathrm{c}}$ в H_{c}, переводящий элементарные тензоры вида $(x \otimes y) \otimes z$, $x, y, z \in H$, в $(x \bigcirc y)(z)$, т. е. в $\langle z, y\rangle x$. Но посмотрим на композицию операторов в цепочке

$$(\max H \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \max \bar{H}) \overset{\mathrm{h}}{\otimes} H_{\mathrm{c}} \longrightarrow \max H \overset{\mathrm{h}}{\otimes} (\max \bar{H} \overset{\mathrm{h}}{\otimes} H_{\mathrm{c}}) \xrightarrow{\mathbf{1} \overset{\mathrm{h}}{\otimes} F} \\ \xrightarrow{\mathbf{1} \overset{\mathrm{h}}{\otimes} F} \max H \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \mathbb{C} \longrightarrow \max H \xrightarrow{\mathbf{1}} H_{\mathrm{c}},$$

где первый оператор задаётся ассоциативностью нашего тензорного произведения, третий — стандартное отождествление и функционал F тот же, что и раньше. Очевидно, эта композиция в точности требуемый оператор.

Заметим, что пространственный $\mathcal{N}(H)$-модуль H определённо является проективным как банахов модуль, т. е. $\hat{\otimes}$-проективен; это следует напрямую из теоремы 4.1. Тем не менее справедливо следующее утверждение.

Предложение 6.2 (О. Ю. Аристов). *Рассмотрим $\mathcal{N}(H)$ как $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-алгебру относительно квантования, индуцированного из $\max H \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \max \bar{H}$. Тогда $\mathcal{N}(H)$-$\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-модуль H_{c} не является $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-проективным* (*и следовательно, по предложению* 2.7 *он также не $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-проективен*).

Доказательство. Предположим, что, напротив, H является $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-проективным модулем. Тогда по теореме 2.3 существует морфизм $\rho\colon H \to \mathcal{N}(H) \overset{\mathrm{h}}{\otimes} H$ в $\boldsymbol{\mathcal{N}(H)}$-$\overset{\mathbf{h}}{\otimes}$-**mod**, правый обратный к морфизму внешнего произведения для H и поэтому инъективный.

Зафиксируем произвольный ненулевой элемент $x \in H$. Тогда $u := \rho(x)$ также ненулевой. Следовательно, по предложению 5.3 (с $\mathcal{N}(H)$ в качестве E) существует $e_1 \in H_{\mathrm{c}}$, такой что вполне ограниченный оператор

$\mathbf{1} \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \check{e}_1 \colon \mathcal{N}(H) \overset{\mathrm{h}}{\otimes} H_{\mathrm{c}} \to \mathcal{N}(H)$, $b \otimes y \mapsto \langle y, e_1 \rangle b$, $b \in \mathcal{N}(H)$, $u \in H$, отображает u в ненулевой оператор, скажем a. Рассматривая действие $\mathbf{1} \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \check{e}_1$ на элементарных тензорах, мы видим, что это изоморфизм $\mathcal{N}(H)$-модулей.

Теперь выберем произвольный элемент $e_2 \in H$, для которого $a(e_2) \neq 0$, и возьмём функционал $\check{e}_2 \colon \bar{H} \to \mathbb{C}$, $y \mapsto \langle e_2, y \rangle$. Рассмотрим ограниченные операторы $\tau \colon \mathcal{N}(H) \to \max H$, $b \mapsto b(e_2)$, и $\mathbf{1} \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \check{e}_2 \colon \max H \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \max \bar{H} \to \max H$, $z \otimes y \mapsto \langle e_2, y \rangle z$. (Здесь, конечно, мы отождествляем $\max H$ с $\max H \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \mathbb{C}$.) Принимая во внимание действие τ на операторах ранга 1 и действие $\mathbf{1} \tilde{\otimes} \check{e}_2$ на элементарных тензорах, мы видим, что после отождествления $\mathcal{N}(H)$ с $\max H \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \max \bar{H}$ эти два оператора совпадают. Поэтому, так как $\mathbf{1} \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \check{e}_2$ вполне ограничен, то же самое верно для τ. Заметим, что τ является морфизмом $\mathcal{N}(H)$-модулей.

Наконец, рассмотрим композицию $\varphi := \tau \circ \left(\mathbf{1} \overset{\mathrm{h}}{\otimes} \check{e}_1 \right) \circ \rho \colon H_{\mathrm{c}} \to \max H$. Все её сомножители являются вполне ограниченными операторами и морфизмами $\mathcal{N}(H)$-модулей, поэтому φ обладает этими двумя свойствами. Пространственный $\mathcal{N}(H)$-модуль H, очевидно, неприводим, и следовательно, φ является также эндоморфизмом неприводимого модуля над банаховой алгеброй. Следовательно, согласно соответствующей версии леммы Шура (см., например, [14, теорема VI.2.48]), φ — кратное $\mathbf{1}$. Но множители φ были выбраны так, что $\varphi(x) \neq 0$. Отсюда следует, что тождественный оператор $\mathbf{1}$, рассматриваемый на области определения H_{c} и с областью значений $\max H$ является, в свою очередь, кратным φ, следовательно, он также вполне ограничен. Поэтому столбцовое квантование H эквивалентно максимальному квантованию, а известно, что это не так. $\square$

Несмотря на то что, как было отмечено, $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-алгебра $\mathcal{N}(H)$ вполне изоморфна (равномерно замкнутой) операторной алгебре, $\mathcal{N}(H)$-модуль H_{c} не является *пространственным* модулем над этой алгеброй. Было бы интересно найти пример пространственно $\hat{\otimes}$-проективной, но не пространственно $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-проективной операторной алгебры. (Излишне говорить, что такая алгебра, если она существует, не может быть самосопряжённой.)

7. Эпилог. Гомологические размерности

На протяжении этих лекций главный вопрос, касающийся заданного модуля, был: является он проективным или нет? Если наш модуль проективен, то мы довольны, но что, если нет? Оказывается, что непроективные модули не образуют аморфную массу «гомологически безнадёжных» объектов, они имеют иерархию. Имеется число (или ∞), которое измеряет, насколько наш модуль «гомологически хуже» проективного. Это так называемая гомологическая размерность. Мы собираемся очень кратко объяснить, что это такое, и представить несколько связанных с ней результатов и проблем.

Исходные определения имеют общекатегорный характер. Пусть $\mathcal{K}$ — аддитивная категория, пока произвольная, и X — её объект. Напомним, что *комплекс над* X — это последовательность в $\mathcal{K}$ вида

$$0 \longleftarrow X \xleftarrow{d_{-1}} P_0 \xleftarrow{d_0} P_1 \xleftarrow{d_1} P_2 \xleftarrow{d_2} \ldots, \qquad (\mathcal{P})$$

такая что $d_{n-1}d_n = 0$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Мы скажем, что комплекс $(\mathcal{P})$ над X *расщепляется*, если существуют морфизмы $s_{-1}\colon X \to P_0$ и $s_n\colon P_n \to P_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, в $\mathcal{K}$, такие что $d_{-1} \circ s_{-1} = \mathbf{1}$ и $d_n \circ s_n + d_{n+1} \circ s_{n+1} = \mathbf{1}$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$. Расщепимые, или, как ещё говорят, стягиваемые, комплексы имеют, в некотором смысле, наилучшую структуру. Их поучительное эквивалентное определение имеется, например, в [13, 14].

Следующее понятие, которое носит подготовительный характер в нашем изложении, имеет определённое независимое значение. Оно используется при вычислении главных гомологических характеристик $\tilde{\otimes}$-алгебр, в частности их групп когомологий (см. [5, 18]).

Определение 7.1. Пусть $(\mathcal{K}, \square\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L})$ — предотносительная категория (см. раздел 2). Комплекс $(\mathcal{P})$ над X называется *резольвентой* X, если комплекс

$$0 \longleftarrow X \xleftarrow{\square(d_{-1})} P_0 \xleftarrow{\square(d_0)} P_1 \xleftarrow{\square(d_1)} P_2 \xleftarrow{\square(d_2)} \ldots \qquad (\square(\mathcal{P}))$$

в $\mathcal{L}$ расщепляется. Резольвента X называется *проективной*, если все P_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, являются проективными (относительно $\square$).

Замечание. Конструкция проективной резольвенты X является, неформально говоря, способом «выразить этот объект с помощью проективных объектов». В категориях банаховых и квантовых модулей, рассмотренных в наших лекциях (и то же самое верно в намного более широком классе предотносительных категорий), это эквивалентно следующей процедуре. Сначала мы пытаемся представить X как фактор-модуль некоторого проективного модуля так, чтобы соответствующее отображение факторизации было бы допустимым морфизмом. Затем мы представляем ядро этого морфизма как фактор-модуль другого проективного модуля, снова с допустимым морфизмом факторизации; после этого мы поступаем так же с ядром последнего и т. д. Нетрудно ощутить, что понятие проективной резольвенты, о котором мы говорим, доставляет удобный «синхронный» способ выписать такой процесс.

Очевидно, что в наших основных категориях банаховых и квантовых модулей резольвенты всегда являются точными последовательностями в обычном смысле линейной алгебры. Далее, в категориях банаховых модулей резольвенты — те и только те комплексы, которые сами точны и все ядра (или, эквивалентно, образы) всех участвующих в них морфизмов имеют, как подпространства в соответствующих P_n, банаховы дополнения (докажите это!). Однако аналогичное утверждение неверно для категорий квантовых модулей.

Упражнение 7.1. Пусть $(\mathcal{K},\ \square\colon \mathcal{K}\to\mathcal{L})$ является не просто предотносительной, но относительной категорией. Покажите, что каждый объект в $\mathcal{K}$ обладает по меньшей мере одной проективной резольвентой.

Пусть $\mathcal{P}$ (см. выше) — резольвента объекта в предотносительной категории. Мы скажем, что она имеет *длину* n, если $P_n \neq 0$ и $P_k = 0$ для всех $k > n$. Если таких n не существует, мы говорим, что наша резольвента имеет длину ∞.

Определение 7.2. Для данного X длина его кратчайшей проективной резольвенты называется *проективной гомологической размерностью* X и обозначается $\mathrm{dh}_{\mathcal{K}}X$. Если все проективные резольвенты X имеют бесконечную длину, мы полагаем $\mathrm{dh}_{\mathcal{K}}X := \infty$.

Источник понятия проективной гомологической размерности — знаменитая «теорема Гильберта о сизигиях», в которой, если использовать современную терминологию, было показано, что каждый (абстрактный) модуль над алгеброй полиномов от n переменных имеет проективную, и даже свободную, резольвенту длины не больше n.

В действительности «гомологическая размерность» — общее название; можно (а иногда нужно) рассматривать так называемую инъективную гомологическую размерность, плоскую (или слабую) гомологическую размерность и т. д. (ср. [18]). Но так как мы ограничиваемся обсуждением проективной гомологической размерности, то будем опускать прилагательное «проективная».

В частности, мы имеем определение гомологической размерности левого $\tilde{\otimes}$-модуля над $\tilde{\otimes}$-алгеброй. С фиксированным $\tilde{\otimes}$ мы будем для случая $\mathcal{K} = \boldsymbol{A}\text{-}\tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{mod}$ писать $\mathrm{dh}_A X$ вместо $\mathrm{dh}_{\mathcal{K}}X$.

Легко заметить, что, на более традиционном языке, $\mathrm{dh}_A X$ есть наименьшее n, для которого X может быть представлен как $P_0/(P_1\ldots/(P_{n-1}/P_n)\ldots)$, где все модули являются проективными и все соответствующие отображения факторизации допустимы. В частности, $\mathrm{dh}_A X = 0$ означает в точности, что X проективен.

Как это обычно бывает в случае ключевых понятий, гомологическая размерность допускает важные альтернативные подходы (см., например, [13, теорема III.5.4]). Мы сформулируем только одно утверждение такого сорта. Оно существенно помогает вычислить $\mathrm{dh}_A X$ в конкретных ситуациях.

Предложение 7.1. *Пусть $(\mathcal{K},\ \square\colon \mathcal{K}\to\mathcal{L})$ — предотносительная категория и $n\in\mathbb{N}$. Тогда следующие свойства $X\in\mathcal{K}$ эквивалентны*:

1) $\mathrm{dh}_A X \leqslant n$;
2) *если X обладает резольвентой $\mathcal{P}$ (см. выше) длины n, такой что $P_0,\ldots,P_{n-1}$ проективны, то последний ненулевой объект P_n также проективен.*

Отсюда можно легко вывести следствие 7.1.

Следствие 7.1. *Пусть A — $\tilde{\otimes}$-алгебра, $X\in\boldsymbol{A}\text{-}\tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{mod}$. Тогда $\mathrm{dh}_A X\leqslant n$ в том и только том случае, когда в произвольной проективной резольвенте $\mathcal{P}$ объек-*

та X A-$\tilde{\otimes}$-*модуль* $\mathrm{Im}(d_{n-1})$ (*совпадающий с* $\mathrm{Ker}(d_{n-2})$) *является* $\tilde{\otimes}$-*проективным.*

Другими словами, соответствующая «укороченная» резольвента

$$0 \longleftarrow X \longleftarrow P_0 \longleftarrow P_1 \longleftarrow \ldots \longleftarrow P_{n-1} \xleftarrow{\mathbf{in}} \mathrm{Im}(d_{n-1}) \longleftarrow 0 \longleftarrow \ldots$$

остаётся проективной.

Упражнение 7.2. Пусть X — унитальный $\tilde{\otimes}$-модуль над унитальной $\tilde{\otimes}$-алгеброй A. Тогда гомологическая размерность X как объекта в $\mathbf{U}\boldsymbol{A}$-$\tilde{\otimes}$-$\mathbf{mod}$ и как объекта в $\boldsymbol{A}$-$\tilde{\otimes}$-$\mathbf{mod}$ одинакова.

Пример 7.1. Пусть Ω — метризуемое компактное топологическое пространство, $A := C(\Omega)$, $t \in \Omega$. Рассмотрим A-$\tilde{\otimes}$-модуль $\mathbb{C}_t$, определённый как комплексная плоскость с внешним умножением $a \cdot z := a(t)z$. С помощью теоремы 3.2 нетрудно показать, что этот модуль имеет проективную резольвенту

$$0 \longleftarrow \mathbb{C}_t \xleftarrow{d_{-1}} A \xleftarrow{d_0} A \xleftarrow{d_1} I_t \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow \ldots,$$

где $I_t := \{a \in A\colon a(t) = 0\}$, d_1 — естественное вложение и $d_0\colon a \mapsto a(t)$. Кроме того, легко проверить, что модуль $\mathbb{C}_t$ $\tilde{\otimes}$-проективен тогда и только тогда, когда t — изолированная точка в Ω. Таким образом, мы имеем, что $\mathrm{dh}_A \mathbb{C}_t = 0$, если t — изолированная точка в Ω, и $\mathrm{dh}_A \mathbb{C}_t = 1$ в противном случае.

Пример 7.2. Пусть Ω — паракомпактное (скажем, метризуемое) топологическое пространство и A — банахова алгебра $C_0(\Omega)$. Рассмотрим банахово пространство $C_{\mathrm{b}}(\Omega)$, состоящее из всех непрерывных ограниченных функций на Ω, снабжённое равномерной нормой. Очевидно, это банахов A-модуль относительно поточечного умножения. Тогда мы имеем $\mathrm{dh}_A C_b(\Omega) = 2$. В частности, $\mathrm{dh}_{c_0} l_\infty = 2$. Доказательство основано на некоторых манипуляциях с проективной тензорной нормой (см., например, [13, с. 211, 212], и мы его опустим.

Пример 7.3. Пусть A есть $\mathbb{C}$ с нулевым умножением. Рассмотрим A-$\tilde{\otimes}$-модуль A и его проективную резольвенту

$$0 \longleftarrow A \xleftarrow{\pi} A_+ \xleftarrow{d} A_+ \xleftarrow{d} A_+ \longleftarrow \ldots,$$

где $\pi, d\colon \lambda e + z \mapsto \lambda z$. С помощью предложения 7.1 легко показать, что $\mathrm{dh}_A A = \infty$.

Теперь, начиная с модулей, мы вводим одну из главных числовых характеристик самих алгебр.

Определение 7.3. Пусть A — $\tilde{\otimes}$-алгебра. Число (или ∞) $\sup\{\mathrm{dh}_A X\colon X \in \boldsymbol{A}\text{-}\tilde{\otimes}\text{-}\mathbf{mod}\}$ называется *левой глобальной гомологической размерностью* A или просто *глобальной размерностью* A. Оно обозначается $\mathrm{dg}\, A$.

Из следствия 2.3 легко получаем, что $\mathrm{dg}\, A = \mathrm{dg}\, A_+$. Другими словами, глобальная размерность не меняется при унитализации данной алгебры.

Типичная проблема топологической гомологии — вычислить глобальные размерности «популярных» $\tilde{\otimes}$-алгебр, обслуживающих ту или иную область анализа. Начиная с первого результата 1972 года было получено значительное количество различных результатов. Однако остаётся множество открытых проблем, иногда довольно старых и интригующих.

Наше краткое обсуждение мы начнём с того, что укажем важный класс $\tilde{\otimes}$-алгебр, глобальная размерность которых обязана быть не больше 2. (Как окажется, число 2 играет очень заметную роль в топологической гомологии, будучи наименьшим значением $\operatorname{dg} A$ для «нетривиальных» в некотором смысле классов A. Это в каком-то смысле напоминает роль числа 1 в чисто алгебраической гомологии.) С этой целью мы будем первый и последний раз в нашем изложении рассматривать тип модулей, отличных от левых. Это двусторонние модули, или, для краткости, бимодули.

Пусть A — $\tilde{\otimes}$-алгебра. Легко догадаться, что *A-$\tilde{\otimes}$-бимодуль* — $\tilde{\otimes}$-пространство X, снабжённое структурой A-бимодуля в алгебраическом смысле, такой что оба биоператора внешних умножений являются $\tilde{\otimes}$-ограниченными. Для фиксированной алгебры A все A-$\tilde{\otimes}$-бимодули образуют категорию, обозначаемую $\boldsymbol{A}$**-**$\boldsymbol{A}$**-**$\tilde{\otimes}$**-mod**. Морфизмами в этой категории являются по определению отображения, которые являются морфизмами бимодулей в алгебраическом смысле и в то же самое время $\tilde{\otimes}$-ограниченными операторами. Категория $\boldsymbol{A}$**-**$\boldsymbol{A}$**-**$\tilde{\otimes}$**-mod** рассматривается как предотносительная относительно очевидным образом определённого забывающего функтора в категорию $\tilde{\otimes}$**-Ban**. Таким образом, мы можем говорить о проективных объектах, соответственно называемых *проективными A-$\tilde{\otimes}$-бимодулями*. (В действительности категория $\boldsymbol{A}$**-**$\boldsymbol{A}$**-**$\tilde{\otimes}$**-mod** является, так же как $\boldsymbol{A}$**-**$\tilde{\otimes}$**-mod**, относительной, но нам это сейчас не потребуется.)

Первый и чрезвычайно важный пример — это сама базисная алгебра A: это A-$\tilde{\otimes}$-бимодуль относительно её внутреннего умножения в роли внешнего умножения. Очевидно, оператор произведения $\pi\colon A \tilde{\otimes} A \to A$ является морфизмом в $\boldsymbol{A}$**-**$\boldsymbol{A}$**-**$\tilde{\otimes}$**-mod**.

Определение 7.4. $\tilde{\otimes}$-алгебра A называется *бипроективной*, если A-$\tilde{\otimes}$-бимодуль A является проективным.

В следующем утверждении, взятом некоторыми авторами в качестве исходного определения бипроективности [27], даётся стандартный способ проверки этого свойства.

Предложение 7.2. *$\tilde{\otimes}$-алгебра A бипроективна тогда и только тогда, когда морфизм произведения $\pi\colon A \tilde{\otimes} A \to A$ имеет правый обратный в* $\boldsymbol{A}$**-**$\boldsymbol{A}$**-**$\tilde{\otimes}$**-mod**.

Доказательство можно найти, например, в [13, утверждение IV.5.6] или в [14, теорема VII.1.69].

Какие $\tilde{\otimes}$-алгебры среди тех, которые мы знаем и уважаем, являются бипроективными и какие нет? Мы упомянем некоторые из соответствующих фактов, накопленных к настоящему времени (см. [18] и/или [5] для ссылок).

- Каждая бипроективная коммутативная $\tilde{\otimes}$-алгебра должна иметь дискретный спектр Гельфанда (сравните со вторым утверждением теоремы 3.1).
- C^*-алгебра является $\hat{\otimes}$-бипроективной тогда и только тогда, когда она $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-бипроективна, и тогда и только тогда, когда она разлагается в c_0-сумму семейства полных матричных алгебр. В то же время C^*-алгебра $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-бипроективна тогда и только тогда, когда она разлагается в c_0-сумму семейства алгебр $\mathcal{K}(H)$ (для различных H). В частности, алгебра $\mathcal{K}(H)$, $\dim H = \infty$, не $\hat{\otimes}$- и не $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-бипроективна, но она $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-бипроективна. (Обратите внимание, что в вопросе бипроективности две разновидности квантовых алгебр ведут себя различно!)
- $\tilde{\otimes}$-алгебра $C_0(\Omega)$, где Ω является локально компактным топологическим пространством, бипроективна тогда и только тогда, когда Ω дискретно (это частный случай предыдущего утверждения, сравните с теоремой 3.1).
- $\tilde{\otimes}$-алгебра $L_1(G)$, где G — локально компактная группа, бипроективна тогда и только тогда, когда G компактна (сравните с теоремой 3.6).
- $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-алгебра $A(G)$, где G — локально компактная группа, бипроективна тогда и только тогда, когда G дискретна (сравните с теоремой 3.7).
- $\hat{\otimes}$-алгебра $\mathcal{N}(E)$, где E — банахово пространство, бипроективна тогда и только тогда, когда E обладает свойством аппроксимации Гротендика.

Из всего этого мы можем извлечь, в частности, следующий урок: для $\tilde{\otimes}$-алгебры быть бипроективной намного сложнее, чем быть левой проективной.

Бипроективные алгебры имеют определённое независимое значение; в частности, они имеют интересную структурную теорию [3]. Однако в настоящем контексте нам они нужны из-за следующего приложения, которое, между прочим, было исходным стимулом к их появлению.

Теорема 7.1. *Пусть A — бипроективная $\tilde{\otimes}$-алгебра. Тогда* $\operatorname{dg} A\ (= \operatorname{dg} A_+) \leqslant 2$.

Доказательство основано на рассмотрении специальной резольвенты длины 2, так называемой раскручивающей резольвенты данного модуля.

Пытаясь оценить глобальную размерность снизу, мы встречаемся с явлением, которое не имеет аналога для абстрактных алгебр и для ненормированных топологических алгебр, даже для метризуемых алгебр Аренса—Майкла. Начиная с абстрактной алгебры $\mathbb{C}[t]$ и топологической алгебры $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ оба класса содержат множество различных полупростых бесконечномерных коммутативных алгебр глобальной размерности 2. Однако имеет место следующее утверждение.

Теорема 7.2 (теорема о глобальной размерности). *Пусть A — коммутативная $\hat{\otimes}$-алгебра (т. е. банахова алгебра) с бесконечным спектром Гельфанда, в частности бесконечномерная функциональная алгебра. Тогда* $\operatorname{dg} A \geqslant 2$.

Существующее доказательство этой теоремы, возможно, длиннее, чем доказательство любой другой теоремы в топологической теории гомологий. Оно сочетает различные рассмотрения, касающиеся теории банаховых алгебр, гомологической алгебры, геометрии банаховых пространств и топологии. Его детальное изложение содержится в [23].

Как прямое следствие сформулированной теоремы получаем, что глобальная размерность функциональной банаховой алгебры или 0, когда она изоморфна $\mathbb{C}^n$, или, в противном случае, 2 или больше. Следовательно, глобальные размерности банаховых функциональных алгебр имеют по меньшей мере одно «запрещённое» значение: 1. Это провоцирует естественный туманно формулируемый вопрос: насколько сильно распространён этот феномен среди «алгебр анализа»? Определённо это явление не покрывает всех банаховых алгебр: например, алгебра (2×2)-матриц с нулями во второй строке имеет глобальную размерность, в точности равную 1. Однако эта алгебра и другие известные примеры подобного сорта не принадлежат к любимым классам специалистов по функциональному анализу: они не являются ни полупростыми, ни коммутативными. В этой связи следующая гипотеза кажется разумно сформулированной.

Гипотеза. Пусть A — полупростая бесконечномерная банахова алгебра (не обязательно коммутативная). Верно ли, что $\operatorname{dg} A \geqslant 2$? (Если это так, то 1 оказывается запрещённым значением для глобальных размерностей также в этом широком классе алгебр.)

Если вдобавок известно, что A бипроективна и имеет как банахово пространство свойство аппроксимации, то ответ положителен (Ю. В. Селиванов). То же самое верно для широкого класса C^*-алгебр, который включает все неунитальные алгебры и все сепарабельные постлиминальные или GCR-алгебры (О. Ю. Аристов). Однако важный случай унитальных простых C^*-алгебр, похожих, скажем, на фермионную алгебру, остаётся неясным. (Ссылки для упомянутых результатов и для того, что будет сказано ниже, см., например, в [18].)

В настоящий момент мы знаем точные значения глобальной размерности для довольно небольшого числа $\tilde{\otimes}$-алгебр. Иногда ответ получается как прямое следствие теорем 7.1 и 7.2, иногда с использованием дополнительных рассуждений. Вот соответствующий неполный список.

- Для банаховых алгебр (= $\hat{\otimes}$-алгебр) l_1, $C_0(\Omega)$ для бесконечных дискретных Ω, $L_1(G)$ для бесконечных компактных G, $C^*(G)$ для такой же G, $\mathcal{N}(H)$, $\dim H = \infty$, мы имеем $\operatorname{dg} A = 2$.
- Для всех только что упомянутых банаховых алгебр A мы имеем
$$\operatorname{dg} \underbrace{A \mathbin{\hat{\otimes}} \ldots \mathbin{\hat{\otimes}} A}_{n \text{ множителей}} = 2n.$$
- Для банаховых алгебр l_p, $1 < p < \infty$, $L_1(G)$ для аменабельных некомпактных G, $\mathcal{N}(E)$ для E без свойства аппроксимации, $C_(\Omega)$, где Ω является «громадным» отрезком трансфинитной прямой, мы имеем $\operatorname{dg} A = \infty$.

Никому не известна полупростая банахова алгебра A, для которой $\operatorname{dg} A = 3$.

Что касается квантовых алгебр, то мы знаем ещё очень мало. Легко показать, что $\operatorname{dg} l_2 = 2$ для l_2 как $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$- и $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-алгебры. Весьма вероятно (хотя это ещё не сделано аккуратно), что равенство $\mathrm{dh}_{\mathcal{K}(H)}\mathcal{B}(H) = 2$, которое известно многие годы для банаховой алгебры $\mathcal{K}(H)$, $\dim H = \infty$, также верно для обоих «квантовых обликов» этой алгебры. Согласно теореме 7.1 это могло бы немедленно повлечь $\mathrm{dh}_{\mathcal{K}(H)}\mathcal{B}(H) = 2$ для $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-случая. Однако для $\hat{\otimes}$- и $\overset{\mathrm{o}}{\otimes}$-случаев мы получаем только оценку $\mathrm{dh}_{\mathcal{K}(H)}\mathcal{B}(H) \geqslant 2$, и точное значение глобальной размерности $\mathcal{K}(H)$ в обоих этих случаях остаётся неизвестным.

До недавнего времени все известные примеры A с $\mathrm{dg}\, A = 2$ были построены из бипроективных алгебр с помощью унитализаций и прямых сумм. С. Б. Табалдыев нашёл алгебру другого сорта: он доказал, что $\mathrm{dg}\, C(\Omega) = 2$, если Ω является счётным компактным пространством с $\Omega^{(n)} = \varnothing$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

К сожалению, многие годы мы не знаем, каковы глобальные размерности таких чрезвычайно популярных банаховых алгебр, как $C[0,1]$, l_∞, алгебра Вольтерра $L_1[0,1]$, $\mathcal{B}(H)$ и (как это только что обсуждалось) $\mathcal{K}(H)$.

Конечно, было бы очень интересно узнать, остаётся ли теорема о глобальной размерности верной, если мы заменим в её формулировке банаховы алгебры квантовыми алгебрами (Н. Волосова показала, что это действительно так).

Мы завершаем наши лекции формулировкой проблемы, которая также является довольно старой, по крайней мере в контексте банаховых алгебр.

Проблема. Пусть A — такая $\tilde{\otimes}$-алгебра, что все левые A-$\tilde{\otimes}$-модули являются проективными (другими словами, $\mathrm{dg}\, A = 0$). Влечёт ли это, что A классически простая (т. е. является прямой суммой конечного семейства полных матричных алгебр)?

Хорошо известно, что обратное верно, и это нетрудно доказать.

Утвердительный ответ получен при некоторых дополнительных условиях на A, например, если это коммутативная алгебра, C^*-алгебра или полупростая алгебра со свойством аппроксимации. Мы хотим подчеркнуть, однако, что в зоопарке ненормированных топологических алгебр животные с $\mathrm{dg}\, A = 0$ кишат: уже такая алгебра как $\mathbb{C}^M$, где M — множество произвольной мощности, имеет это свойство.

Замечание. Как было упомянуто в [20, замечание 6.15], Р. Смит получил результат, который кажется очень близким к ответу на обсуждаемую проблему в классе $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-алгебр. На самом деле имеется другая важная числовая характеристика $\tilde{\otimes}$-алгебр, так называемая *биразмерность*, или *когомологическая размерность*, $\mathrm{db}\, A$. Она определяется как гомологическая размерность унитализации A_+ как A-$\tilde{\otimes}$-бимодуля (и также, эквивалентно, в терминах групп когомологий A, ср. [18]). Мы имеем всегда $\mathrm{db}\, A \geqslant \mathrm{dg}\, A$, и, в отличие от чистых алгебр, неизвестно, существуют ли примеры строгого неравенства. Что случится, если мы в только что обсуждаемой проблеме заменим $\mathrm{dg}\, A$ на $\mathrm{db}\, A$? Получающаяся проблема в контексте банаховых алгебр также хорошо известна. Смит доказал (в эквивалентных терминах), что произвольная $\overset{\mathrm{h}}{\otimes}$-алгебра A когомологической размерности 0 классически полупроста.

Литература

[1] Головин Ю. О. Критерий пространственной проективности неразложимой CSL-алгебры операторов // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, № 4. — С. 161—162.

[2] Поляков М. Е. Критерий пространственной проективности операторных алгебр, обладающих каноническим представлением // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2001. — № 7. — С. 32—42.

[3] Селиванов Ю. В. Бипроективные банаховы алгебры // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1979. — Т. 43, № 5. — С. 1159—1174.

[4] Хелемский А. Я., Поляков М. Е. Описание морфизмов из гильбертова модуля над C^*-алгеброй в эту алгебру // Мат. заметки. — 2000. — Т. 68, вып. 4. — С. 560—567.

[5] Aristov O. Yu. Biprojective algebras and operator spaces // J. Math. Sci. — 2002. — Vol. 111, no. 2. — P. 3339—3386.

[6] Blecher D. P. A completely bounded characterization of operator algebras // Math. Ann. — 1995. — Vol. 303. — P. 227—239.

[7] Blecher D. P., Le Merdy C. On quotients of function algebras and operator algebra structures on l^p // J. Operator Theory. — 1995. — Vol. 34, no. 2. — P. 315—346.

[8] Blecher D. P., Paulsen V. I. Tensor products of operator algebras // J. Funct. Anal. — 1991. — Vol. 99, no. 2. — P. 262—292.

[9] Dales H. G., Polyakov M. E. Homological properties of modules over group algebras // Proc. London Math. Soc., III Ser. — 2004. — Vol. 89, no. 2. — P. 390—426.

[10] Effros E. G., Ruan Z.-J. Operator Spaces. — Oxford: Clarendon Press, 2000.

[11] Engelking R. General Topology. — Warszawa: PWN, 1977.

[12] Enock M., Schwartz J.-M. Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups. — Berlin: Springer, 1992.

[13] Helemskii A. Ya. The Homology of Banach and Topological Algebras. — Dordrecht: Kluwer, 1989.

[14] Helemskii A. Ya. Banach and Locally Convex Algebras. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1993.

[15] Helemskii A. Ya. A description of spatially projective von Neumann algebras // J. Operator Theory. — 1994. — Vol. 32. — P. 381—398.

[16] Helemskii A. Ya. Description of spatially projective operator C^*-algebras, and around it // Banach Algebras '97 / E. Albrect, M. Mathieu, eds. — Berlin: Walter de Gruyter, 1998. — P. 261—272.

[17] Helemskii A. Ya. Projective homological classification of C^*-algebras // Commun. Algebra. — 1998. — Vol. 26, no. 3. — P. 977—996.

[18] Helemskii A. Ya. Homology for the algebras of analysis // Handbook of Algebra. Vol. 2 / M. Hazewinkel, ed. — Amsterdam: Elsevier, 2000. — P. 151—274.

[19] Helemskii A. Ya. Wedderburn-type theorems for operator algebras and modules: Traditional and «quantized» homological approaches // Topological Homology. Helemskii's Moscow Seminar / A. Ya. Helemskii, ed. — Huntington: Nova Science Publishers, 2000. — P. 57—92.

[20] Paulsen V. Relative Yoneda cohomology for operator spaces // J. Funct. Anal. — 1998. — Vol. 157. — P. 358—393.

[21] Pisier J. The Operator Hilbert Space OH, Complex Interpolation and Tensor Norms. — Amer. Math. Soc., 1996. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 585).

[22] Pisier J. An Introduction to the Theory of Operator Spaces. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.

[23] Pott S. An account of the global homological dimension theorem of A. Ya. Helemskii // Ann. Univ. Sarav. Ser. Math. — 1999. — Vol. 9, no. 3. — P. 155—194.

[24] Pugach L. I. Projective and flat ideals of function algebras and their connection with analytic structure // Math. Notes. — 1982. — Vol. 31. — P. 223—229.

[25] Rickart C. E. General Theory of Banach Algebras. — New York: Van Nostrand, 1960.

[26] Ruan Z.-J., Xu G. Splitting properties of operator bimodules and operator amenability of Kac algebras // 16th OT Conf. Proc. — 1997. — P. 193—216.

[27] Runde V. Lectures on Amenability. — Berlin: Springer, 2002.

[28] Segal I. E. C^*-algebras and quantization // C^*-Algebras: 1943—1993. A Fifty Year Celebration / R. S. Doran, ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 1994. — P. 67—98.

[29] Tabaldyev S. B. The Sobolev algebra and indecomposable spatially projective operator algebras // Topological Homology. Helemskii's Moscow Seminar / A. Ya. Helemskii, ed. — Huntington: Nova Science Publishers, 2000. — P. 201—210.

[30] Wood P. J. The operator biprojectivity of the Fourier algebra. — Preprint. — 2000.